

Geometría Algebraica

MAT427 — Clase 8

PEDRO MONTERO

UNIVERSIDAD TÉCNICA FEDERICO SANTA MARÍA
VALPARAÍSO, CHILE

24 DE AGOSTO DE 2026

§2.7 VARIEDADES ALGEBRAICAS PROYECTIVAS

COMPACIDAD EN GEOMETRÍA ALGEBRAICA

Recuerdo: una variedad algebraica X es **projectiva** si es isomorfa a una subvariedad cerrada de algún espacio proyectivo, i.e., si existe una incrustación cerrada $\iota : X \hookrightarrow \mathbb{P}^n$ para algún $n \in \mathbb{N}^{\geq 1}$. Por otra parte, un espacio topológico X es **compacto** si y sólo si para todo espacio topológico Y la proyección $\text{pr}_Y : X \times Y \rightarrow Y$ es una función **cerrada**, donde $X \times Y$ está dotado de la **topología producto usual**.

Sea X variedad algebraica projectiva. Entonces, para *toda* variedad algebraica Y la proyección

$$\text{pr}_Y : X \times Y \longrightarrow Y, (x, y) \longmapsto y$$

es una función **cerrada**.

Todo cerrado de $X \subseteq \mathbb{P}^n$ es cerrado de $\mathbb{P}^n$: podemos asumir $X = \mathbb{P}^n$. Que pr_Y sea cerrada es un enunciado *local* en Y y así, como antes, podemos asumir $Y = \mathbb{A}^m$. Sea $Z \subseteq \mathbb{P}^n \times \mathbb{A}^m$ cerrado Zariski dado por $p_1([x], y) = \dots = p_\ell([x], y) = 0$, homogéneas en $[x] = [x_0, \dots, x_n]$, y veamos que $\text{pr}_Y(Z) \subseteq \mathbb{A}^m$ es cerrado:

Sea $y_0 \notin \text{pr}_Y(Z)$, i.e., los $p_i(x, y_0)$ sólo poseen $0 \in \mathbb{A}^{n+1}$ como cero común. El Nullstellensatz proyectivo implica que

$$(\star) \quad \mathfrak{m}_0^r \subseteq \langle p_1(x, y_0), \dots, p_\ell(x, y_0) \rangle \text{ para cierto } r \in \mathbb{N}^{\geq 1},$$

donde $\mathfrak{m}_0 = \langle x_0, \dots, x_n \rangle$ es el ideal irrelevante.

$\mathfrak{m}_0^r \stackrel{\text{def}}{=} \langle x_0, \dots, x_n \rangle^r$ contiene al k -e.v. $A_r := k[x_0, \dots, x_n]_r$ de polinomios homogéneos de grado r . Luego, $\mathfrak{m}_0^r \subseteq \langle p_1(x, y_0), \dots, p_\ell(x, y_0) \rangle$ implica que

$$\varphi : A_{r-d_1} \oplus \dots \oplus A_{r-d_\ell} \twoheadrightarrow A_r, (q_1, \dots, q_\ell) \mapsto \sum_{i=1}^{\ell} q_i(x) p_i(x, y_0)$$

es una aplicación k -lineal sobreyectiva, con $d_i := \deg_x(p_i)$.

Que φ sea sobreyectiva es una condición **abierta** para la topología de Zariski ($\Leftrightarrow$ el determinante de una submatriz de tamaño maximal sea no-nulo).

Así, $\exists y_0 \in V \subseteq \mathbb{A}^m$ abierto tal que $y \in V$ fijo, el conjunto de soluciones de

$$p_1([x], y) = \dots = p_\ell([x], y) = 0$$

es vacío en $\mathbb{P}^n$, i.e., $y \notin \text{pr}_Y(Z)$: el complemento de $\text{pr}_Y(Z)$ es **abierto**. $\square$

CONSECUENCIAS

Toda “realización” de una variedad proyectiva en $\mathbb{P}^n$ es *siempre cerrada*:

Sea X variedad algebraica proyectiva. Para toda variedad algebraica Y y todo $f : X \rightarrow Y$ morfismo regular, $f(X)$ es un **cerrado** de Y .

Prueba: El grafo $\Gamma_f \stackrel{\text{def}}{=} \{(x, f(x)), x \in X\}$ es la preimagen de $\Delta_Y \subseteq Y \times Y$ por $(f \times \text{Id}_Y) : X \times Y \rightarrow Y \times Y$, $(x, y) \mapsto (f(x), y)$. Como Y **separada**, $\Gamma_f \subseteq X \times Y$ cerrado. Así, $\text{pr}_Y(\Gamma_f) \stackrel{\text{def}}{=} f(X)$ es un cerrado de Y . $\square$

Sea X variedad algebraica proyectiva y sea $f : X \rightarrow k$ función regular. Entonces, $f(X)$ es un **conjunto finito**^a.

^aVeremos más adelante que si X irreducible entonces $\Gamma(X, \mathcal{O}_X) \cong k$.

Prueba: Consideremos $F : X \xrightarrow{f} k = \mathbb{A}^1 \hookrightarrow \mathbb{P}^1$, $x \mapsto [f(x), 1]$. Entonces, $F(X) \subseteq \mathbb{P}^1$ cerrado $\neq \mathbb{P}^1$ (pues $F(X) = f(X) \subseteq \mathbb{A}^1$). Luego, $f(X)$ es un conjunto finito de puntos. $\square$

INCRUSTAMIENTO DE SEGRE

Si bien $\mathbb{A}^n \times \mathbb{A}^m \cong \mathbb{A}^{n+m}$, en $\mathbb{P}^2$ todo par de rectas (i.e., subespacios lineales $\ell \cong \mathbb{P}^1$ de dimensión 1) se intersectan, mientras que en $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ **no** es así.

La variedad $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$ es isomorfa a una variedad algebraica proyectiva

$$\Sigma_{n,m} \subseteq \mathbb{P}^N \text{ donde } N = (n+1)(m+1) - 1 \text{ (**variedad de Segre**)}.$$

Así, producto finito de variedades proyectivas es una variedad proyectiva.

Prueba: Sean $V \cong k^{n+1}$ y $W \cong k^{m+1}$ e.v. con $\mathbb{P}(V) \cong \mathbb{P}^n$ y $\mathbb{P}(W) \cong \mathbb{P}^m$. Entonces, $V \otimes W \cong k^{(n+1)(m+1)}$ y $V \times W \rightarrow V \otimes W$, $(v, w) \mapsto v \otimes w$ induce la **incrustación de Segre**

$$\varphi : \mathbb{P}(V) \times \mathbb{P}(W) \rightarrow \mathbb{P}(V \otimes W) \cong \mathbb{P}^N, ([v], [w]) \mapsto [v \otimes w]$$

donde $N = (n+1)(m+1) - 1 = mn + m + n$.

INCRUSTAMIENTO DE SEGRE

Si elegimos bases $(e_0, \dots, e_n)$ y $(f_0, \dots, f_m)$ de V y W , y escribimos $v = \sum_i x_i e_i$ y $w = \sum_j y_j f_j$, entonces $v \otimes w = \sum_{i,j} x_i y_j e_i \otimes f_j$. En particular,

$$\varphi: \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m \longrightarrow \mathbb{P}^N$$

$$([x_0, \dots, x_n], [y_0, \dots, y_m]) \longmapsto [x_0 y_0, x_0 y_1, \dots, x_i y_j, \dots, x_n y_m]$$

es un morfismo regular. Veamos que $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m \cong \Sigma_{n,m} := \varphi(\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m) \subseteq \mathbb{P}^N$ cerrado: sean $z = \sum_{k,l} z_{kl} e_k \otimes f_l$ coord. homogéneas de $\mathbb{P}(V \otimes W) \cong \mathbb{P}^N$ y sea $W_{ij} = \{[z] \in \mathbb{P}^N \text{ tal que } z_{ij} \neq 0\} \cong \mathbb{A}^N$. Entonces, $\varphi^{-1}(W_{ij}) = U_i \times V_j$ con $U_i = \{[x] \text{ tal que } x_i \neq 0\}$ y $V_j = \{[y] \text{ tal que } y_j \neq 0\}$. Si $i = j = 0$, la restricción $\varphi|_{U_0 \times V_0} : U_0 \times V_0 \rightarrow W_{0,0}$ está dada por

$$([1, x_1, \dots, x_n], [1, y_1, \dots, y_m]) \longmapsto \begin{pmatrix} 1 & x_1 & \cdots & x_n \\ y_1 & x_1 y_1 & \cdots & x_n y_1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_m & x_1 y_m & \cdots & x_n y_m \end{pmatrix}$$

i.e., $U_0 \times V_0 \cong$ **cerrado** de **matrices en $W_{0,0}$ de rango ≤ 1** . El mismo argumento vale para índices (i, j) arbitrarios, y obtenemos un isomorfismo entre $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$ y la subvariedad cerrada $\Sigma_{n,m} \subseteq \mathbb{P}^N$ dada por $\text{rango}(z_{kl}) \leq 1$, i.e., por

$$\det \begin{pmatrix} z_{ik} & z_{il} \\ z_{jk} & z_{jl} \end{pmatrix} = z_{ik} z_{jl} - z_{il} z_{jk} = 0$$

para todos $i, j \in \{0, \dots, m\}$ y $k, l \in \{0, \dots, n\}$. □

SUPERFICIES CUÁDRICAS

La incrustación de Segre

$$\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \hookrightarrow \mathbb{P}^3$$

$$([x_0, x_1], [y_0, y_1]) \mapsto [x_0 y_0, x_0 y_1, x_1 y_0, x_1 y_1]$$

permite identificar $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ con la superficie cuádrica $S \subseteq \mathbb{P}^3$ dada por

$$\det \begin{pmatrix} z_0 & z_1 \\ z_2 & z_3 \end{pmatrix} = z_0 z_3 - z_1 z_2 = 0.$$

Notar además que la forma cuadrática

$$Q : k^4 \longrightarrow k, (z_0, z_1, z_2, z_3) \mapsto z_0 z_3 - z_1 z_2$$

es *no-degenerada*. Más generalmente, si $\text{car}(k) \neq 2$ entonces toda forma cuadrática no-degenerada $Q : k^4 \rightarrow k$ puede ser diagonalizada y luego

$$S = \{[z] \in \mathbb{P}^3 \text{ tal que } Q(z) = 0\} \cong \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1.$$

INCRUSTAMIENTO DE VERONESE

Si $V \cong k^{n+1}$ e.v. y $d \in \mathbb{N}^{\geq 1}$, la d -ésima *potencia simétrica* $S^d V$ es un k -espacio vectorial de dimensión $\dim_k S^d V = \binom{n+d}{d}$. Además,

$(S^d V)^\vee \cong k[X_0, \dots, X_n]_d$ e.v. de polinomios homogéneos de grado d en $n+1$ variables.
Sea $N := \binom{n+d}{d} - 1$. La **incrustación de Veronese** es la aplicación

$$\nu_d : \mathbb{P}(V) \longrightarrow \mathbb{P}(S^d V) \cong \mathbb{P}^N, [v] \longmapsto [\text{ev}_v]$$

donde $\text{ev}_v \in (S^d V^\vee)^\vee \cong S^d V$ asocia a $f \in (S^d V)^\vee$ su valor $\text{ev}_v(f) = f(v)$.

En coordenadas homogéneas tenemos que

$$\nu_d : \mathbb{P}^n \longrightarrow \mathbb{P}^N, [x_0, \dots, x_n] \longmapsto [x_0^d, x_0^{d-1}x_1, \dots, x_n^d]$$

y donde en la fórmula intervienen *todos*¹ los monomios homogéneos de grado d en las variables $x_0, \dots, x_n$.

Como antes, queda como **Ejercicio** verificar que $V_{n,d} := \nu_d(\mathbb{P}^n) \subseteq \mathbb{P}^N$ es un cerrado de Zariski dado por las ecuaciones $z_i z_j = z_k z_l$ con $i+j = k+l$, y que ν_d es un incrustamiento cerrado, i.e., induce $\mathbb{P}^n \cong V_{n,d}$.

¹En ocasiones, conviene escoger un *orden monomial* para agrupar dichos polinomios.

INCRUSTAMIENTO DE VERONESE

Sea $V_{n,d} := \nu_d(\mathbb{P}^n) \subseteq \mathbb{P}^N$ la **variedad de Veronese**. Los ejemplos más emblemáticos son la **cúbica torcida** (o *twisted cubic*) $C \subseteq \mathbb{P}^3$, imagen de $\nu_3 : \mathbb{P}^1 \hookrightarrow \mathbb{P}^3$, $[x, y] \mapsto [x^3, x^2y, xy^2, y^3]$, dada por

$$z_0 z_3 = z_1 z_2, \quad z_1^2 = z_0 z_2, \quad z_2^2 = z_1 z_3,$$

y la **superficie de Veronese** en $\mathbb{P}^5$, imagen de $\nu_2 : \mathbb{P}^2 \hookrightarrow \mathbb{P}^5$, $[x, y, z] \mapsto [x^2, xy, xz, y^2, yz, z^2]$.

Sea $X = V(f) \subseteq \mathbb{P}^n$ hipersuperficie de grado d . Entonces, $X \cong$ intersección de $V_{n,d} \subseteq \mathbb{P}^N$ y un hiperplano $H \cong \mathbb{P}^{N-1}$. Luego, $\mathbb{P}^n \setminus X$ es una variedad algebraica afín.

Prueba: supongamos $f(x_0, \dots, x_n) = \sum_{|\mathbf{k}|=d} a_{\mathbf{k}} x^{\mathbf{k}}$, donde $x^{\mathbf{k}} := x_0^{k_0} \dots x_n^{k_n}$. Si $z_{\mathbf{k}}$ es la coordenada de $\mathbb{P}^N$ correspondiente al monomio $x^{\mathbf{k}}$, entonces $\nu_d(X) \stackrel{\text{def}}{=} \nu_d(\mathbb{P}^n) \cap H \subseteq \mathbb{P}^N$, donde

$$H = \left\{ [z] \in \mathbb{P}^N \text{ tal que } \sum_{|\mathbf{k}|=d} a_{\mathbf{k}} z_{\mathbf{k}} = 0 \right\} \cong \mathbb{P}^{N-1} \text{ hiperplano.}$$

Así, como $\mathbb{P}^n \setminus H \cong \mathbb{A}^n$, tenemos que $\mathbb{P}^n \setminus X$ es isomorfa al cerrado $\nu_d(X) \cap (\mathbb{P}^n \setminus H)$ de $\mathbb{A}^n$, y luego $\mathbb{P}^n \setminus X$ es una variedad algebraica afín. $\square$

Sea $V \cong k^n$ un k -e.v. de dimensión $n \geq 2$ y sea $m \in \{1, \dots, n-1\}$. Definimos

$$\text{Gr}(m, V) := \{W \subseteq V \text{ sub-espacio vectorial tal que } \dim_k(W) = m\},$$

o simplemente $\text{Gr}(m, n)$. Así, tenemos que $\mathbb{P}(V) \stackrel{\text{def}}{=} \text{Gr}(1, V)$. Además:

- 1 Un sub-e.v. $W \cong k^m$ en $V \cong k^n$ corresp. a $\mathbb{P}(W) \cong \mathbb{P}^{m-1}$ subespacio lineal en $\mathbb{P}(V) \cong \mathbb{P}^{n-1}$. Así, $\text{Gr}(m, V)$ es el **conjunto de todos los subespacios lineales $\Lambda \cong \mathbb{P}^{m-1}$ de $\mathbb{P}(V)$** . Escribimos en tal caso

$$\mathbb{G}(m-1, \mathbb{P}(V)) := \{\Lambda \subseteq \mathbb{P}(V) \text{ sub-espacio lineal tal que } \Lambda \cong \mathbb{P}^{m-1}\},$$

o simplemente $\mathbb{G}(m-1, n-1)$.

- 2 Sea $W \subseteq V$ sub-e.v. y consideremos

$$W^\circ = \{f \in V^\vee \text{ tal que } f(w) = 0 \text{ para todo } w \in W\} \subseteq V^\vee.$$

Entonces, $\dim(W) + \dim(W^\circ) = \dim(V) = \dim(V^\vee) = n$ y luego

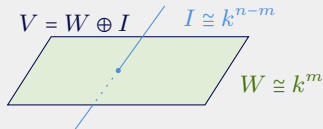
$$\text{Gr}(m, V) \xrightarrow{\sim} \text{Gr}(n-m, V^\vee), [W] \mapsto [W^\circ] \text{ biyección.}$$

INCRUSTAMIENTO DE PLÜCKER

Teorema (Julius PLÜCKER ≈ 1865)

Sea $V \cong k^n$ e.v. y sea $m \in \{1, \dots, n-1\}$. Entonces, $\text{Gr}(m, V)$ es una variedad algebraica proyectiva, llamada **grassmanniana**.

Prueba: construyamos un atlas de $\text{Gr}(m, V)$ por abiertos $U_I \cong \mathbb{A}^{m(n-m)}$. Sea $k^{n-m} \cong I \subseteq V$ sub-e.v. de codimensión n y definamos $U_I := \{[W] \in \text{Gr}(m, V) \text{ tal que } W \cap I = \{0\}\}$.



Explícitamente,

$U_I \xrightarrow{\sim} \{p \in \text{Hom}_k(V, I) \text{ tal que } p|_I = \text{Id}_I\}$,
 $W \mapsto p_W$, con inversa $p \mapsto \ker(p)$. En
coordenadas, $V = W_0 \oplus I$ corresponde a

$$P = \left(\begin{array}{ccc|cc} * & \dots & * & 1 & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \ddots \\ * & \dots & * & 0 & 1 \end{array} \right)$$

y así $U_I \cong \mathbb{A}^{m(n-m)}$.

Los $\{U_I\}_{I \in \text{Gr}(n-m, V)}$ cubren $\text{Gr}(m, V)$ y definen una topología de Zariski, que además es noetheriana. **Cambio de cartas:** sean $I, J \subseteq V$ de dimensión $n-m$; entonces $U_I \cap U_J \subseteq U_I$ corresponde a las proyecciones $p_W : V \rightarrow I$ con $\ker(p_W) \cap J = \{0\}$, i.e., con $p_W|_J : J \xrightarrow{\sim} I$ isomorfismo. Esto es un abierto Zariski de U_I (dado por $\det(M) \neq 0$ para cierta submatriz M), y el cambio de cartas $p \mapsto p' := (p|_J)^{-1} \circ p$ es un isomorfismo birregular (lineal).

INCRUSTAMIENTO DE PLÜCKER

Así, $\text{Gr}(m, V)$ es una variedad algebraica. Veamos que es **proyectiva**:

Recordar que si $V \cong k^n$ e.v. y $d \in \{1, \dots, n\}$, entonces la d -ésima *potencia exterior* $\wedge^d V$ es k -e.v. de $\dim_k(\wedge^d V) = \binom{n}{d}$. Si $(e_1, \dots, e_n)$ base de V entonces $\{e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_d}\}_{1 \leq i_1 < \dots < i_d \leq n}$ es una base de $\wedge^d V$. Definimos

$$\varphi : \text{Gr}(m, V) \longrightarrow \mathbb{P}(\wedge^m V) \cong \mathbb{P}^N, [W] \longmapsto [\wedge^m W] \quad (\text{Plücker})$$

Notar que $(w_1, \dots, w_m)$ base de W , entonces $\wedge^m W$ generada por el *tensor simple* $w_1 \wedge \dots \wedge w_m$ y *toda* recta en $\wedge^m V$ generada por un tensor simple $w_1 \wedge \dots \wedge w_m \neq 0$ define $W := \text{Vect}_k(w_1, \dots, w_m)$ de dimensión m de V , i.e., φ es biyectiva sobre su imagen. Veamos que es un **incrustamiento cerrado**:

φ regular: Fijamos una base de V y representamos $W = \text{Vect}_k(w_1, \dots, w_m)$ en $\text{Gr}(m, V)$ usando filas de una matriz

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ p_{m1} & p_{m2} & \cdots & p_{mn} \end{pmatrix}$$

donde la i -ésima fila corresponde a w_i .

INCRUSTAMIENTO DE PLÜCKER

Luego, $w_1 \wedge \cdots \wedge w_m = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_m \leq n} p_{i_1, \dots, i_m} (e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_m})$ donde $p_{i_1, \dots, i_m} = \det(p_{j, i_\ell})_{1 \leq j, \ell \leq m}$ sub-determinante de la matriz obtenida a partir de las columnas $i_1, \dots, i_m$. Así, φ es regular pues cada $p_{i_1, \dots, i_m}$ lo es².

φ isomorfismo sobre su imagen: Sea $I \in \text{Gr}(n - m, V)$ y $(e_1, \dots, e_n)$ base de V tal que $I = \text{Vect}_k(e_{m+1}, \dots, e_n)$. Sea $W \in U_I$ dado por la matriz

$$P = \left(\begin{array}{ccc|cc} p_{11} & \cdots & p_{1, m-n} & 1 & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \ddots \\ p_{m1} & \cdots & p_{m, m-n} & 0 & 1 \end{array} \right)$$

Notar que cada p_{ij} se obtiene un como sub-determinante $m \times m$ de P , i.e.,

$$\varphi|_{U_I} : U_I \xrightarrow{\sim} \varphi(U_I) \subseteq \mathbb{P}(\bigwedge^m V)$$

es un isomorfismo sobre su imagen para todo I .

²Los $\{p_{i_1, \dots, i_m}\}$ son llamadas **coordenadas de Plücker** de W en $\mathbb{P}(\bigwedge^m V)$.

$G := \varphi(\text{Gr}(m, V)) \subseteq \mathbb{P}(\wedge^m V)$ **cerrado**: sea $v \neq 0$ en V y sea $\omega \neq 0$ en $\wedge^m V$. Completando $e_1 = v$ en una base de V , notamos que $\omega \wedge v = 0$ en $\wedge^{m+1} V$ si y sólo si $\omega = v \wedge \eta$ para cierta $\eta \in \wedge^{m-1} V$.

Inductivamente (**Ejercicio**), $\omega \in \wedge^m V$ es un *tensor simple* (i.e., de la forma $v_1 \wedge \cdots \wedge v_m$) si y sólo si el kernel de

$$\psi_\omega : V \longrightarrow \wedge^{m+1} V, v \longmapsto \omega \wedge v$$

verifica $\dim_k(\ker \psi_\omega) \geq m$, i.e., $\text{rg}(\psi_\omega) \leq n - m$.

Esto último es una condición **cerrada** en $\mathbb{P}(\wedge^m V)$: es la anulación de todos los sub-determinantes $(n - m + 1) \times (n - m + 1)$ de la matriz de ψ_ω . $\square$

El caso $m = 2$ es especialmente interesante³. Por ejemplo (**Ejercicio**):

- ❶ El tensor $\omega \in \wedge^2 V$ es simple si y sólo si $\omega \wedge \omega = 0$ en $\wedge^4 V$.
- ❷ La imagen

$$G := \varphi(\mathrm{Gr}(2, V)) \subseteq \mathbb{P}(\wedge^2 V)$$

está dada por la intersección de hipersuperficies cuádricas.

- ❸ En particular, la grassmanniana $\mathrm{Gr}(2, 4) \cong \mathbb{G}(1, 3)$ de rectas $\ell \cong \mathbb{P}^1$ en $\mathbb{P}^3$ es isomorfa a la **cuádrica de Plücker** en $\mathbb{P}(\wedge^2 k^4) \cong \mathbb{P}^5$ dada por

$$p_{12}p_{34} - p_{13}p_{24} + p_{14}p_{23} = 0.$$

³Ver el artículo “*On the geometry of Grassmannians*” (1977) por Ron Donagi.