

Geometría Algebraica

MAT427 — Clase 6

PEDRO MONTERO

UNIVERSIDAD TÉCNICA FEDERICO SANTA MARÍA
VALPARAÍSO, CHILE

17 DE AGOSTO DE 2026

§2.4 INTRODUCCIÓN A LOS ESQUEMAS

ALEXANDER GROTHENDIECK & EGA

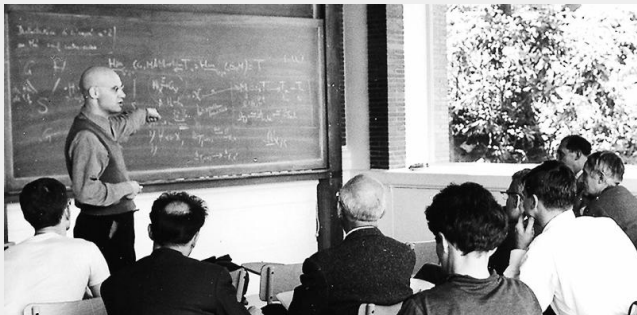


Figure: ALEXANDER GROTHENDIECK en el IHES (Francia).

La teoría de esquemas comienza en 1960, cuando Alexander Grothendieck establece los fundamentos de la geometría algebraica moderna en su serie de obras “*Éléments de Géométrie Algébrique*” (1960–1967, $\approx$ 1500 páginas).

LOCALIZACIÓN DE ANILLOS

Sea A un anillo conmutativo con unidad y $S \subseteq A$ un **conjunto multiplicativo**, i.e., $1 \in S$ y $ss' \in S$ para todos $s, s' \in S$. Definiendo en $A \times S$ la relación de equivalencia

$$(a, s) \sim (a', s') \text{ si y sólo si existe } t \in S \text{ tal que } t(as' - a's) = 0,$$

la **localización** de A respecto a S es el anillo $S^{-1}A := (A \times S)/\sim$, donde $\frac{a}{s}$ denota la clase de (a, s) (donde sumamos y multiplicamos “fracciones” de manera usual).

- 1 Si A es un dominio entero, entonces $S := A \setminus \{0\}$ es multiplicativo y $S^{-1}A := \text{Fr}(A)$ es el **cuerpo de fracciones** de A (e.g. $\text{Fr}(\mathbb{Z}) = \mathbb{Q}$).
- 2 Sea $f \in A$ y $S := \{f^n\}_{n \in \mathbb{N}}$; entonces $S^{-1}A := A_f$ es la **localización de A respecto a f** . Notar que $A_f \neq 0$ si y sólo si f **no** es nilpotente, y que $A_f \cong A[X]/\langle fX - 1 \rangle$. Así, si X es una variedad algebraica afín y $U_f = X \setminus V(f)$ el abierto principal dado por $f \in \mathcal{O}(X)$, entonces $\mathcal{O}_X(U_f) \cong \mathcal{O}(X)_f$.
- 3 Sea $\mathfrak{p} \subseteq A$ un ideal primo, i.e., $S := A \setminus \mathfrak{p}$ multiplicativo. Entonces $S^{-1}A := A_{\mathfrak{p}}$ es la **localización de A en $\mathfrak{p}$** , que es un *anillo local* con único ideal maximal $\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}} \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \frac{a}{s} \text{ con } a \in \mathfrak{p} \text{ y } s \notin \mathfrak{p} \right\}$.

Teorema

Sea k un cuerpo algebraicamente cerrado. Hay una equivalencia entre:

- 1 La categoría $\mathbf{Aff}_{k,\text{red}}$ de variedades algebraicas (reducidas) afines definidas sobre k .
- 2 La categoría $\mathbf{Alg}_{k,\text{red}}$ de k -álgebras conmutativas finitamente generadas y *reducidas* (i.e., sin elementos nilpotentes no-triviales).

Demostración: Dada $X \subseteq \mathbb{A}^n$ variedad algebraica afín, el k -álgebra $\mathcal{O}(X) \cong k[X_1, \dots, X_n]/\mathcal{I}(X)$ es finitamente generada y reducida. Además, cada morfismo $f: X \rightarrow Y$ induce de manera contravariante $f^*: \mathcal{O}(Y) \rightarrow \mathcal{O}(X)$.

Recíprocamente, dada una k -álgebra A en $\mathbf{Alg}_{k,\text{red}}$ consideramos

$$X := \text{Specm}(A) \stackrel{\text{def}}{=} \{\mathfrak{m} \subseteq A \text{ ideal maximal}\}$$

con la *topología de Zariski* obtenida al declarar como cerrados los conjuntos $V(I) := \{\mathfrak{m} \subseteq A \text{ ideal maximal tal que } I \subseteq \mathfrak{m}\}$ para todo $I \subseteq A$ ideal.

DICCIONARIO ENTRE ÁLGEBRA Y GEOMETRÍA

Dado $f \in A \setminus \{0\}$, los abiertos principales

$$U_f := \{\mathfrak{m} \subseteq A \text{ ideal maximal tal que } f \notin \mathfrak{m}\} \stackrel{\text{def}}{=} X \setminus V(f)$$

forman una base de la topología de Zariski, y luego **permiten definir** $\mathcal{O}_X$:

Para cada $f \in A \setminus \{0\}$, $\mathcal{O}_X(U_f) := A_f$ localización respecto a f .

Así, $s \in \mathcal{O}_X(U_f)$ tiene la forma $s = \frac{u}{f^n}$. Como $U_f \cap U_g \stackrel{\text{def}}{=} U_{fg}$, definimos las restricciones mediante

$$\mathcal{O}_X(U_f) \stackrel{\text{def}}{=} A_f \longrightarrow \mathcal{O}_X(U_{fg}) \stackrel{\text{def}}{=} A_{fg}, \quad s = \frac{u}{f^n} \longmapsto \frac{ug^n}{(fg)^n}.$$

Idea de que $\mathcal{O}_X$ es un haz

Un cubrimiento $U_f = \bigcup_{i \in I} U_{g_i}$ equivale a que ningún maximal de A_f contenga a todos los g_i , i.e., a que $\langle \{g_i\}_{i \in I} \rangle = A_f$. Como $V(g_i^{m_i}) \stackrel{\text{def}}{=} V(g_i)$, esto da una *partición de la unidad*

$$(*) \quad \sum_{\text{finita}} v_i g_i^{m_i} = 1 \text{ en } A_f, \quad v_i \in A_f.$$

Dadas $s_i = \frac{u_i}{g_i^{n_i}} \in A_{g_i}$ que coinciden en las intersecciones, $(*)$ con $m_i := n_i + N$ produce *explícitamente* la sección que las pega: $s := \sum_i u_i v_i g_i^N \in A_f$. La **unicidad** es análoga; **ambas cuentas quedan como Ejercicio** (cf. Apunte).

DICCIONARIO ENTRE ÁLGEBRA Y GEOMETRÍA

Para ver que $(X, \mathcal{O}_X)$ variedad algebraica afín consideramos $a_1, \dots, a_n \in A$ generadores como k -álgebra y consideramos

$$\mathcal{O}(\mathbb{A}^n) \stackrel{\text{def}}{=} k[X_1, \dots, X_n] \twoheadrightarrow A, \quad X_i \mapsto a_i$$

con kernel $I \subseteq \mathcal{O}(\mathbb{A}^n)$ tal que $A \cong \mathcal{O}(\mathbb{A}^n)/I$. Como A es *reducida*, I es ideal radical y luego $Y := V(I) \subseteq \mathbb{A}^n$ cumple $\mathcal{I}(Y) \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{I}(V(I)) = \sqrt{I} = I$, y luego $\mathcal{O}(Y) \cong \mathcal{O}(\mathbb{A}^n)/\mathcal{I}(Y) \cong A$. El Nullstellensatz nos da una biyección

$$Y \xrightarrow{\sim} X = \text{Specm}(A), \quad y \mapsto \mathfrak{m}_y = \{f \in \mathcal{O}(Y) \cong A \text{ tal que } f(y) = 0\}.$$

Más aún, para cada $f \in \mathcal{O}(Y) \cong A$ no-nula, se tienen homeomorfismos

$$Y_f := \{y \in Y \text{ tal que } f(y) \neq 0\} \xrightarrow{\sim} U_f \subseteq X,$$

donde además $\mathcal{O}_Y(Y_f) \cong A_f \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{O}_X(U_f)$. Así, $(X, \mathcal{O}_X)$ variedad algebraica afín y luego $\text{Specm} : \mathbf{Alg}_{k, \text{red}} \longrightarrow \mathbf{Aff}_{k, \text{red}}$ equivalencia de categorías. $\square$

ESQUEMAS

La *teoría de esquemas* busca reemplazar la categoría $\mathbf{Alg}_{k,\text{red}}$ por anillos más generales, y obtener (usando “espectros”) nuevos objetos geométricos: los **esquemas**.

Por ejemplo, si A es una k -álgebra finitamente generada no necesariamente reducida (e.g. $A = k[X, Y]/\langle Y^2 \rangle$) entonces

$$X := \text{Specm}(A) = \{\mathfrak{m} \subseteq A \text{ ideal maximal}\}$$

es un **esquema afín** de tipo finito sobre k . Si $A \cong \mathcal{O}(\mathbb{A}^n)/I$ donde I es un ideal (no necesariamente radical) entonces X es homeomorfo a $V(I) := X_{\text{red}} \subseteq \mathbb{A}^n$. Sin embargo, $\mathcal{O}_X(U_f) := A_f$ **puede tener elementos nilpotentes**.

Teorema

Sea k un cuerpo algebraicamente cerrado. Hay una equivalencia entre:

- 1 La categoría $\mathbf{Aff}_k$ de esquemas afines (de tipo finito) sobre k .
- 2 La categoría $\mathbf{Alg}_k$ de k -álgebras conmutativas finitamente generadas.

EJEMPLOS DE ESQUEMAS

- ① Un punto $x \in X \subseteq \mathbb{A}^n$ en una variedad algebraica afín es un morfismo

$$\begin{aligned}\varphi_x : \operatorname{Specm}(k) &\hookrightarrow \operatorname{Specm}(\mathcal{O}(X)) \\ \{*\} &\longmapsto x\end{aligned}$$

Así, podemos pensar puntos de mayor multiplicidad como morfismos

$$\begin{aligned}\varphi_{x_m} : \operatorname{Specm}(k[X]/\langle X^m \rangle) &\hookrightarrow \operatorname{Specm}(\mathcal{O}(X)) \\ \{*\} &\longmapsto x\end{aligned}$$

Por ejemplo, si $D := k[\varepsilon]/\langle \varepsilon^2 \rangle$ con $a + \varepsilon b \in D$ son tales que $a, b \in k$ y $\varepsilon^2 = 0$, el espacio tangente $T_{X,x}$ de X en $x \in X$ puede pensarse como el conjunto de morfismos

$$\begin{aligned}\operatorname{Specm}(k[\varepsilon]/\langle \varepsilon^2 \rangle) &\hookrightarrow \operatorname{Specm}(\mathcal{O}(X)) \\ \{*\} &\longmapsto x\end{aligned}$$

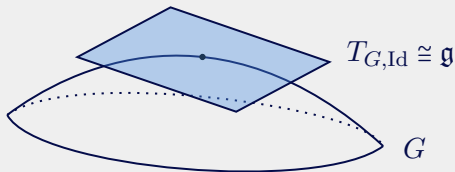
lo cual se traduce en resolver las ecuaciones de X en D en lugar de k .

EJEMPLOS DE ESQUEMAS

- ② Consideremos la variedad algebraica afín dada por el **grupo ortogonal**

$$X := O_n(\mathbb{R}) \stackrel{\text{def}}{=} \{A \in M_n(\mathbb{R}) \cong \mathbb{A}^{n^2} \text{ tales que } {}^tAA = I_n\} \subseteq \mathbb{A}^{n^2},$$

y sea $A \in X$. Entonces, tenemos que $A + \varepsilon B \in O_n(\mathbb{R}[\varepsilon]/\langle \varepsilon^2 \rangle)$ si y sólo si ${}^t(A + \varepsilon B)(A + \varepsilon B) = I_n$, i.e., ${}^tAA + \varepsilon({}^tBA + {}^tAB) + \varepsilon^2 {}^tBB = I_n$, de donde deducimos que $T_{X,A} \cong \{B \in M_n(\mathbb{R}) \text{ tal que } {}^tBA = -{}^tAB\}$.

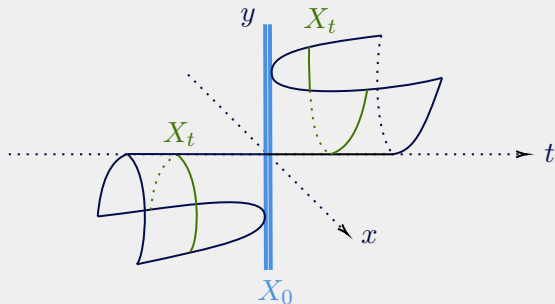


$$\mathfrak{g} := T_{O_n(\mathbb{R}), I_n} \cong \{B \in M_n(\mathbb{R}) \text{ tal que } {}^tB = -B\}.$$

EJEMPLOS DE ESQUEMAS

- ③ Consideremos $X = \{(x, y, t) \in \mathbb{A}^3 \text{ tal que } yt = x^2\}$ y definamos $\varphi : X \rightarrow \mathbb{A}^1, (x, y, t) \mapsto t$. Para cada $t \in \mathbb{A}^1$ definimos la **fibra esquemática** de φ en t como el sub-esquema afín dado por

$$X_t := \text{Specm}(k[X, Y]/\langle Yt - X^2 \rangle).$$



Para $t \neq 0$ se tiene que X_t sub-variedad afín reducida (parábola), mientras que X_0 es un esquema afín no-reducido (recta doble).

ESQUEMAS MÁS GENERALES



Figure: ALEXANDER GROTHENDIECK y LAURENT SCHWARTZ.

Para un **anillo arbitrario** A se define $\text{Spec}(A) := \{\mathfrak{p} \subseteq A \text{ ideal primo}\}$, con la topología de Zariski con cerrados $V(I) := \{\mathfrak{p} \subseteq A \text{ ideal primo tal que } I \subseteq \mathfrak{p}\}$.

$$\text{Spec}(\mathbb{Z}) = \langle 0 \rangle \cup \{\langle p \rangle \text{ con } p \text{ número primo}\}.$$

Aquí, $\overline{\langle p \rangle}^{\text{Zar}} = \langle p \rangle$ punto *cerrado* y $\overline{\langle 0 \rangle}^{\text{Zar}} = \text{Spec}(\mathbb{Z})$ punto *denso*.



§2.5 ATLAS ALGEBRAICOS

PEGADO DE ESPACIOS ANILLADOS

Análogamente al caso clásico de variedades diferenciables, tenemos:

Teorema (Pegado de espacios anillados)

Sea X un espacio topológico. Consideremos dado:

- 1 Un cubrimiento abierto $\{U_i\}_{i \in I}$ de X .
- 2 Para cada $i \in I$, un haz de k -álgebras $\mathcal{A}_i$ en U_i .
- 3 Para todos $i, j \in I$, un isomorfismo de haces

$$\varphi_{ji} : \mathcal{A}_i|_{U_i \cap U_j} \xrightarrow{\sim} \mathcal{A}_j|_{U_i \cap U_j} \text{ que verifica}$$

- (a) $\varphi_{ii} = \text{Id}_{\mathcal{A}_i}$ para todo $i \in I$.
- (b) Para todos $i, j, k \in I$ se tiene que $\varphi_{ki} = \varphi_{kj} \circ \varphi_{ji}$ en $U_i \cap U_j \cap U_k$.

Entonces, $\exists!$ haz de k -álgebras $\mathcal{A}$ en X junto con isomorfismos

$$\varphi_i : \mathcal{A}|_{U_i} \xrightarrow{\sim} \mathcal{A}_i \text{ en } U_i,$$

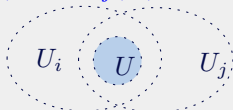
tales que $\varphi_{ji} = \varphi_j \circ \varphi_i^{-1}$ en $U_i \cap U_j$.

PEGADO DE ESPACIOS ANILLADOS

Los abiertos $U \subseteq X$ contenidos en alguno de los U_i forman una base de abiertos para la topología de X . Para un tal abierto $U \subseteq X$, definimos

$$\mathcal{A}(U) := \left(\coprod_{\substack{i \in I \\ U \subseteq U_i}} \mathcal{A}_i(U) \right) / \sim$$

con $(s, U_i) \sim (t, U_j)$, $s \in \mathcal{A}_i(U)$ y $t \in \mathcal{A}_j(U)$, si $t = \varphi_{ji}(s)$ en $\mathcal{A}_j|_{U_i \cap U_j}(U)$.



(a) y (b) aseguran que $\sim$ es relación de equivalencia, y en el cociente definimos una estructura de haz de k -álgebras de tal suerte que $\mathcal{A}_i(U) \rightarrow \mathcal{A}(U)$, $s \mapsto [s]$ sea un isomorfismo. Que los $\mathcal{A}_i$ sean haces implica que $\mathcal{A}$ es un haz, y que es único. $\square$

Ejemplo fundamental: pegado de variedades algebraicas

Si X es noetheriano y cada $(U_i, \mathcal{A}_i)$ es una variedad algebraica (**arbitraria, no necesariamente afín**), entonces $(X, \mathcal{A})$ es una variedad algebraica: podemos **pegar** variedades algebraicas si las funciones regulares son compatibles.

Sea X espacio topológico noetheriano. Un **atlas algebraico** en X consiste en un cubrimiento abierto $X = \bigcup_{i \in I} U_i$ y una colección de homeomorfismos

$$\alpha_i : U_i \xrightarrow{\sim} V_i$$

llamados **cartas locales**, donde $(V_i, \mathcal{O}_{V_i})$ variedad algebraica $\forall i \in I$ y donde:

Si denotamos por $V_{ij} \subseteq V_i$ a la imagen de $U_i \cap U_j \subseteq U_i$ por α_i , entonces para todos $i, j \in I$ se tiene un isomorfismo regular

$$\psi_{ji} := \alpha_j \circ \alpha_i^{-1} : V_{ij} \xrightarrow{\sim} V_{ji}$$

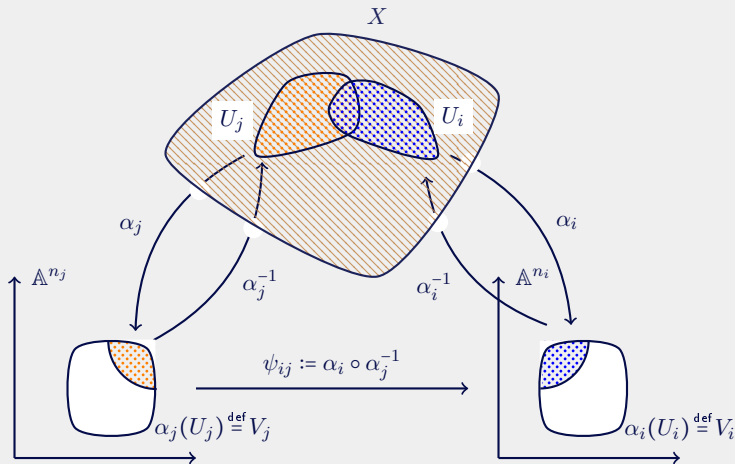
entre las variedades V_{ij} y V_{ji} , llamado cambio de cartas.

El espacio anillado $(X, \mathcal{O}_X)$ obtenido al pegar los haces estructurales de cada abierto U_i es la **variedad algebraica asociada al atlas algebraico**.

En particular, dada otra variedad algebraica Y , una función $f : X \rightarrow Y$ es regular si y sólo si cada restricción $f_i := f|_{U_i} : U_i \rightarrow Y$ es regular (i.e., la aplicación $f_i \circ \alpha_i^{-1} : V_i \rightarrow Y$ es regular) para todo $i \in I$.

EJEMPLO

En el caso en que el espacio topológico noetheriano X puede ser cubierto por abiertos *afines* U_i , la noción de atlas algebraico permite extender al contexto de la geometría algebraica la construcción de variedades diferenciables.



RECTA PROYECTIVA

Sean $[x, y]$ coordenadas homogéneas en $\mathbb{P}^1 \stackrel{\text{def}}{=} (\mathbb{A}^2 \setminus \{0\})/\mathbb{G}_m$ y sean:

$$U_0 := \{[x, y] \in \mathbb{P}^1 \text{ tal que } x \neq 0\} \text{ y } U_1 := \{[x, y] \in \mathbb{P}^1 \text{ tal que } y \neq 0\}.$$

Consideremos cartas locales dadas por

$$\alpha_0 : U_0 \xrightarrow{\sim} V_0 := \mathbb{A}^1, [x, y] \mapsto \frac{y}{x} \text{ y por } \alpha_1 : U_1 \xrightarrow{\sim} V_1 := \mathbb{A}^1, [x, y] \mapsto \frac{x}{y}.$$

Notar que $\alpha_0(U_0 \cap U_1) = \alpha_1(U_0 \cap U_1) = \mathbb{A}^1 \setminus \{0\}$. Más aún, si z es una coordenada en $\mathbb{A}^1 \setminus \{0\}$, entonces $\psi_{01} := \alpha_1 \circ \alpha_0^{-1}$ está dada por

$$\psi_{01}(z) = \frac{1}{z} \text{ morfismo birreglar.}$$

Lo anterior se extiende a $\mathbb{P}^n$ (**Ejercicio**) considerando las cartas locales en los **abiertos estándar** $U_i := \{[x_0, \dots, x_n] \in \mathbb{P}^n \text{ tal que } x_i \neq 0\}$

$$\alpha_i : U_i \xrightarrow{\sim} \mathbb{A}^n, [x_0, \dots, x_n] \mapsto \left(\frac{x_0}{x_i}, \dots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \dots, \frac{x_n}{x_i} \right).$$