

Geometría Algebraica

MAT427 — Clase 5

PEDRO MONTERO

UNIVERSIDAD TÉCNICA FEDERICO SANTA MARÍA
VALPARAÍSO, CHILE

17 DE AGOSTO DE 2026

§2.2 FUNCIONES REGULARES Y MORFISMOS

MORFISMOS REGULARES

La noción de función regular se extiende naturalmente:

Definición (morfismo regular)

Sean $X \subseteq \mathbb{A}^n$, $Y \subseteq \mathbb{A}^m$ subvariedades afines. Una función $f : X \rightarrow Y$ es un **morfismo regular** si $f = F|_X$ con $F : \mathbb{A}^n \rightarrow \mathbb{A}^m$ polinomial con $F(X) \subseteq Y$.

Un morfismo regular $f : X \rightarrow Y$ es un **isomorfismo** (o un **morfismo birregular**) si f es biyectiva y $f^{-1} : Y \rightarrow X$ es regular. Escribimos $X \cong Y$.

Relación con funciones regulares

Por definición, $\mathcal{O}(X) = \{f : X \rightarrow \mathbb{A}^1 \text{ morfismo regular}\}$. De manera más general, si $f : X \rightarrow Y$ morfismo regular, el **pullback** de f es

$$f^* : \mathcal{O}(Y) \rightarrow \mathcal{O}(X), \varphi \mapsto \varphi \circ f \quad \text{morfismo de } k\text{-álgebras.}$$

EJEMPLOS

- ❶ Toda $f : \mathbb{A}^n \rightarrow \mathbb{A}^m$, $x \mapsto (f_1(x), \dots, f_m(x))$ polinomial es regular.
- ❷ Todo morfismo regular es continuo para la topología de Zariski.
- ❸ Supongamos que $\text{car}(k) = p > 0$ (e.g. $k = \overline{\mathbb{F}}_p$). La función

$$\text{Fr} : \mathbb{A}^1 \longrightarrow \mathbb{A}^1, x \longmapsto x^p$$

El morfismo de k -álgebras asociado está dado por

$$\text{Fr}^* : k[X] \longrightarrow k[X], X \longmapsto X^p.$$

- ❹ **Ejercicio:** Sea $C \subseteq \mathbb{A}^2$ la parábola dada por

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{A}^2 \text{ tal que } y = x^2\}.$$

Probar que $\mathcal{I}(C) = \langle X^2 - Y \rangle \subseteq \mathcal{O}(\mathbb{A}^2) = k[X, Y]$ y que C es irreducible. Probar que las funciones $f : C \rightarrow \mathbb{A}^1$, $(x, y) \mapsto x$ y $g : \mathbb{A}^1 \rightarrow C$, $t \mapsto (t, t^2)$ son morfismos regulares e inversas una de la otra, y así $C \cong \mathbb{A}^1$. Finalmente, describir el pullback de f

$$f^* : \mathcal{O}(\mathbb{A}^1) \rightarrow \mathcal{O}(C).$$

DICCIONARIO ENTRE ÁLGEBRA Y GEOMETRÍA

Sean $X \subseteq \mathbb{A}^n$, $Y \subseteq \mathbb{A}^m$ subvariedades afines. Hay una biyección

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{Morfismos regulares} \\ f : X \longrightarrow Y \end{array} \right\} \xrightarrow{\sim} \left\{ \begin{array}{c} \text{Morfismos de } k\text{-álgebras} \\ \varphi : \mathcal{O}(Y) \longrightarrow \mathcal{O}(X) \end{array} \right\}, \quad f \longmapsto f^*$$

Luego, $X \cong Y$ isomorfas $\Leftrightarrow \mathcal{O}(X) \cong \mathcal{O}(Y)$ isomorfas como k -álgebras.

Inyectividad: Si $(y_1, \dots, y_m)$ son coord. en $\mathbb{A}^m$, con $y_i := y_i|_Y \in \mathcal{O}(Y)$ y si $f = (f_1, \dots, f_m)$, entonces $f^*(y_i) \stackrel{\text{def}}{=} y_i \circ f \stackrel{\text{def}}{=} f_i$, i.e., f^* determina f .

Sobreyectividad: Sea $\varphi : \mathcal{O}(Y) \rightarrow \mathcal{O}(X)$ morfismo de k -álgebras, y $\varphi_i := \varphi(y_i) \in \mathcal{O}(X)$. Entonces, definimos $f : X \rightarrow \mathbb{A}^m$, $x \mapsto (\varphi_1(x), \dots, \varphi_m(x))$ y debemos verificar que $f(X) \subseteq Y$: Sea $g \in \mathcal{I}(Y)$, como $g|_Y \equiv 0$ entonces

$$g(f(x)) \stackrel{\text{def}}{=} g(\varphi(y_1)(x), \dots, \varphi(y_m)(x)) \stackrel{\text{def}}{=} \varphi(g(y_1, \dots, y_m))(x) \equiv 0$$

Así, $g(f(x)) = 0 \ \forall g \in \mathcal{I}(Y)$, i.e., $f(x) \in V(\mathcal{I}(Y)) \stackrel{\text{def}}{=} Y$, y $f^* \stackrel{\text{def}}{=} \varphi$. □

§2.3 VARIEDADES ALGEBRAICAS

VARIEDADES ALGEBRAICAS AFINES

Sea k un cuerpo algebraicamente cerrado.

Definición (variedad algebraica afín)

Una **variedad algebraica afín** sobre k es un espacio anillado $(X, \mathcal{O}_X)$ que es isomorfo a un *cerrado* de Zariski de un espacio afín, junto con su haz de funciones regulares.

El haz estructural $\mathcal{O}_X$ se omite si es claro en el contexto. El tallo $\mathcal{O}_{X,x}$ de gérmenes de funciones regulares en $x \in X$ es una k -álgebra **local**, i.e., posee un único ideal maximal dado por

$$\mathfrak{m}_x := \{f \in \mathcal{O}_{X,x} \text{ tal que } f(x) = 0\}.$$

En efecto, todo germen fuera de $\mathfrak{m}_x$ es invertible. Más aún, el morfismo

$$\text{ev}_x : \mathcal{O}_{X,x} \twoheadrightarrow k, \quad f \longmapsto f(x)$$

induce un isomorfismo $\mathcal{O}_{X,x}/\mathfrak{m}_x \cong k$ para todo $x \in X$.

Definición (variedad algebraica)

Una **variedad algebraica** (reducida) sobre k es un espacio anillado $(X, \mathcal{O}_X)$ tal que:

- 1 X es un espacio topológico noetheriano.
- 2 Todo punto de X admite una vecindad abierta $U \subseteq X$ tal que $(U, \mathcal{O}_U)$, con $\mathcal{O}_U \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{O}_X|_U$, es una variedad algebraica afín. Decimos que $U \subseteq X$ es un **abierto afín**.

Un **morfismo** de variedades algebraicas $(X, \mathcal{O}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{O}_Y)$ es un morfismo entre los espacios anillados subyacentes.

Sean X e Y variedades algebraicas. Una función continua $f : X \rightarrow Y$ es un **morfismo regular** si

para toda $u \in \mathcal{O}_Y(V)$ definida sobre un abierto $V \subseteq Y$, el pullback $f^(u) := u \circ f$ es regular en $f^{-1}(V) \subseteq X$, i.e., $f^*(u) \in f_*\mathcal{O}_X(V) \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{O}_X(f^{-1}(V))$.*

Luego, f define un morfismo de haces en k -álgebras $f^* : \mathcal{O}_Y \rightarrow f_*\mathcal{O}_X$, y por ende un morfismo de espacios anillados $(f, f^*) : (X, \mathcal{O}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{O}_Y)$.

TODO MORFISMO ENTRE VARIEDADES ALGEBRAICAS ES REGULAR

Teorema

Sean X, Y variedades algebraicas y $(f, \varphi) : (X, \mathcal{O}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{O}_Y)$ un morfismo de espacios anillados, con f continua y $\varphi : \mathcal{O}_Y \rightarrow f_*\mathcal{O}_X$ morfismo de haces en k -álgebras. Entonces, f es un morfismo regular y además $\varphi = f^*$.

Idea de prueba: el enunciado es local, por lo que podemos asumir X, Y afines, con $A = \mathcal{O}(X)$, $B = \mathcal{O}(Y)$ y $\varphi : B \rightarrow A$. Sea $x \in X$ con ideal maximal $\mathfrak{m}_x \subseteq A$: el ideal $\eta := \varphi^{-1}(\mathfrak{m}_x) \subseteq B$ es primo y $B/\eta \hookrightarrow A/\mathfrak{m}_x \cong k$ es un isomorfismo, i.e., $\eta = \eta_y$ es el ideal maximal asociado a $y \stackrel{\text{def}}{=} f(x) \in Y$. Luego, para toda $u \in B \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{O}(Y)$:

$$\begin{array}{ccc}
 u \in B & \xrightarrow{\varphi} & A \ni \varphi(u) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 u_y \in \mathcal{O}_{Y,y} & & \mathcal{O}_{X,x} \ni \varphi(u)_x \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 u(y) \in \mathcal{O}_{Y,y}/\eta_y \cong k & \xrightarrow{\text{Id}_k} & k \cong \mathcal{O}_{X,x}/\mathfrak{m}_x \ni \varphi(u)(x)
 \end{array}$$

Luego, $(f^*(u))(x) \stackrel{\text{def}}{=} u(f(x)) \stackrel{\text{def}}{=} u(y) = \varphi(u)(x)$ para todo $x \in X$, i.e., $\varphi = f^*$ en B y f es un morfismo regular. $\square$

SUBVARIEDADES ALGEBRAICAS: ABIERTOS

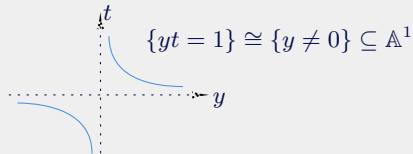
Sea X una variedad algebraica. Entonces, todo abierto y todo cerrado de X posee una estructura inducida de variedad algebraica.

Abiertos: sea $U \subseteq X$ abierto no-vacío, con $\mathcal{O}_U \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{O}_X|_U$. Como U es noetheriano, basta cubrirlo por abiertos afines (i.e., isomorfos a **cerrados** de Zariski en algún espacio afín). Si $X = \bigcup_{i \in I} U_i$ con U_i afín, entonces $U = \bigcup_{i \in I} V_i$ con $V_i := U \cap U_i$ abierto en una variedad afín $U_i =: Y \subseteq \mathbb{A}^n$. Escribiendo $Y \setminus V = Y \cap V(f_1, \dots, f_m)$ obtenemos $V = \bigcup_{i=1}^m U_{f_i}$, con $U_{f_i} := Y \setminus V(f_i) \stackrel{\text{def}}{=} \{y \in Y \text{ tal que } f_i(y) \neq 0\}$.

En $\mathbb{A}^{n+1}$ con coordenadas (y, t) consideramos el cerrado Zariski

$$W_i := \{(y, t) \text{ tal que } y \in Y, f_i(y)t = 1\},$$

y notamos que $W_i \rightarrow U_{f_i}$, $(y, t) \mapsto y$ es un morfismo regular biyectivo con inversa regular $y \mapsto (y, \frac{1}{f_i(y)})$. Luego, $(U, \mathcal{O}_U)$ es una variedad algebraica.



Si X variedad algebraica afín y $f \in \mathcal{O}(X)$, los **abiertos principales**

$U_f := \{x \in X \text{ tal que } f(x) \neq 0\}$ son abiertos afines, y forman una base de la topología.

- **Cerrados:** Sea $Y \subseteq X$ cerrado no-vacío, y luego noetheriano. Notar que si $Y \subseteq X \subseteq \mathbb{A}^n$ subvariedades afines, Y determinada por el **ideal**

$$\mathcal{I}_X(Y) := \mathcal{I}(Y)/\mathcal{I}(X) \text{ en el cociente } \mathcal{O}(X) \cong \mathcal{O}(\mathbb{A}^n)/\mathcal{I}(X).$$

La idea general será ver Y como un cerrado dentro de un abierto afín:

Sea $\mathcal{I}_Y \subseteq \mathcal{O}_X$ el haz de ideales de funciones que se anulan en Y , i.e.,

$$\mathcal{I}_Y(U) := \{f \in \mathcal{O}_X(U) \text{ tal que } f(x) = 0 \text{ para todo } x \in U \cap Y\},$$

entonces definimos¹ $\mathcal{O}_Y := (\mathcal{O}_X/\mathcal{I}_Y)|_Y$, y $(Y, \mathcal{O}_Y)$ espacio anillado.

Si $X = \bigcup_{i \in I} U_i$ cubrimiento afín, $Y = \bigcup_{i \in I} Z_i$ con $Z_i := Y \cap U_i$

cerrado en la variedad algebraica afín U_i . Notamos que si

$Z \subseteq X \subseteq \mathbb{A}^n$ son subvariedades afines entonces $\mathcal{O}_X|_Z \cong \mathcal{O}_Z$

(**restricción de polinomios!**), y luego $\mathcal{O}_Y|_{Z_i} \cong \mathcal{O}_{Z_i}$. Así, $(Y, \mathcal{O}_Y)$ es una variedad algebraica. □

¹A diferencia de $\mathcal{O}_X|_Y$, el haz $(\mathcal{O}_X/\mathcal{I}_Y)|_Y$ tiene la ventaja de que sus secciones pueden ser vistas como funciones regulares en Y , y no en una *vecindad* abierta de Y .

VARIEDADES QUASI-AFINES

Una **variedad quasi-afín** es un abierto de una variedad algebraica afín. En general, una variedad quasi-afín **no** es una variedad afín:

Sea $X = \mathbb{A}^2 \setminus \{(0,0)\}$ variedad algebraica con cubrimiento afín

$$U \cup V = \{(x,y) \in \mathbb{A}^2 \text{ tal que } x \neq 0\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{A}^2 \text{ tal que } y \neq 0\},$$

entonces $\Gamma(X, \mathcal{O}_X) \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{O}_X(X) \cong \mathcal{O}(\mathbb{A}^2)$. En efecto, $f \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ se escribe

$$f = \frac{P}{X^n} = \frac{Q}{Y^m}$$

con $P, Q \in \mathcal{O}(\mathbb{A}^2)$, y así $P \cdot Y^m = Q \cdot X^n$. Luego, Y^m divide a Q y X^n divide a P , i.e., $f \in \mathcal{O}(\mathbb{A}^2)$.

Si X fuese afín, entonces habría una biyección (Nullstellensatz) entre puntos de X e ideales maximales de $\mathcal{O}(X) \cong \mathcal{O}(\mathbb{A}^2)$. Sin embargo, $\mathfrak{m}_{(0,0)} \subseteq \mathcal{O}(\mathbb{A}^2) \cong \mathcal{O}(X)$, pero $(0,0) \notin X$. Así, **X no es variedad algebraica afín.**

ESPACIO PROYECTIVO

Consideremos la siguiente relación de equivalencia en el conjunto $k^{n+1} \setminus \{0\}$:

Dos vectores $x, y \in k^{n+1}$ no-nulos son equivalentes si y sólo si son colineales, i.e., si existe $\lambda \in k^$ tal que $y = \lambda x$.*

El cociente es el **espacio proyectivo de dimension n** sobre k , y se denota $\mathbb{P}^n(k)$ (o $\mathbb{P}^n$). La clase de $x = (x_0, \dots, x_n) \in k^{n+1} \setminus \{0\}$ en $\mathbb{P}^n$ se denota

$$[x_0, \dots, x_n] \in \mathbb{P}^n$$

y se dice que $x_0, \dots, x_n$ son “*las*” **coordenadas homogéneas** de $[x] \in \mathbb{P}^n$ (¡a pesar que están definidas módulo multiplicación por $\lambda \in k^*$!).

Sea X espacio topológico y $\sim$ relación de equivalencia en X . Si $Y := X / \sim$ conjunto cociente y $\pi : X \twoheadrightarrow Y$, $x \mapsto [x]$ proyección canónica, la **topología cociente** en Y se obtiene declarando como **abiertos de Y** los subconjuntos

$V \subseteq Y$ tales que $\pi^{-1}(V) \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in X \text{ tal que } [x] \in V\}$ es un abierto en X .

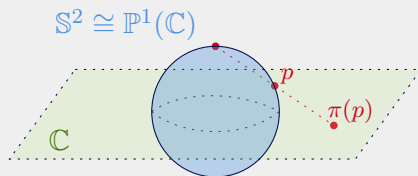
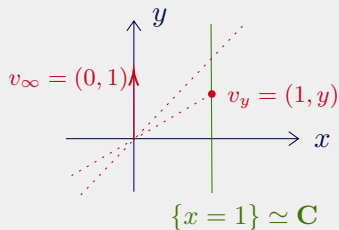
ESPACIO PROYECTIVO

Más generalmente, si V es un k -espacio vectorial no-nulo, se define el espacio proyectivo asociado a V , también llamado la **proyektivización de V** como

$$\mathbb{P}(V) := \{\ell \subseteq V \text{ sub-espacio vectorial tal que } \dim_k(\ell) = 1\}.$$

Notar que si $W \subseteq V$ sub-espacio vectorial no-nulo, entonces $\mathbb{P}(W) \subseteq \mathbb{P}(V)$.

Ejemplo: Notar que $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{P}(\mathbb{C}^2) \simeq \mathbb{C} \cup \{\infty\} \simeq \mathbb{S}^2$.



$\mathbb{P}^n$ COMO VARIEDAD ALGEBRAICA

El **grupo multiplicativo** $\mathbb{G}_m := (k^*, \times)$ actúa en $\mathbb{A}^{n+1} \setminus \{0\}$ por

$$\lambda \cdot (x_0, \dots, x_n) = (\lambda x_0, \dots, \lambda x_n) \text{ para todo } \lambda \in \mathbb{G}_m.$$

Así, $\pi : \mathbb{A}^{n+1} \setminus \{0\} \twoheadrightarrow \mathbb{P}^n \stackrel{\text{def}}{=} (\mathbb{A}^{n+1} \setminus \{0\}) / \mathbb{G}_m$, $(x_0, \dots, x_n) \mapsto [x_0, \dots, x_n]$.
Dotamos a $\mathbb{P}^n$ de la topología de Zariski (cociente). Más aún, definimos

$$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n} := \pi_*((\mathcal{O}_{\mathbb{A}^{n+1} \setminus \{0\}})^{\mathbb{G}_m}),$$

i.e., $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n} = \pi_*(\mathcal{F})$ es la imagen directa por π del sub-haz $\mathcal{F} \stackrel{\text{def}}{=} (\mathcal{O}_{\mathbb{A}^{n+1} \setminus \{0\}})^{\mathbb{G}_m}$ de $\mathcal{O}_{\mathbb{A}^{n+1} \setminus \{0\}}$ dado por las funciones regulares que son $\mathbb{G}_m$ -invariantes.

Concretamente, una sección (local) de $\mathcal{O}_{\mathbb{A}^{n+1} \setminus \{0\}}$ es una función racional $u(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ donde $P, Q \in \mathcal{O}(\mathbb{A}^{n+1})$. Las secciones $\mathbb{G}_m$ -invariantes cumplen

$$u(\lambda x) = u(x), \text{ i.e., } \frac{P(\lambda x)}{Q(\lambda x)} = \frac{P(x)}{Q(x)}.$$

Esto equivale a $P(\lambda x) = \lambda^d P(x)$ y $Q(\lambda x) = \lambda^d Q(x)$ para cierto $d \in \mathbb{N}$.
Así, una sección local de $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}$ es una función racional dada por el cociente de dos *polinomios homogéneos del mismo grado*.

$\mathbb{P}^n$ COMO VARIEDAD ALGEBRAICA

El espacio anillado $(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n})$ es una variedad algebraica: sea $A_i := \{x \in \mathbb{A}^{n+1} \text{ tal que } x_i = 1\} \cong \mathbb{A}^n$ subespacio afín, y sea $U_i := \{[x] \in \mathbb{P}^n \text{ tal que } x_i \neq 0\}$ abierto Zariski con $\pi(A_i) \stackrel{\text{def}}{=} U_i$. La aplicación

$$\varphi_i([x_0, \dots, x_n]) := \frac{x}{x_i} \stackrel{\text{def}}{=} \left(\frac{x_0}{x_i}, \dots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, 1, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \dots, \frac{x_n}{x_i} \right)$$

está bien definida y da un homeomorfismo $\varphi_i : U_i \xrightarrow{\sim} A_i$ (de inversa $\pi|_{A_i}$). Más aún, si $V \subseteq A_i$ es abierto Zariski y $f \in \mathcal{O}_{A_i}(V)$, entonces $\varphi_i^*(f) \stackrel{\text{def}}{=} f \circ \varphi_i$ es regular en $\varphi_i^{-1}(V)$, y obtenemos un isomorfismo $\varphi_i^* : \mathcal{O}_{A_i} \xrightarrow{\sim} (\varphi_i)_*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}|_{U_i})$ dado por

$$\begin{aligned} (\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}|_{U_i})(\varphi_i^{-1}(V)) &\cong \mathcal{O}_{A_i}(V) \\ \frac{P(x_0, \dots, x_n)}{Q(x_0, \dots, x_n)} &\xrightarrow{(\varphi_i^*)^{-1}} \frac{P(x_0, \dots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \dots, x_n)}{Q(x_0, \dots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \dots, x_n)} \\ \varphi_i^*(f) &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{A\left(\frac{x_0}{x_i}, \dots, \frac{x_n}{x_i}\right)}{B\left(\frac{x_0}{x_i}, \dots, \frac{x_n}{x_i}\right)} \xleftarrow{\varphi_i^*} f = \frac{A(x_0, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n)}{B(x_0, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n)} \end{aligned}$$

Luego, $(\varphi_i, \varphi_i^*) : (U_i, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}|_{U_i}) \xrightarrow{\sim} (A_i, \mathcal{O}_{A_i})$ es un isomorfismo de espacios anillados para cada $i \in \{0, \dots, n\}$, y luego $(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n})$ es una variedad algebraica. $\square$

Ejercicio importante: probar que $\Gamma(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}) \cong k$. Notar que $f : \mathbb{P}^n \rightarrow k$ regular se restringe a cada $U_i \subseteq \mathbb{P}^n$, y deducir que debe ser **constante**.