

Geometría Algebraica

MAT427 — Clase 4

PEDRO MONTERO

UNIVERSIDAD TÉCNICA FEDERICO SANTA MARÍA
VALPARAÍSO, CHILE

10 DE AGOSTO DE 2026

§2.1 VARIEDADES ALGEBRAICAS AFINES Y TOPOLOGÍA DE ZARISKI

Sea k un cuerpo. Dotaremos al conjunto

$$k^n \stackrel{\text{def}}{=} \{(x_1, \dots, x_n) \text{ donde } x_i \in k \text{ para todo } i \in \{1, \dots, n\}\}$$

de una topología, llamada la **topología de Zariski**, que permitirá definir un haz de k -álgebras llamado el *haz de funciones regulares*. Así, el espacio anillado correspondiente se llamará el **espacio afín**, y será denotado $\mathbb{A}^n$.

Notación: En todo lo que sigue, denotamos $\mathcal{O}(\mathbb{A}^n) := k[X_1, \dots, X_n]$.

Definición (subvariedad afín)

Sea $S \subseteq \mathcal{O}(\mathbb{A}^n)$ subconjunto. El conjunto

$$V(S) := \{(x_1, \dots, x_n) \in k^n \text{ tal que } f(x_1, \dots, x_n) = 0 \text{ para todo } f \in S\}$$

es llamado una **subvariedad afín** de k^n .

EJEMPLOS

- 1 $V(1) = \emptyset$ y $V(\emptyset) = V(0) = k^n$ son subvariedades afines.
- 2 $V(X_1 - a_1, \dots, X_n - a_n) = \{(a_1, \dots, a_n)\}$.
- 3 En k^2 con $\mathcal{O}(\mathbb{A}^2) = k[X, Y]$, tenemos que $V(Y) = V(Y^2)$ es el eje x . ¡Dos polinomios diferentes pueden definir la misma subvariedad afín!
- 4 Todo sub-espacio lineal afín de k^n es una subvariedad afín.
- 5 Si $T \subseteq S \subseteq \mathcal{O}(\mathbb{A}^n)$ entonces $V(S) \subseteq V(T)$, i.e., “mientras más ecuaciones, menos soluciones”.

Simplificación

Sea $S \subseteq \mathcal{O}(\mathbb{A}^n)$ subconjunto y $\langle S \rangle$ el *ideal generado* por S (i.e., sumas finitas de la forma $\sum f_i g_i$ con $f_i \in S$ y $g_i \in \mathcal{O}(\mathbb{A}^n)$ arbitrario). Entonces,

$$V(S) = V(\langle S \rangle).$$

En particular, *siempre* podemos suponer que $S = I \subseteq \mathcal{O}(\mathbb{A}^n)$ es un ideal.

TEOREMA DE LA BASE DE HILBERT

Teorema (Hilbert, 1890)

El anillo $\mathcal{O}(\mathbb{A}^n) \stackrel{\text{def}}{=} k[X_1, \dots, X_n]$ es **noetheriano**, i.e., se verifican las condiciones equivalentes siguientes:

(i) Toda sucesión creciente de ideales es eventualmente constante, i.e., si

$$I_0 \subseteq I_1 \subseteq I_2 \subseteq \dots \subseteq I_n \subseteq \dots$$

son ideales en $\mathcal{O}(\mathbb{A}^n)$, entonces $\exists N \in \mathbb{N}$ tal que $I_m = I_{m+1} \ \forall m \geq N$.

(ii) Todo ideal $I \subseteq \mathcal{O}(\mathbb{A}^n)$ está generado por *finitos* polinomios.

Luego, si $S \subseteq \mathcal{O}(\mathbb{A}^n)$ subconjunto y si $I = \langle S \rangle$ ideal asociado, entonces existen $f_1, \dots, f_r \in \mathcal{O}(\mathbb{A}^n)$ tales que $I = \langle f_1, \dots, f_r \rangle$. En particular,

$$V(S) = V(f_1, \dots, f_r).$$

Toda subvariedad afín puede definirse por finitas ecuaciones polinomiales.

TOPOLOGÍA DE ZARISKI

Como consecuencia de la definición de $S \mapsto V(S)$ se verifica (**Ejercicio**):

- 1 Intersección arbitraria de subvariedades afines de k^n es también una subvariedad afín de k^n : $\bigcap_{i \in I} V(S_i) = V(\bigcup_{i \in I} S_i)$.
- 2 Unión finita de subvariedades afines de k^n es también una subvariedad afín de k^n : $V(S_1) \cup V(S_2) = V(S_1 S_2)$.

En particular, las subvariedades afines $V(S) \subseteq k^n$ verifican los axiomas de los conjuntos *cerrados* de una topología.

Topología de Zariski

Definimos la **topología de Zariski** de k^n como la topología obtenida al declarar como cerrados a las subvariedades afines, i.e., conjuntos de la forma $V(S)$ para cierto $S \subseteq \mathcal{O}(\mathbb{A}^n)$. Los **abiertos de Zariski** son los

$$U = k^n \setminus V(S) \text{ para cierto } S \subseteq \mathcal{O}(\mathbb{A}^n).$$

El **espacio afín** $\mathbb{A}^n$ es k^n dotado de la topología de Zariski.

PROPIEDADES DE LA TOPOLOGÍA DE ZARISKI

Un espacio topológico X es **noetheriano** si toda sucesión *decreciente* de cerrados $F_0 \supseteq F_1 \supseteq F_2 \supseteq \cdots$ es eventualmente constante, y es **quasi-compacto** si todo cubrimiento abierto admite un sub-cubrimiento finito.

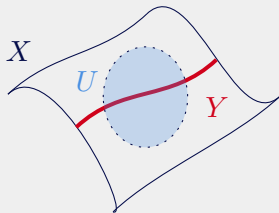
El espacio afín $\mathbb{A}^n$ es noetheriano, y todo espacio noetheriano es quasi-compacto.

$\mathbb{A}^n$ es *noetheriano*: las funciones $I \mapsto V(I)$ y $V(I) \mapsto \mathcal{I}(V(I))$ son decrecientes, y $I \subseteq \mathcal{I}(V(I))$, donde $\mathcal{I}(V(I)) := \{f \in \mathcal{O}(\mathbb{A}^n) \text{ tal que } f(x) = 0 \ \forall x \in V(I)\}$. Luego, una sucesión decreciente de cerrados $V(I_0) \supseteq V(I_1) \supseteq \cdots$ induce una sucesión *creciente* de ideales $J_m := \mathcal{I}(V(I_m))$ de $\mathcal{O}(\mathbb{A}^n)$, que es eventualmente constante por el Teorema de la base de Hilbert. $\square$

Noetheriano $\Rightarrow$ *quasi-compacto*: sea $X = \bigcup_{i \in I} U_i$ cubrimiento y $F_i := X \setminus U_i$. Notar que $\{U_j\}_{j \in J}$ cubre X si y sólo si $\bigcap_{j \in J} F_j = \emptyset$. Supongamos, **por contradicción**, que toda intersección finita de los F_i es no-vacía; agregando intersecciones podemos asumir que $\{F_i\}_{i \in I}$ es estable por intersecciones finitas. Como X es noetheriano, existe un elemento minimal no-vacío F_m (**Lema de Zorn**). En particular, $F_m \cap F_i = F_m \ \forall i \in I$, i.e., $F_m \subseteq F_i \ \forall i \in I$. Esto contradice $\bigcap_{i \in I} F_i = \emptyset$. $\square$

TOPOLOGÍA DE ZARISKI INDUCIDA

Sea (X, τ) espacio topológico y $Y \subseteq X$ subconjunto. La **topología inducida** en Y es $\tau_Y := \{Y \cap U \text{ tal que } U \in \tau\}$. En particular, un subconjunto de un espacio noetheriano es también noetheriano.



Todo subconjunto del espacio afín $\mathbb{A}^n$ es un espacio topológico noetheriano respecto a la topología de Zariski (inducida), y por ende quasi-compacto.

§2.2 FUNCIONES REGULARES Y MORFISMOS

IDEAL ASOCIADO A UN SUBCONJUNTO

Sea $V \subseteq \mathbb{A}^n$ subconjunto. El **ideal de V** está dado por

$$\mathcal{I}(V) := \{f \in \mathcal{O}(\mathbb{A}^n) \text{ tal que } f(x) = 0 \text{ para todo } x \in V\}.$$

Por definición, tenemos que:

- ❶ $\mathcal{I}(\emptyset) = \mathcal{O}(\mathbb{A}^n)$.
- ❷ Sea $X \subseteq \mathbb{A}^n$ subconjunto. Entonces, $X \subseteq V(\mathcal{I}(X))$ con igualdad si y sólo si X es una subvariedad afín. Así, para $X \subseteq \mathbb{A}^n$ arbitrario:

$$V(\mathcal{I}(X)) = \overline{X}^{\text{Zar}} \quad (\text{adherencia de Zariski})$$

- ❸ Si $X \subseteq Y \subseteq \mathbb{A}^n$, entonces $\mathcal{I}(Y) \subseteq \mathcal{I}(X)$, i.e., “mientras más puntos, menos ecuaciones”.
- ❹ Si $X, Y \subseteq \mathbb{A}^n$, entonces $\mathcal{I}(X \cup Y) = \mathcal{I}(X) \cap \mathcal{I}(Y)$.
- ❺ Sea $S \subseteq \mathcal{O}(\mathbb{A}^n)$ subconjunto arbitrario. Entonces, $S \subseteq \mathcal{I}(V(S))$ y dicha inclusión en general **no** es una igualdad, incluso en el caso en que S sea un ideal. Por ejemplo, $\mathcal{I}(V(\langle Y^2 \rangle)) = \langle Y \rangle$ en $k[X, Y]$.

ESPACIOS IRREDUCIBLES Y VARIEDADES AFINES

Sea $X \neq \emptyset$ un espacio topológico. Decimos que X es **irreducible** si *no* es la unión de dos subconjuntos cerrados estrictos, i.e., si $X = X_1 \cup X_2$ con X_1, X_2 cerrados, entonces $X = X_1$ o bien $X = X_2$. (**Ejercicio**): equivale a que todo par de abiertos no-vacíos de X se intersecte, o bien a que todo abierto no-vacío de X sea denso. En particular, un espacio irreducible **no** es Hausdorff (a menos que sea un punto).

Si $X \subseteq \mathbb{A}^n$ subvariedad afín, X irreducible $\Leftrightarrow \mathcal{I}(X) \subseteq \mathcal{O}(\mathbb{A}^n)$ ideal primo.

($\Rightarrow$): Sean $f, g \in \mathcal{O}(\mathbb{A}^n)$ tales que $fg \in \mathcal{I}(X)$. Entonces, $X \subseteq V(fg) \stackrel{\text{def}}{=} V(f) \cup V(g)$ y así $X = X_1 \cup X_2$ con $X_1 := V(f) \cap X$ y $X_2 := V(g) \cap X$ cerrados en X . Como X irreducible, $X \subseteq V(f)$ o bien $X \subseteq V(g)$, i.e., $f \in \mathcal{I}(X)$ o bien $g \in \mathcal{I}(X)$. Luego, $\mathcal{I}(X)$ es un ideal primo.

($\Leftarrow$): Si $X = X_1 \cup X_2$ con $X_i \subsetneq X$ cerrado propio, entonces $\exists f_i \in \mathcal{O}(\mathbb{A}^n)$ que se anula en X_i pero no en X , i.e., $f_i \notin \mathcal{I}(X)$. Sin embargo, $f_1 f_2 \in \mathcal{I}(X)$ pues $X = X_1 \cup X_2$. Esto **contradice** que $\mathcal{I}(X)$ sea un ideal primo. $\square$

IRREDUCIBILIDAD DE $\mathbb{A}^n$

Sea k un cuerpo de cardinal infinito (e.g. k algebraicamente cerrado). Entonces, $\mathcal{I}(\mathbb{A}^n) = \langle 0 \rangle$ y $\mathbb{A}^n$ es irreducible.

Como k infinito, todo $f \in \mathcal{O}(\mathbb{A}^n)$ que se anula sobre $\mathbb{A}^n$ es nulo. En efecto, basta fijar $n - 1$ variables para obtener un polinomio en una variable con infinitas raíces, que por ende es nulo. La conclusión $\mathcal{I}(\mathbb{A}^n) = \langle 0 \rangle$ se obtiene por inducción en n . Así, $\mathbb{A}^n$ es irreducible pues $\mathcal{I}(\mathbb{A}^n) = \langle 0 \rangle$ ideal primo. $\square$

Sea A un anillo conmutativo con unidad, y sea $I \subseteq A$ un ideal. El conjunto

$$\sqrt{I} := \{f \in A \text{ tal que existe } m \in \mathbb{N}^{\geq 1} \text{ tal que } f^m \in I\}$$

es un ideal de A que verifica $I \subseteq \sqrt{I}$, llamado el **radical** de I .

Decimos que I es un **ideal radical** si $I = \sqrt{I}$.

Más aún, $I \subseteq A$ es un ideal radical si y sólo si A/I es un **anillo reducido** (i.e., el único elemento nilpotente de A/I es el 0). En particular, hay inclusiones

$$\{\text{ideales maximales}\} \subseteq \{\text{ideales primos}\} \subseteq \{\text{ideales radicales}\}$$

para todo anillo conmutativo con unidad A .

CONVENCIÓN: EN TODO LO QUE
SIGUE DEL CURSO, ASUMIREMOS
QUE k ES UN CUERPO
ALGEBRAICAMENTE CERRADO

HILBERT NULLSTELLENSATZ

Teorema de los ceros de Hilbert (1893)

Sea $k = \bar{k}$ un cuerpo **algebraicamente cerrado** (e.g. $k = \mathbb{C}$), y sea $I \subseteq \mathcal{O}(\mathbb{A}^n) \stackrel{\text{def}}{=} k[X_1, \dots, X_n]$ un ideal. Entonces:

- 1 **Nullstellensatz débil.** Si $I = \mathfrak{m}$ es un ideal maximal, entonces $\mathfrak{m} = \langle X_1 - a_1, \dots, X_n - a_n \rangle$ para ciertos $a_1, \dots, a_n \in k$.
- 2 **Nullstellensatz.** Para todo ideal I se cumple que $\mathcal{I}(V(I)) = \sqrt{I}$.

En particular, $V(I) = \emptyset$ si y sólo si $I = \mathcal{O}(\mathbb{A}^n)$.

Luego, la aplicación $X \mapsto \mathcal{I}(X)$ establece una *biyección* decreciente, con inversa dada por $I \mapsto V(I)$, entre:

- 1 Subvariedades **afines** de $\mathbb{A}^n$ e **ideales radicales** de $\mathcal{O}(\mathbb{A}^n)$.
- 2 Subvariedades **afines irreducibles** de $\mathbb{A}^n$ e **ideales primos** de $\mathcal{O}(\mathbb{A}^n)$.
- 3 **Puntos** de $\mathbb{A}^n$ e **ideales maximales** de $\mathcal{O}(\mathbb{A}^n)$.

FUNCIÓN REGULAR

Sea X un espacio topológico. Un subconjunto $A \subseteq X$ es **localmente cerrado** si es un subconjunto cerrado de un abierto de X .

En otras palabras, si $A = U \cap F$ es la intersección de un abierto U y un cerrado F de X . En particular, considerando $U = X$ (resp. $F = X$), todo cerrado (resp. abierto) de X es localmente cerrado.

Definición (función regular)

Sea $X \subseteq \mathbb{A}^n$ un subconjunto localmente cerrado. Una **función regular** en X es una función $f : X \rightarrow k$ tal que para todo punto $x \in X$ existe una vecindad abierta $x \in U_x \subseteq X$ y polinomios $P_x, Q_x \in \mathcal{O}(\mathbb{A}^n)$ tales que $Q_x(x) \neq 0$, y tales que

$$f|_{U_x} = \frac{P_x}{Q_x} \Big|_{U_x}.$$

y $\mathcal{O}(X) := \{f : X \rightarrow k \text{ regular}\}$ (k -álgebra de funciones regulares en X).

Sea $X \subseteq \mathbb{A}^n$ un *cerrado* de Zariski (i.e., una subvariedad afín). Entonces, toda $f : X \rightarrow k$ regular es la restricción de $P \in \mathcal{O}(\mathbb{A}^n) \stackrel{\text{def}}{=} k[X_1, \dots, X_n]$, i.e., $f = P|_X$. En otras palabras,

$$0 \longrightarrow \mathcal{I}(X) \xhookrightarrow{\iota} \mathcal{O}(\mathbb{A}^n) \xrightarrow{\text{res}_X} \mathcal{O}(X) \longrightarrow 0$$

es una sucesión exacta, y en particular $\mathcal{O}(X) \cong \mathcal{O}(\mathbb{A}^n)/\mathcal{I}(X)$.

Sea $X = V(I) \subseteq \mathbb{A}^n$ cerrado de Zariski, con $I \subseteq \mathcal{O}(\mathbb{A}^n)$ ideal. Sea $f : X \rightarrow k$ función regular, y veamos que f es restricción de un polinomio:

Fijamos para cada $x \in X$ una vecindad abierta $U_x \subseteq X$ de $x \in X$ y polinomios P_x, Q_x tales que $fQ_x = P_x$ en U_x . Como U_x abierto Zariski,

$$X \setminus U_x = X \cap V(A_1, \dots, A_m) \stackrel{\text{def}}{=} \{y \in X, A_1(y) = \dots = A_m(y) = 0\}$$

para ciertos $A_i \in \mathcal{O}(\mathbb{A}^n)$. En particular, $(A_1 f Q_x)(y) = (A_1 P_x)(y) \forall y \in X$.

Redefiniendo $Q_x := A_1 Q_x$ y $P_x := A_1 P_x$, obtenemos que $f Q_x = P_x$ ahora es válida en todo X . Cambiando la numeración si fuera necesario para que $A_1(x) \neq 0$, tenemos que $Q_x(x) \neq 0$ por definición de Q_x .

Sea $J := \langle \{Q_x\}_{x \in X} \rangle \subseteq \mathcal{O}(\mathbb{A}^n)$. Por definición, los Q_x **no** tienen ceros comunes en X , i.e., $\emptyset = V(J) \cap X \stackrel{\text{def}}{=} V(J) \cap V(I) \stackrel{\text{def}}{=} V(I + J)$.

Nullstellensatz: $V(I + J) = \emptyset \Leftrightarrow I + J = \mathcal{O}(\mathbb{A}^n)$. En particular, existen $B \in I$ y $\sum_{j=1}^r G_{x_j} Q_{x_j} \in J$ tales que $B + \sum_{j=1}^r G_{x_j} Q_{x_j} = 1$.

Como $X = V(I)$, $B = 0$ en X y por ende

$$f = f \cdot 1 = \sum_{j=1}^r G_{x_j} (f Q_{x_j}) = \sum_{j=1}^r G_{x_j} P_{x_j} =: P.$$

La última parte se deduce al considerar $\text{res}_X : \mathcal{O}(\mathbb{A}^n) \twoheadrightarrow \mathcal{O}(X)$, $P \mapsto P|_X$ y notar que $\ker(\text{res}_X) \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{I}(X)$. □

Sea $X \subseteq \mathbb{A}^n$ un subconjunto localmente cerrado. Definimos el **haz de funciones regulares** en X como el haz en k -álgebras $\mathcal{O}_X$ que a cada abierto $U \subseteq X$ asocia el k -álgebra

$$\mathcal{O}_X(U) := \mathcal{O}(U) \stackrel{\text{def}}{=} \{f : U \longrightarrow k \text{ función regular}\}.$$

Más aún, si dotamos a k de la topología de Zariski (i.e., lo pensamos como la **recta afín** $\mathbb{A}^1$) entonces toda función regular es continua (**Ejercicio**).

Así, si denotamos por $\mathcal{C}_X$ al haz de funciones continuas $f : X \rightarrow \mathbb{A}^1$ respecto a las correspondientes topologías de Zariski, entonces

$$\mathcal{O}_X \subseteq \mathcal{C}_X$$

es un subhaz.