

Geometría Algebraica

MAT427 — Clase 3

PEDRO MONTERO

UNIVERSIDAD TÉCNICA FEDERICO SANTA MARÍA
VALPARAÍSO, CHILE

10 DE AGOSTO DE 2026

§1.3 PREHACES Y HACES

EJEMPLOS DE HACIFICACIÓN Y HAZ IMAGEN

Sea $\varphi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ un morfismo de haces de grupos abelianos en X , y sea $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{F}$ un sub-haz.

- 1 Sea G grupo abeliano. El haz asociado al prehaz constante G es el haz $\underline{G}$ de funciones localmente constantes, i.e., $G^+ = \underline{G}$.
- 2 El **haz cociente** $\mathcal{F}/\mathcal{E}$, el **haz cokernel** $\text{coker } \varphi$ y el **haz imagen** $\text{Im } \varphi$ son los haces asociados a los prehaces

$$U \mapsto \mathcal{F}(U)/\mathcal{E}(U), \quad U \mapsto \text{coker}(\varphi_U), \quad U \mapsto \text{Im}(\varphi_U),$$

i.e., $\mathcal{F}/\mathcal{E} = (\mathcal{F}/\mathcal{E})_{\text{pre}}^+$, $\text{coker } \varphi = (\text{coker } \varphi)_{\text{pre}}^+$ e $\text{Im } \varphi = (\text{Im } \varphi)_{\text{pre}}^+$.

Observación práctica

Una sección $\sigma \in \mathcal{G}(U)$ pertenece a $(\text{Im } \varphi)(U)$ si existe un cubrimiento abierto $U = \bigcup_{i \in I} U_i$ y existen secciones $s_i \in \mathcal{F}(U_i)$ tales que $\varphi(s_i) = \sigma|_{U_i}$ para todo $i \in I$, i.e., *son las secciones de $\mathcal{G}$ que provienen localmente de secciones de $\mathcal{F}$.*

MORFISMOS DE HACES

Sea $\varphi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ morfismo de haces de grupos abelianos. Decimos que φ es:

(a) **inyectivo** si $\ker(\varphi) = 0$, donde 0 es el haz asociado al grupo trivial.

(b) **sobreyectivo** si $\operatorname{Im} \varphi \stackrel{\text{def}}{=} (\operatorname{Im} \varphi)_{\text{pre}}^+ = \mathcal{G}$.

(c) un **isomorfismo** de haces si es inyectivo y sobreyectivo.

Proposición útil

Sea $\varphi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ un morfismo de haces de grupos abelianos en X . Entonces, φ es un isomorfismo si y sólo si para todo $x \in X$ el morfismo inducido

$$\varphi_x : \mathcal{F}_x \longrightarrow \mathcal{G}_x \text{ es un isomorfismo.}$$

En general, siempre hay un isomorfismo de haces

$$\mathcal{F} / \ker \varphi \cong \operatorname{Im} \varphi.$$

φ ISOMORFISMO $\Leftrightarrow \varphi_x$ ISOMORFISMO

($\Rightarrow$): Para $x \in X$, el morfismo de tallos $\varphi_x : \mathcal{F}_x \rightarrow \mathcal{G}_x$ se define considerando para todo germen $s_x \in \mathcal{F}_x$ un abierto $U \subseteq X$ tal que $x \in U$ y una sección $s \in \mathcal{F}(U)$ tal que $s_x = [(s, U)]$. Así, definimos $\varphi_x(s_x)$ como el germen de $\varphi(s) \in \mathcal{G}(U)$ en $\mathcal{G}_x$, i.e., $\varphi_x(s_x) := [(\varphi(s), U)]$. Luego, si φ es un isomorfismo entonces φ_x también lo es para todo $x \in X$.

($\Leftarrow$): Si $\varphi_x : \mathcal{F}_x \rightarrow \mathcal{G}_x$ es un isomorfismo $\forall x \in X$ entonces φ es inyectivo, pues si $s \in \mathcal{F}(U)$ sección sobre $U \subseteq X$ con $\varphi(s) = 0$ en $\mathcal{G}(U)$ entonces $\varphi_x(s_x) = 0$ en $\mathcal{G}_x \forall x \in U$. Como φ_x inyectivo, tenemos que $s_x = 0 \forall x \in U$ y luego $s = 0$ pues $\mathcal{F}$ es un haz. La sobreyectividad queda como **Ejercicio**.

Por último, para deducir el isomorfismo de haces $\mathcal{F}/\ker \varphi \cong \text{Im } \varphi$ basta utilizar para todo $x \in X$ el teorema del isomorfismo (clásico) para cada morfismo de grupos abelianos $\varphi_x : \mathcal{F}_x \rightarrow \mathcal{G}_x$, y aplicar el resultado anterior.



SUCESIONES EXACTAS DE HACES

Sea $\{\mathcal{F}_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ una colección de haces de grupos abelianos en X , y sean $\varphi_n : \mathcal{F}_n \rightarrow \mathcal{F}_{n+1}$ morfismos de haces para todo $n \in \mathbb{Z}$. Decimos que la sucesión

$$\cdots \xrightarrow{\varphi_{n-2}} \mathcal{F}_{n-1} \xrightarrow{\varphi_{n-1}} \mathcal{F}_n \xrightarrow{\varphi_n} \mathcal{F}_{n+1} \xrightarrow{\varphi_{n+1}} \cdots$$

es **exacta** si $\ker \varphi_n = \operatorname{Im} \varphi_{n-1} \stackrel{\text{def}}{=} (\operatorname{Im} \varphi_{n-1})_{\text{pre}}^+$ para todo $n \in \mathbb{Z}$. Más aún, una **sucesión exacta corta** de haces es una sucesión exacta de la forma

$$0 \longrightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{G} \xrightarrow{\psi} \mathcal{H} \longrightarrow 0,$$

i.e., φ es inyectivo, ψ es sobreyectivo, y además $\ker \psi = \operatorname{Im} \varphi$.

Ejemplo: la sucesión exponencial (Kodaira–Spencer, 1953)

Sea $X = \mathbb{C}$ (o una variedad compleja). La **sucesión exponencial**

$$0 \longrightarrow \underline{\mathbb{Z}} \xrightarrow{\iota} \mathcal{O}_X \xrightarrow{\exp(2\pi i \cdot)} \mathcal{O}_X^\times \longrightarrow 0,$$

donde $\mathcal{O}_X$ (resp. $\mathcal{O}_X^\times$) es el haz de funciones holomorfas (resp. el haz de funciones holomorfas que no se anulan), es **exacta**.

§1.4 ESPACIOS ANILLADOS Y $\mathcal{O}_X$ -MÓDULOS

MOTIVACIÓN Y (PRE)HAZ IMAGEN DIRECTA

Recuerdo: Sea A un anillo (conmutativo con unidad). Un A -módulo M es esencialmente un A -espacio vectorial: es un grupo abeliano $(M, +)$ donde podemos multiplicar por “escalares” en el anillo A .

Objetivo: Extender lo anterior a un espacio topológico X , permitiendo que el anillo A varíe en cada abierto $U \subseteq X$. Para ello necesitamos:

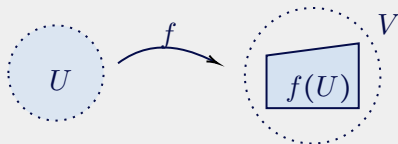
Sea $f : X \rightarrow Y$ función continua y $V \subseteq Y$ abierto, entonces $f^{-1}(V)$ es un abierto de X . Luego, a partir de un prehaz $\mathcal{F}$ en X podemos definir naturalmente un prehaz $f_*\mathcal{F}$ en Y mediante:

$$(f_*\mathcal{F})(V) := \mathcal{F}(f^{-1}(V)) \text{ para todo } V \subseteq Y \text{ abierto.}$$

El prehaz $f_*\mathcal{F}$ es llamado el **prehaz imagen directa**.

PREHAZ IMAGEN INVERSA

La imagen $f(U) \subseteq Y$ de un abierto $U \subseteq X$ **no** es necesariamente un abierto de Y . Dado un prehaz $\mathcal{G}$ en Y **no** podemos utilizar la fórmula “*inocente*” $\mathcal{G}(f(U))$, donde $U \subseteq X$ abierto, para definir un prehaz en X .



Solución: *aproximar* la imagen $f(U) \subseteq Y$ por abiertos de Y , i.e., considerar vecindades abiertas de $f(U)$ y gérmenes de secciones:

$$(f^{-1}\mathcal{G})_{\text{pre}}(U) := \lim_{\substack{V \subseteq Y \text{ abierto} \\ \text{tal que } f(U) \subseteq V}} \mathcal{G}(V) \quad (\text{prehaz imagen inversa})$$

Los elementos de $(f^{-1}\mathcal{G})_{\text{pre}}(U)$ son (clases de equivalencia de) gérmenes (s, V) con $s \in \mathcal{G}(V)$ y $f(U) \subseteq V$ abierto de Y , y donde $(s_1, V_1) \sim (s_2, V_2)$ si existe $W \subseteq Y$ abierto tal que $f(U) \subseteq W \subseteq V_1 \cap V_2$ y $s_1|_W = s_2|_W$.

HAZ IMAGEN INVERSA Y RESTRICCIONES

En general $(f^{-1}\mathcal{G})_{\text{pre}}$ **no** es un haz. Por lo anterior, si $\mathcal{G}$ es un haz en Y , entonces definimos el **haz imagen inversa** $f^{-1}\mathcal{G}$ como el haz asociado al prehaz $(f^{-1}\mathcal{G})_{\text{pre}}$, i.e., $f^{-1}\mathcal{G} := (f^{-1}\mathcal{G})_{\text{pre}}^+$.

Más generalmente, se deja como **Ejercicio** verificar:

- 1 Si $\mathcal{F}$ es un haz en X , entonces $f_*\mathcal{F}$ es un haz en Y .
- 2 Dar un ejemplo que muestre que incluso si $\mathcal{G}$ es un haz, **no** necesariamente $(f^{-1}\mathcal{G})_{\text{pre}}$ es un haz en X .
- 3 Que hay un isomorfismo de grupos abelianos $\text{Hom}(f^{-1}\mathcal{G}, \mathcal{F}) \cong \text{Hom}(\mathcal{G}, f_*\mathcal{F})$, i.e., los funtores f^{-1} y f_* son adjuntos.

El caso de inclusiones

Si $\iota: X \hookrightarrow Y$ es la inclusión de un sub-espacio topológico, denotamos $\mathcal{G}|_X \stackrel{\text{def}}{=} \iota^{-1}\mathcal{G}$ y lo llamamos la **restricción de $\mathcal{G}$ a X** . Si $X = V$ es un *abierto* de Y , entonces $\mathcal{G}|_V$ es el haz en V que asocia a todo abierto $U \subseteq V$ el grupo abeliano $\mathcal{G}(U)$; y si $X = \{y\}$ es un punto, entonces $\mathcal{G}|_y$ es el haz constante $\mathcal{G}_y$ en $\{y\}$ (**Ejercicio**).

ESPACIOS ANILLADOS

Sea k un cuerpo. Un **espacio anillado** en k -álgebras es un par $(X, \mathcal{O}_X)$ donde X es un espacio topológico y un haz $\mathcal{O}_X$ de k -álgebras (conmutativas con unidad) llamado el **haz estructural**.

Un **morfismo de espacios anillados** en k -álgebras es un par

$$(f, \varphi) : (X, \mathcal{O}_X) \longrightarrow (Y, \mathcal{O}_Y)$$

formado por una $f : X \rightarrow Y$ continua y un morfismo de haces de k -álgebras

$$\varphi : \mathcal{O}_Y \longrightarrow f_* \mathcal{O}_X,$$

llamado¹ el *pullback de funciones regulares de Y a X* .

Dado que la composición de morfismos de espacios anillados está bien definida, obtenemos una categoría. En particular, tenemos la noción de isomorfismo de espacios anillados en k -álgebras.

¹En muchos textos (e.g. Hartshorne), φ se denota $f^\# : \mathcal{O}_Y \rightarrow f_* \mathcal{O}_X$.

EJEMPLOS

- 1 Sea M una variedad diferenciable, y sea $\mathcal{O}_M := \mathcal{C}_M^\infty$ el haz de funciones diferenciables en M . Entonces, $(M, \mathcal{O}_M)$ es un espacio anillado en $\mathbb{R}$ -álgebras.
- 2 Sea $(X, \mathcal{O}_X)$ un espacio anillado en k -álgebras. Si $U \subseteq X$ es un abierto, entonces podemos considerar el haz de k -álgebras $\mathcal{O}_U \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{O}_X|_U$ que permite considerar a U como un espacio anillado también.

Queda como **Ejercicio** construir un morfismo de espacios anillados

$$(U, \mathcal{O}_U) \rightarrow (X, \mathcal{O}_X).$$

Intuición

Sea $(X, \mathcal{O}_X)$ un espacio anillado en k -álgebras. Si pensamos $\mathcal{O}_X$ como un anillo que varía a medida que variamos los abiertos U de X , entonces podemos considerar módulos sobre cada uno de los anillos $\mathcal{O}_X(U)$.

Sea $(X, \mathcal{O}_X)$ un espacio anillado en k -álgebras. Un $\mathcal{O}_X$ -**módulo** es un haz $\mathcal{F}$ de k -espacios vectoriales tal que para todo abierto $U \subseteq X$ el k -espacio vectorial $\mathcal{F}(U)$ es un $\mathcal{O}_X(U)$ -módulo, y tal que para cada inclusión de abiertos $V \subseteq U \subseteq X$ las aplicaciones lineales $\mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{F}(V)$, $s \mapsto s|_V$ son compatibles con las estructuras de módulos.

Un **morfismo de $\mathcal{O}_X$ -módulos** $\varphi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ es un morfismo de haces de k -espacios vectoriales tal que para todo abierto $U \subseteq X$ la aplicación

$$\varphi_U : \mathcal{F}(U) \longrightarrow \mathcal{G}(U) \text{ es } \mathcal{O}_X(U)\text{-lineal.}$$

Obtenemos una categoría $\mathcal{O}_X\text{-Mod}$, donde

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \{\varphi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G} \text{ morfismo de } \mathcal{O}_X\text{-módulos}\}.$$

son grupos abelianos que además poseen² estructura de $\mathcal{O}_X(X)$ -módulo.

²Dado $\varphi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ y $\lambda \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$, definimos $\lambda\varphi$ como el morfismo de $\mathcal{O}_X$ -módulos que en el abierto $U \subseteq X$ está dado por $(\lambda\varphi)(s) := \lambda|_U \cdot s \ \forall s \in \mathcal{F}(U)$.

EJEMPLOS MÁS USADOS

Podemos generalizar muchas construcciones clásicas al contexto de $\mathcal{O}_X$ -módulos, en ocasiones considerando el haz asociado al prehaz en cuestión:

- 1 La noción de sub- $\mathcal{O}_X$ -módulo $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{F}$, y el $\mathcal{O}_X$ -módulo cociente $\mathcal{F}/\mathcal{E}$ (haz asociado).
- 2 Dado $\varphi \in \text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$, los haces $\ker(\varphi)$, $\text{Im}(\varphi)$ y $\text{coker}(\varphi)$ son $\mathcal{O}_X$ -módulos (haz asociado para los dos últimos). Luego, podemos hablar de sucesiones exactas de $\mathcal{O}_X$ -módulos.
- 3 Si $\{\mathcal{F}_i\}_{i \in I}$ es una colección arbitraria de $\mathcal{O}_X$ -módulos, la **suma directa** $\bigoplus_{i \in I} \mathcal{F}_i$ es un $\mathcal{O}_X$ -módulo.
- 4 El **producto tensorial** $\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{G}$ es el haz asociado al prehaz $U \mapsto \mathcal{F}(U) \otimes_{\mathcal{O}_X(U)} \mathcal{G}(U)$.
- 5 El prehaz de grupos abelianos $U \mapsto \text{Hom}_{\mathcal{O}_U}(\mathcal{F}|_U, \mathcal{G}|_U)$ ya es un haz, y lo denotamos $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ o $\mathcal{H}om(\mathcal{F}, \mathcal{G})$.
- 6 El $\mathcal{O}_X$ -módulo **dual** de $\mathcal{F}$ está dado por $\mathcal{F}^\vee := \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{O}_X)$.

EJEMPLOS MÁS USADOS

- 7 Podemos hablar del álgebra tensorial, exterior y simétrica de $\mathcal{O}_X$ -módulos. Por ejemplo, para $d \in \mathbb{N}^{\geq 1}$ la **potencia exterior** $\wedge^d \mathcal{F}$ es el haz asociado al prehaz $U \mapsto \wedge^d \mathcal{F}(U)$.
- 8 $\mathcal{F}$ es **libre** si $\mathcal{F} \cong \mathcal{O}_X^{\oplus I} \stackrel{\text{def}}{=} \bigoplus_{i \in I} \mathcal{O}_X$ para cierto conjunto de índices I . El cardinal de I es el **rango** de $\mathcal{F}$.
- 9 $\mathcal{F}$ es **localmente libre** si existe un cubrimiento abierto $X = \bigcup_{i \in I} U_i$ tal que $\mathcal{F}|_{U_i} \cong \mathcal{O}_{U_i}^{\oplus r_i}$. Si X es *conexo*, todos los r_i son iguales a un mismo valor r , llamado el **rango** de $\mathcal{F}$.
- 10 Un **haz invertible** en X es un $\mathcal{O}_X$ -módulo localmente libre $\mathcal{L}$ de rango 1, i.e., tal que $\mathcal{L}|_{U_i} \cong \mathcal{O}_{U_i}$ para cierto cubrimiento $\{U_i\}_{i \in I}$ de X . En particular, $\mathcal{F}|_{U_i} \otimes_{\mathcal{O}_{U_i}} \mathcal{L}|_{U_i} \cong \mathcal{F}|_{U_i}$ para todo $i \in I$.
- 11 Un **haz de ideales** $\mathcal{I}$ es un sub- $\mathcal{O}_X$ -módulo de $\mathcal{O}_X$, i.e., $\mathcal{I}(U)$ es un ideal de $\mathcal{O}_X(U)$ para todo abierto $U \subseteq X$.

PULLBACK Y PUSHFORWARD

Consideremos un morfismo de espacios anillados $(f, \varphi) : (X, \mathcal{O}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{O}_Y)$, i.e., $f : X \rightarrow Y$ continua y $\varphi : \mathcal{O}_Y \rightarrow f_* \mathcal{O}_X$ morfismo de haces de k -álgebras, dado en cada abierto $V \subseteq Y$ por $\varphi_V : \mathcal{O}_Y(V) \rightarrow f_* \mathcal{O}_X(V) \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{O}_X(f^{-1}(V))$.

Sea $\mathcal{F}$ un $\mathcal{O}_X$ -módulo en X y $\mathcal{G}$ un $\mathcal{O}_Y$ -módulo en Y . Entonces:

- El haz **imagen directa** (o **pushforward**) $f_* \mathcal{F}$ es un $f_* \mathcal{O}_X$ -módulo. Dado que poseemos $\varphi : \mathcal{O}_Y \rightarrow f_* \mathcal{O}_X$ podemos definir **una estructura de $\mathcal{O}_Y$ -módulo en $f_* \mathcal{F}$** .
- El haz imagen inversa **$f^{-1} \mathcal{G}$ es un $f^{-1} \mathcal{O}_Y$ -módulo**. La **adjunción** entre f^{-1} y f_* hace corresponder φ con un único $\psi : f^{-1} \mathcal{O}_Y \rightarrow \mathcal{O}_X$, y así **$\mathcal{O}_X$ es dotado de estructura de $f^{-1} \mathcal{O}_Y$ -módulo**. Luego, por **extensión de escalares** obtenemos el **pullback** de $\mathcal{G}$:

$$f^* \mathcal{G} := f^{-1} \mathcal{G} \otimes_{f^{-1} \mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_X.$$

Adjunción a nivel de espacios anillados

Tal como antes, f^* y f_* son funtores adjuntos:

$$\text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(f^* \mathcal{G}, \mathcal{F}) \cong \text{Hom}_{\mathcal{O}_Y}(\mathcal{G}, f_* \mathcal{F}).$$

ENTRA EN ESCENA LA ESTRELLA DE
LA PELÍCULA...

Sea $X = \mathbb{R}^n$ (o variedad diferenciable) y $\mathcal{O}_X := \mathcal{C}_X^\infty$. Si elegimos coordenadas (locales) $x_1, \dots, x_n$ de X y denotamos por $dx_1, \dots, dx_n$ sus diferenciales, entonces el **haz cotangente** Ω_X^1 está definido por:

Para cada abierto $U \subseteq X$, los elementos de $\Omega_X^1(U)$ son 1-formas diferenciales

$$\omega(x) = \sum_{j=1}^n f_j(x) dx_j, \quad \text{donde } f_j \in \mathcal{O}_X(U).$$

Así, $\Omega_X^1|_U \cong \mathcal{O}_U^{\oplus n}$, i.e., Ω_X^1 haz localmente libre de rango $n = \dim_{\mathbb{R}}(X)$.

EL HAZ CANÓNICO

Más generalmente, podemos considerar el haz $\Omega_X^d := \bigwedge^d \Omega_X^1$ de d -formas diferenciales, cuyas secciones sobre el abierto $U \subseteq X$ son de la forma

$$\omega(x) = \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_d \leq n} f_{j_1, \dots, j_d}(x) dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_d}, \quad \text{donde } f_{j_1, \dots, j_d} \in \mathcal{O}_X(U).$$

Así, Ω_X^d es un haz localmente libre de rango $\binom{n}{d}$. En particular,

$$\omega_X := \Omega_X^n \stackrel{\text{def}}{=} \bigwedge^n \Omega_X^1$$

es un *haz invertible*, que llamamos el **haz canónico** de X . El haz dual

$$\mathcal{T}_X := \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\Omega_X^1, \mathcal{O}_X)$$

es el **haz tangente** de X , con secciones llamadas *campos vectoriales*.

Leitmotiv de la Geometría Algebraica Moderna

Toda la geometría de X debería estar gobernada por ω_X .