

Geometría Algebraica

MAT427 — Clase 2

PEDRO MONTERO

UNIVERSIDAD TÉCNICA FEDERICO SANTA MARÍA
VALPARAÍSO, CHILE

3 DE AGOSTO DE 2026

§1.3 PREHACES Y HACES

MOTIVACIÓN (JEAN LERAY, 1945)

Hay varias propiedades *locales* de las funciones. Por ejemplo, si $U \subseteq \mathbb{C}$ es abierto no-vacío y $g: U \rightarrow \mathbb{C}$ función holomorfa tal que $g(z) \neq 0 \ \forall z \in U$

¿Existe $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ función holomorfa tal que $g = e^f$?

La respuesta *depende* del abierto U . Por ejemplo,

- (a) Si $U = \mathbb{C}$ la respuesta es **sí**: $f(z) := \int_1^z \frac{g'(s)}{g(s)} ds$ funciona.
- (b) Si $U = \mathbb{C}^*$ la respuesta es **no**: si $g = \text{Id}_{\mathbb{C}^*}$, la existencia de f implicaría que existe un logaritmo complejo definido en $\mathbb{C}^*$ (**imposible**).

Localmente la respuesta es siempre afirmativa: tomar cualquier logaritmo en un pequeño disco $D(z_0, \varepsilon) \subseteq U$ y considerar $f := \log(g)$ en $D(z_0, \varepsilon)$.

Leitmotiv de la Teoría de Haces

Considerar propiedades locales y obtener enunciados **globales**.

RECUERDOS DE TOPOLOGÍA

Sea (X, τ) un espacio topológico no-vacío. Un sub-conjunto de abiertos $\mathcal{B} \subseteq \tau$ es una **base** si:

(A1) Los elementos de $\mathcal{B}$ cubren X , i.e., $X = \bigcup_{U \in \mathcal{B}} U$.

(A2) Para todos $U, V \in \mathcal{B}$ y todo $x \in U \cap V$, existe $W \in \mathcal{B}$ tal que $x \in W \subseteq U \cap V$.

Ejemplo: Sea $X = \mathbb{R}^n$ (o cualquier espacio métrico) con la topología euclídeana, entonces $\mathcal{B} = \{\text{bolas abiertas}\}$ es una base.

Recíprocamente, si $\mathcal{B}$ es una familia de sub-conjuntos de X que verifica (A1) y (A2), las uniones arbitrarias de elementos de $\mathcal{B}$ definen la **topología generada** por $\mathcal{B}$.

Usaremos esta construcción hoy para topologizar el *espacio étalé*.

Un **prehaz** $\mathcal{F}$ en un espacio topológico X consiste en:

- 1 Para todo abierto $U \subseteq X$, un conjunto $\mathcal{F}(U)$.
- 2 Para cada inclusión de abiertos $U \hookrightarrow V$, una *aplicación de restricción*

$$\begin{aligned} r_{V,U} : \mathcal{F}(V) &\longrightarrow \mathcal{F}(U) \\ s &\longmapsto r_{V,U}(s) \stackrel{\text{def}}{=} s|_U \end{aligned}$$

verificando que

- (a) Si $U \hookrightarrow V \hookrightarrow W$ son inclusiones de tres abiertos en X , entonces las restricciones

$$\begin{array}{ccccc} & & r_{W,U} & & \\ & \searrow & \text{---} & \nearrow & \\ \mathcal{F}(W) & \xrightarrow{r_{W,V}} & \mathcal{F}(V) & \xrightarrow{r_{V,U}} & \mathcal{F}(U) \end{array}$$

conmutan, i.e., $r_{W,U} = r_{V,U} \circ r_{W,V}$.

- (b) Para todo abierto $U \subseteq X$, se tiene que $r_{U,U} = \text{Id}_{\mathcal{F}(U)}$.

SECCIONES DE UN PREHAZ

Los elementos $s \in \mathcal{F}(U)$ son llamados **secciones** de $\mathcal{F}$ sobre U .

Por motivos que discutiremos más adelante, en la práctica se utilizan *tres* notaciones para denotar el conjunto de las secciones de $\mathcal{F}$ sobre U :

$$\mathcal{F}(U) \stackrel{\text{def}}{=} \Gamma(U, \mathcal{F}) \stackrel{\text{def}}{=} H^0(U, \mathcal{F}).$$

Frecuentemente, por “secciones de $\mathcal{F}$ ” nos referiremos al caso $U = X$. Los elementos de $\Gamma(X, \mathcal{F})$ son llamados **secciones globales** de $\mathcal{F}$.

EJERCICIO: Recordemos que **Top**(X) es la categoría cuyos objetos son los abiertos de X y cuyos morfismos son inclusiones. Probar que un prehaz es equivalente a un functor contravariante

$$\mathcal{F} : \mathbf{Top}(X) \rightarrow \mathbf{Conj}.$$

Cultura general: Esta observación es clave para definir el concepto de *Topología de Grothendieck*, donde se cambia **Top**(X) por otras categorías.

- ❶ Sea $X = \mathbb{R}^n$ (o una variedad diferenciable) y $\mathcal{F} = \mathcal{C}^\infty$ el prehaz con

$$\mathcal{C}^\infty(U) := \{f : U \longrightarrow \mathbb{R} \text{ función diferenciable}\},$$

que es una $\mathbb{R}$ -álgebra. Aquí, $r_{V,U} : \mathcal{C}^\infty(V) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(U)$, $f \mapsto f|_U$ es la restricción usual de funciones.

- ❷ Sea S conjunto fijo. El **prehaz constante** $\mathcal{F} := S$ está dado por $S(U) \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{F}(U) := S$ para todo abierto $U \subseteq X$, y donde $r_{V,U} = \text{Id}_S$.

- ❸ Sea S conjunto fijo. Si $U \subseteq X$ abierto, una función $f : U \rightarrow S$ es *localmente constante* si $\forall x \in U$ existe una vecindad abierta $x \in V_x \subseteq U$ tal que $f|_{V_x}$ es una función constante¹. El **prehaz de funciones localmente constantes** $\mathcal{F} := \underline{S}$ está dado por

$$\underline{S}(U) := \{f : U \rightarrow S \text{ función localmente constante}\},$$

donde las restricciones son las restricciones usuales de funciones.

¹e.g. En $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, la función $\text{sgn}(x) := x/|x|$ es localmente constante.

EJEMPLOS

- ④ Sea S un conjunto fijo y $\{*\}$ un singleton fijo, y sea $x_0 \in X$ un punto. El **prehaz rascacielo**, denotado $\iota_{x_0}(S)$ o $\iota_{x_0,*}(S)$, está dado por

$$(\iota_{x_0}(S))(U) := \begin{cases} \{*\} & \text{si } x_0 \notin U \\ S & \text{si } x_0 \in U \end{cases}$$

Queda como **Ejercicio** describir las aplicaciones de restricción $r_{V,U}$.

Estructura algebraica adicional

Consideraremos prehaces $\mathcal{F}$ tales que $\mathcal{F}(U)$ posee una estructura extra, y los morfismos de restricción la preservan. E.g., un **prehaz en grupos** es un prehaz $\mathcal{F}$ tal que $\mathcal{F}(U)$ es un grupo para todo abierto $U \subseteq X$, donde las

$$r_{V,U} : \mathcal{F}(V) \longrightarrow \mathcal{F}(U), s \mapsto s|_U$$

son morfismos de grupos, y donde *adicionalmente* imponemos $\mathcal{F}(\emptyset) = \{0\}$ es el grupo trivial. De manera análoga, se define la noción de prehaz en grupos abelianos, en k -espacios vectoriales, en k -álgebras, etc.

MORFISMO DE PREHACES

Sean $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ dos prehaces en X con valores en la misma categoría $\mathcal{C}^2$. Un **morfismo de prehaces** $\varphi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ consiste en:

- ❶ Para todo abierto $U \subseteq X$, un morfismo $\varphi_U : \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{G}(U)$ en $\mathcal{C}$.
- ❷ Para cada inclusión de abiertos $U \hookrightarrow V$, el diagrama

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(V) & \xrightarrow{\varphi_V} & \mathcal{G}(V) \\ r_{V,U} \downarrow & & \downarrow r_{V,U} \\ \mathcal{F}(U) & \xrightarrow{\varphi_U} & \mathcal{G}(U) \end{array}$$

es conmutativo, i.e., $\varphi_V(s)|_U = \varphi_U(s|_U)$ para toda $s \in \mathcal{F}(V)$.

²e.g. $\mathcal{C} = \mathbf{Conj}$ o $\mathcal{C} = \mathbf{Ab}$, etc.

EJEMPLO DE MORFISMO DE PREHACES

Sea G grupo abeliano, y sea G (resp. $\underline{G}$) el prehaz de funciones const. (resp. loc. const.) en X con valores en G . Hay un morfismo de prehaces

$$\varphi : G \longrightarrow \underline{G},$$

donde para $U \subseteq X$ abierto, el morfismo $\varphi_U : G(U) \longrightarrow \underline{G}(U)$ envía $g \in G(U) \stackrel{\text{def}}{=} G$ en la función (globalmente) constante $f : U \rightarrow G$, $x \mapsto f(x) = g$.

Notar que si $U = U_1 \sqcup U_2$ es unión disjunta de dos abiertos $U_1, U_2 \subseteq X$,

$$U = \begin{array}{c} \text{---} \circ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \quad \sqcup \quad \begin{array}{c} \text{---} \circ \text{---} \\ \text{---} \end{array}$$

$U_1 \qquad U_2$

y si G es un grupo no-trivial con $g_1 \neq g_2$ elementos de G , entonces

$$f(x) = \begin{cases} g_1 & \text{si } x \in U_1 \\ g_2 & \text{si } x \in U_2 \end{cases}$$

es loc. constante en U , pero **no** es constante en U (i.e., φ_U **no** es isom.)

OPERACIONES BÁSICAS

Sean $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ dos prehaces de grupos abelianos en X , y sea $\varphi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ un morfismo de prehaces. Para todo abierto $U \subseteq X$ definimos los prehaces $\ker \varphi$ e $\operatorname{Im} \varphi$ mediante

$$(\ker \varphi)(U) := \ker [\varphi_U] \quad \text{e} \quad (\operatorname{Im} \varphi)(U) := \operatorname{Im} [\varphi_U],$$

donde $\varphi_U : \mathcal{F}(U) \longrightarrow \mathcal{G}(U)$.

Un prehaz $\mathcal{E}$ es un **sub-prehaz** de $\mathcal{F}$, y escribimos $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{F}$, si $\mathcal{E}(U) \subseteq \mathcal{F}(U)$ es un sub-grupo abeliano para todo abierto $U \subseteq X$ y si las restricciones de $\mathcal{E}$ son las inducidas por las de $\mathcal{F}$. En particular, $\ker \varphi \subseteq \mathcal{F}$ e $\operatorname{Im} \varphi \subseteq \mathcal{G}$ son sub-prehaces.

Finalmente, para todo sub-prehaz $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{F}$ definimos el **prehaz cociente** y el **prehaz cokernel** mediante

$$(\mathcal{F}/\mathcal{E})(U) := \mathcal{F}(U)/\mathcal{E}(U) \quad \text{y} \quad (\operatorname{coker} \varphi)(U) := \mathcal{G}(U)/(\operatorname{Im} \varphi)(U)$$

para todo abierto $U \subseteq X$.

HENRI CARTAN & JEAN-PIERRE
SERRE NOTAN LA IMPORTANCIA DE
LA NOCIÓN DE H^2 EN GEOMETRÍA
ALGEBRAICA (1952–1953)

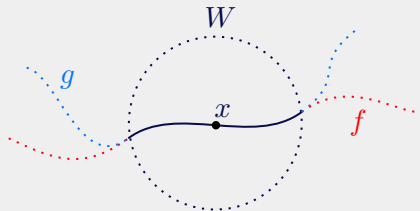
³o Gavilla, Sheaf (inglés), Faisceau (francés), Feixe (portugués), Fascio (italiano).

MOTIVACIÓN

Sea $X = \mathbb{R}^n$ y $\mathcal{C}^\infty$ el prehaz de funciones diferenciables en X . Dado $x \in X$, los **gérmenes** de funciones diferenciables en x son clases de equiv. de pares

$$\{(f, U), \text{ donde } x \in U \text{ abierto y } f \in \mathcal{C}^\infty(U)\},$$

con $(f, U) \sim (g, V)$ si existe un abierto $x \in W \subseteq U \cap V$ tal que $f|_W = g|_W$.



El conjunto de gérmenes de funciones diferenciables en $x \in X$ se llama el **tallo** de $\mathcal{C}^\infty$ en x , y se denota $\mathcal{C}_x^\infty$. Queda como **Ejercicio** probar que $\mathcal{C}_x^\infty$ es un anillo local con ideal maximal dado por $\mathfrak{m}_x = \{f \in \mathcal{C}_x^\infty, f(x) = 0\}$.

Sea $\mathcal{F}$ un prehaz en X . El **tallo**⁴ de $\mathcal{F}$ en un punto $x \in X$ está dado por

$$\mathcal{F}_x := \varinjlim_{U \ni x} \mathcal{F}(U) \stackrel{\text{def}}{=} \left(\coprod_{\substack{U \subseteq X \text{ abierto} \\ \text{tal que } x \in U}} \mathcal{F}(U) \right) / \sim,$$

donde

Para $s \in \mathcal{F}(U)$ y $t \in \mathcal{F}(V)$ se tiene que $(s, U) \sim (t, V)$ en $\mathcal{F}_x$ si existe un abierto $x \in W \subseteq U \cap V$ tal que $s|_W = t|_W$ en $\mathcal{F}(W)$.

Si U es una vecindad abierta del punto $x \in X$ y $s \in \mathcal{F}(U)$, denotamos por $s_x = [(s, U)]$ la clase de s en el tallo $\mathcal{F}_x$ y la llamamos el **germen** de la sección s en el punto $x \in X$.

⁴En inglés, *stalk*.

DEFINICIÓN DE HAZ

Sea $\mathcal{F}$ un prehaz de grupos abelianos en X . Decimos que $\mathcal{F}$ es un **haz** si se cumplen las siguientes condiciones para todo abierto $U \subseteq X$:

- 1 **Pegado.** Si $U = \bigcup_{i \in I} U_i$ es un cubrimiento abierto, y si $s_i \in \mathcal{F}(U_i)$ son secciones tales que $s_i|_{U_i \cap U_j} = s_j|_{U_i \cap U_j}$ para todos $i, j \in I$. Entonces, existe una sección $s \in \mathcal{F}(U)$ tal que $s|_{U_i} = s_i$ para todo $i \in I$.
- 2 **Unicidad.** Si $U = \bigcup_{i \in I} U_i$ es un cubrimiento abierto, y si $s \in \mathcal{F}(U)$ es una sección sobre U tal que $s|_{U_i} = 0$ en $\mathcal{F}(U_i)$ para todo $i \in I$. Entonces, $s = 0$ en $\mathcal{F}(U)$.

Por definición, un **morfismo de haces** $\varphi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ es simplemente un morfismo entre los prehaces subyacentes.

Definición intuitiva

Un haz es un prehaz donde exigimos que secciones locales s_i en abiertos U_i que cubren un abierto U , y que coinciden en las intersecciones $U_i \cap U_j$, puedan pegarse de manera única en una sección s sobre el abierto U .

- ❶ El prehaz $\mathcal{C}^\infty$ de funciones diferenciables es un haz.
- ❷ Sean X e Y espacios topológicos. El prehaz $\mathcal{C}(X; Y)$ en X que asocia a cada abierto $U \subseteq X$ el conjunto

$$\mathcal{C}(X; Y)(U) \stackrel{\text{def}}{=} \{f : U \rightarrow Y \text{ función continua}\}$$

es un haz⁵.

- ❸ Sea G un grupo abeliano. El prehaz constante G **no** siempre es un haz. E.g., si $U = U_1 \sqcup U_2$ es unión disjunta de dos abiertos no-vacíos, $|G| \geq 2$, y si $g_i \in G(U_i) \stackrel{\text{def}}{=} G$ son elementos diferentes con $i = 1, 2$. Entonces, **no** existe $g \in G(U) \stackrel{\text{def}}{=} G$ tal que $g|_{U_1} = g_1$ y $g|_{U_2} = g_2$.
- ❹ Sea G un grupo abeliano. El prehaz $\underline{G}$ de funciones localmente constantes en X con valores en G , es un haz.
- ❺ **Ejercicio:** Sea G un grupo abeliano y $x_0 \in X$ un punto. Probar que el prehaz rascacielo $\iota_{x_0}(G)$ es un haz.

⁵Esto es consecuencia del “*pasting lemma*” en topología.

KERNEL ES UN HAZ

Sea $\varphi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ un morfismo de haces de grupos abelianos. Entonces, el prehaz $\ker \varphi$ es siempre un haz:

Sea $U \subseteq X$ un abierto y $U = \bigcup_{i \in I} U_i$ un cubrimiento abierto. Consideremos secciones $s_i \in \mathcal{F}(U_i)$ tales que $s_i \in (\ker \varphi)(U_i)$ para todo $i \in I$, i.e., $\varphi_{U_i}(s_i) = 0$ en $\mathcal{G}(U_i)$. Si tenemos que

$$s_i|_{U_i \cap U_j} = s_j|_{U_i \cap U_j} \text{ en } \mathcal{F}(U_i \cap U_j) \text{ para todos } i, j \in I,$$

entonces el hecho que $\mathcal{F}$ es un haz implica que existe una única sección $s \in \mathcal{F}(U)$ tal que $s|_{U_i} = s_i$ para todo $i \in I$. Más aún, tenemos que

$$\varphi_U(s)|_{U_i} = \varphi_{U_i}(s|_{U_i}) = \varphi_{U_i}(s_i) = 0 \text{ en } \mathcal{G}(U_i) \text{ para todo } i \in I.$$

Dado que $\mathcal{G}$ es un haz, tenemos que $\varphi_U(s) = 0$ y luego $s \in (\ker \varphi)(U)$. $\square$

Ejercicio 1.3.20 del Apunte: Probar que $\text{Im } \varphi$ no necesariamente es un haz.

NOS GUSTARÍA PODER DEFINIR UN
HAZ IMAGEN.

¿CÓMO CONSTRUIR UN HAZ A
PARTIR DE UN PREHAZ?

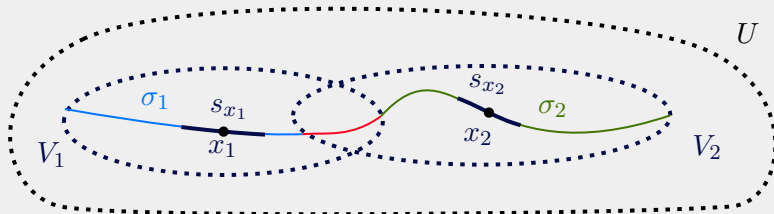
Sea $\mathcal{F}$ un prehaz de grupos abelianos en X . Definimos el prehaz $\mathcal{F}^+$ en X como el prehaz que asocia a cada abierto $U \subseteq X$ al grupo $\mathcal{F}^+(U)$ de “*gérmenes compatibles*” de $\mathcal{F}$ sobre U . Más formalmente,

$$\mathcal{F}^+(U) := \left\{ (s_x)_{x \in U} \in \prod_{x \in U} \mathcal{F}_x \text{ tal que } (\star) \right\},$$

donde la condición de compatibilidad $(\star)$ está dada por

($\star$) Para todo $x \in U$, existe una vecindad abierta $V \subseteq U$ de x y una sección $\sigma \in \mathcal{F}(V)$ tal que los gérmenes $\sigma_y = s_y$ coinciden en $\mathcal{F}_y$ para todo $y \in V$.

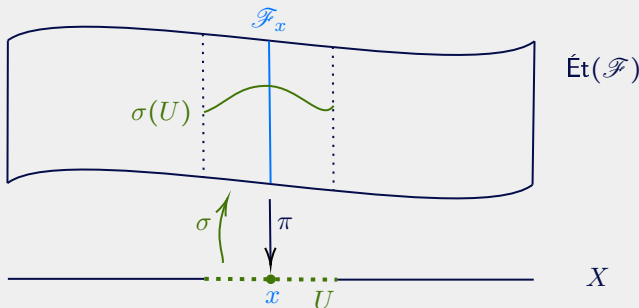
En términos geométricos, tenemos que:



Más aún, para todo prehaz $\mathcal{F}$ hay un morfismo natural $j : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}^+$ que para todo abierto $U \subseteq X$ y toda sección $s \in \mathcal{F}(U)$ asocia $j_U(s) := (s_x)_{x \in U}$, el conjunto de gérmenes $s_x \in \mathcal{F}_x$ para todo $x \in U$.

PROPOSICIÓN: $\mathcal{F}^+$ ES UN HAZ EN X

Definimos el *espacio étalé* de $\mathcal{F}$ como el conjunto $\dot{\text{Ét}}(\mathcal{F}) := \coprod_{x \in X} \mathcal{F}_x$, que viene dotado de una proyección natural $\pi : \dot{\text{Ét}}(\mathcal{F}) \rightarrow X$.



Una sección $s \in \mathcal{F}(U)$ define una función $\sigma : U \longrightarrow \dot{\text{Ét}}(\mathcal{F})$, $x \longmapsto s_x \in \mathcal{F}_x$.

Los subconjuntos de la forma $\sigma(U)$ verifican (A1) y (A2), y topologizan $\dot{\text{Ét}}(\mathcal{F})$. Finalmente, $\mathcal{F}^+(U)$ coincide con el conjunto de funciones $\sigma : U \rightarrow \dot{\text{Ét}}(\mathcal{F})$ continuas para dicha topología. Luego, $\mathcal{F}^+$ es un haz en X . $\square$

LEMA: $j_U : \mathcal{F}(U) \xrightarrow{\cong} \mathcal{F}^+(U)$, $s \mapsto (s_x)_{x \in U}$ SI $\mathcal{F}$ HAZ

Supongamos que $\mathcal{F}$ es un haz, y sea $U \subseteq X$ abierto.

- INYECTIVIDAD: Sea $s \in \mathcal{F}(U)$ con $j_U(s) \stackrel{\text{def}}{=} (s_x)_{x \in U} = 0$ en $\mathcal{F}^+(U)$. Por definición de $\mathcal{F}_x$, $\exists U = \cup_{i \in I} U_i$ cubrimiento abierto con $s|_{U_i} = 0$ para todo $i \in I$. Luego, $s = 0$ pues $\mathcal{F}$ haz. $\square$
- SOBREYECTIVIDAD: Sean $(s_x)_{x \in U} \in \mathcal{F}^+(U)$ gérmenes compatibles. Por definición, $\exists U = \cup_{i \in I} U_i$ cubrimiento abierto y $\sigma_i \in \mathcal{F}(U_i)$ con $(\sigma_i)_x = s_x$ para todo $x \in U_i$. Luego, $(\sigma_i)_x = (\sigma_j)_x$ para $x \in U_i \cap U_j$. Como j_U inyectiva, $\sigma_i|_{U_i \cap U_j} = \sigma_j|_{U_i \cap U_j} \ \forall i, j \in I$ y luego $\exists! \sigma \in \mathcal{F}(U)$ con $\sigma|_{U_i} = \sigma_i$ para todo $i \in I$ (pues $\mathcal{F}$ haz). Así, $\sigma_x = s_x \ \forall x \in U$. $\square$

TEOREMA: HAZ ASOCIADO A UN PREHAZ

Sea $\mathcal{F}$ un prehaz de grupos abelianos en X . Entonces, el haz $\mathcal{F}^+$ junto con el morfismo canónico $j : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}^+$ cumplen la propiedad universal siguiente:

Para todo haz $\mathcal{G}$ en X y todo morfismo de prehaces $\varphi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$, $\exists!$ morfismo de haces $\varphi^+ : \mathcal{F}^+ \rightarrow \mathcal{G}$ tal que

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F} & \xrightarrow{\varphi} & \mathcal{G} \\ j \downarrow & \nearrow \exists! \varphi^+ & \\ \mathcal{F}^+ & & \end{array}$$

es un diagrama conmutativo.

Así, el par $(\mathcal{F}^+, j)$ es único módulo un único isomorfismo. Diremos que $\mathcal{F}^+$ es el **haz asociado** a $\mathcal{F}$ (o **hacificación** de $\mathcal{F}$).

Functorialidad de j : todo morfismo de prehaces $\varphi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ induce un morfismo de haces $\varphi^+ : \mathcal{F}^+ \rightarrow \mathcal{G}^+$ tal que $j \circ \varphi = \varphi^+ \circ j$. Además, si $\mathcal{G}$ es un haz entonces $j : \mathcal{G} \xrightarrow{\sim} \mathcal{G}^+$ (Lema anterior), lo que da el φ^+ del enunciado. La *Unicidad* de φ^+ queda como **Ejercicio**. □