

Geometría Algebraica

MAT427 — Clase 1

PEDRO MONTERO

UNIVERSIDAD TÉCNICA FEDERICO SANTA MARÍA
VALPARAÍSO, CHILE

3 DE AGOSTO DE 2026

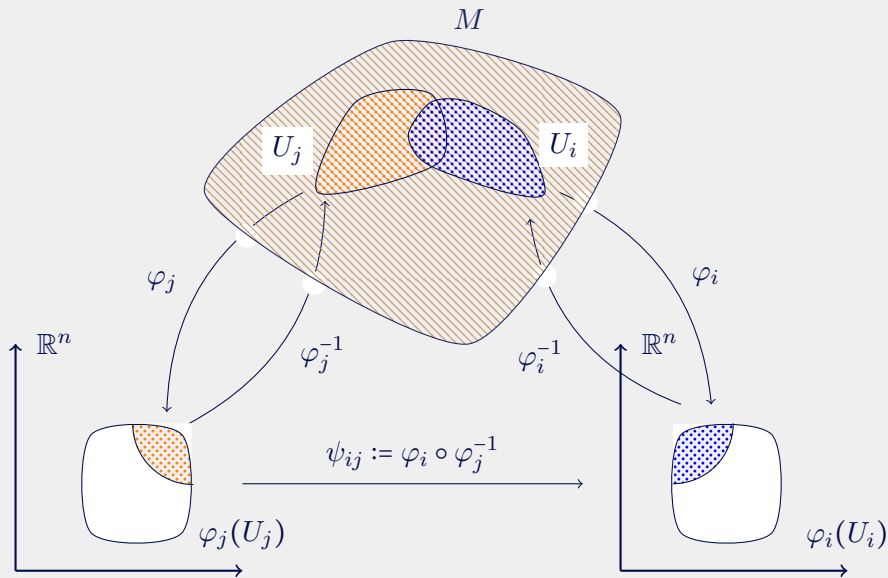
MOTIVACIÓN HISTÓRICA

Una **variedad diferenciable** M está dada por

- *Cartas locales*: homeomorfismos $\varphi_i : U_i \xrightarrow{\sim} V_i := \varphi_i(U_i) \subseteq \mathbb{R}^n$,
- *Cambios de carta*: $\psi_{ij} := \varphi_i \circ \varphi_j^{-1}$, de clase $\mathcal{C}^\infty$ en $\varphi_j(U_i \cap U_j) \subseteq \mathbb{R}^n$.

Así, M luce localmente como $\mathbb{R}^n$.

VARIEDADES DIFERENCIABLES



$f : M \rightarrow \mathbb{R}$ es una **función diferenciable** si para toda carta local $\varphi_i : U_i \xrightarrow{\sim} V_i$ la composición

$$F_i := f \circ \varphi_i^{-1} : V_i \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \longmapsto F_i(\mathbf{x})$$

es de clase $\mathcal{C}^\infty$.

Ejemplo: las funciones coordenada $x_j : U_i \rightarrow \mathbb{R}$, definidas por $\varphi_i(p) = (x_1(p), \dots, x_n(p))$, son diferenciables.

Leitmotiv

Si conocemos **todas** las posibles funciones diferenciables en una variedad M , entonces podemos conocer dicha variedad al determinar las funciones coordenada en cada carta.

OBSERVACIÓN CLAVE (A. GROTHENDIECK)

Hay 2 formas equivalentes de definir qué es una variedad diferenciable M :

- 1 A partir de un **atlas** (i.e., cartas locales y cambios de cartas).
- 2 A partir de un “**haz**” $\mathcal{F} := \mathcal{C}_M^\infty$ de **funciones regulares**

$$U \subseteq M \text{ abierto} \mapsto \mathcal{F}(U) = \mathcal{C}_M^\infty(U) := \{f : U \longrightarrow \mathbb{R}\},$$

tal que $\forall p \in M$ existen abiertos $p \in U_p \subseteq M$ y $V_p \subseteq \mathbb{R}^n$ con $\mathcal{C}_M^\infty(U_p) \cong \mathcal{C}^\infty(V_p)$ isomorfas como $\mathbb{R}$ -álgebras.

El segundo punto de vista (menos tradicional) señala que M está determinada por todas sus funciones regulares.

Ventaja matemática

Permite cambiar $\mathbb{R}$ por **otros cuerpos** (¡o incluso anillos!): son los primeros pasos de la **geometría algebraica**.



A. GROTHENDIECK (1928–2014). Medalla Fields 1966.

§1.1 CATEGORÍAS Y FUNCTORES

CATEGORÍAS E ISOMORFISMOS

Una **categoría** $\mathcal{C}$ consiste en:

- 1 Una colección de **objetos**, denotada $\text{Obj}(\mathcal{C})$.
- 2 Para todo par de objetos A, B en $\mathcal{C}$, un conjunto $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ cuyos elementos son llamados **morfismos**, tales que:
 - (a) existe una composición
$$\text{Hom}(A, B) \times \text{Hom}(B, C) \longrightarrow \text{Hom}(A, C), (f, g) \longmapsto g \circ f;$$
 - (b) la composición es asociativa, i.e., $(g \circ f) \circ h = g \circ (f \circ h)$;
 - (c) todo objeto A posee un (único) morfismo $\text{Id}_A \in \text{Hom}(A, A)$ neutro para $\circ$.

Isomorfismos

Un **isomorfismo** es un morfismo $f \in \text{Hom}(A, B)$ tal que $\exists! g \in \text{Hom}(B, A)$ con $f \circ g = \text{Id}_B$ y $g \circ f = \text{Id}_A$; escribimos $A \cong B$. Un **automorfismo** de A es un isomorfismo en $\text{Hom}(A, A)$.

Abuso de notación: los $\text{Hom}(A, B)$ son conjuntos *arbitrarios*, pero es común denotar $\varphi : A \rightarrow B$ cuando $\varphi \in \text{Hom}(A, B)$, y escribir “ $A \in \mathcal{C}$ ” cuando $A \in \text{Obj}(\mathcal{C})$.

EJEMPLOS DE CATEGORÍAS

Las categorías más comunes que usaremos son:

- ❶ **Conj**, la categoría de conjuntos.
- ❷ **Anillos**, la categoría de anillos.
- ❸ **An**, la categoría de anillos conmutativos con unidad.
- ❹ **Grp**, la categoría de grupos.
- ❺ **Ab**, la categoría de grupos abelianos.
- ❻ **Vec_k**, la categoría de k -espacios vectoriales.
- ❼ **A-Mod**, la categoría de A -módulos.
- ❽ **Top**, la categoría de espacios topológicos.
- ❾ **Man[∞]**, la categoría de variedades diferenciables (de clase $\mathcal{C}^\infty$).

Cada una con sus morfismos evidentes (**Ejercicio: describirlos**).

EJEMPLOS IMPORTANTES

Categoría de A -módulos

La categoría $A\text{-Mod}$ cumple que cada $\text{Hom}_A(M, N)$ es un grupo abeliano. Más adelante, diremos que $A\text{-Mod}$ es una *categoría abeliana*. Notar que si $A = k$ entonces $k\text{-Mod} = \mathbf{Vec}_k$, y si $A = \mathbb{Z}$ entonces $\mathbb{Z}\text{-Mod} = \mathbf{Ab}$.

Categoría asociada a un espacio topológico

Sea X un espacio topológico. Definimos la categoría $\mathbf{Top}(X)$ como la categoría cuyos objetos son los abiertos de X , y cuyos morfismos son:

$$\text{Hom}(U, V) = \begin{cases} \{\iota : U \hookrightarrow V\} & \text{si } U \subseteq V \\ \emptyset & \text{si } U \not\subseteq V \end{cases}$$

(Ejercicio: describir la composición de morfismos).

FUNCTORES COVARIANTES Y CONTRAVARIANTES

Un **functor covariante** $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ asigna a cada $A \in \text{Obj}(\mathcal{C})$ un objeto $F(A) \in \text{Obj}(\mathcal{D})$, y a cada morfismo $f : A \rightarrow B$ en $\mathcal{C}$ un morfismo $F(f) : F(A) \rightarrow F(B)$ en $\mathcal{D}$, de manera compatible con la identidad y la composición:

- (a) $F(\text{Id}_A) = \text{Id}_{F(A)}$ para todo $A \in \text{Obj}(\mathcal{C})$;
- (b) $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$ para todos $f : A \rightarrow B$ y $g : B \rightarrow C$ en $\mathcal{C}$.

En particular, si $A \cong B$ en $\mathcal{C}$, entonces $F(A) \cong F(B)$ en $\mathcal{D}$.

Functor contravariante

$F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ es **contravariante** si invierte las flechas: a $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ le asocia $F(f) : F(B) \rightarrow F(A)$, y entonces $F(g \circ f) = F(f) \circ F(g)$.

- ❶ **Functor identidad:** $\text{Id}_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ definido por $\text{Id}_{\mathcal{C}}(A) = A$ y $\text{Id}_{\mathcal{C}}(f) = f$.
- ❷ **Funtores de olvido:** permiten “olvidar” estructura extra. E.g., $\mathbf{An} \rightarrow \mathbf{Conj}$ asocia al anillo $(A, +, \cdot)$ el conjunto A subyacente, y al morfismo de anillos $f : A \rightarrow B$ la función f .
- ❸ **Extensión de escalares:** si $A \in \mathbf{An}$ y B es una A -álgebra, entonces

$$F : A\text{-Mod} \longrightarrow B\text{-Mod}, M \longmapsto M \otimes_A B$$

es un functor covariante.

PULLBACK Y PUSHFORWARD

Sea A un anillo abeliano y P un A -módulo.

- ④ $F : A\text{-Mod} \rightarrow \mathbf{Ab}$, $M \mapsto \text{Hom}_A(M, P)$ es **contravariante** y se denota $\text{Hom}_A(\cdot, P)$. Si $f : M \rightarrow N$ es un morfismo en $A\text{-Mod}$, el morfismo $F(f) \stackrel{\text{def}}{=} f^*$ es el **pullback** de f :

$$f^* : \text{Hom}_A(N, P) \longrightarrow \text{Hom}_A(M, P), \varphi \mapsto \varphi \circ f.$$

- ⑤ $F : A\text{-Mod} \rightarrow \mathbf{Ab}$, $M \mapsto \text{Hom}_A(P, M)$ es **covariante** y se denota $\text{Hom}_A(P, \cdot)$. Si $f : M \rightarrow N$ es un morfismo en $A\text{-Mod}$, el morfismo $F(f) \stackrel{\text{def}}{=} f_*$ es el **pushforward** de f :

$$f_* : \text{Hom}_A(P, M) \longrightarrow \text{Hom}_A(P, N), \varphi \mapsto f \circ \varphi.$$

§1.2 TRANSFORMACIONES NATURALES Y FUNCTORES ADJUNTOS

¿CUÁNDO DOS CATEGORÍAS $\mathcal{C}$ Y $\mathcal{D}$
SON “ISOMORFAS”?

TRANSFORMACIÓN NATURAL ENTRE FUNCTORES

Sean $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ y $G : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ dos funtores covariantes.

Una **transformación natural** $\varphi : F \rightarrow G$ es una colección de aplicaciones $\{\varphi_A : F(A) \rightarrow G(A)\}_{A \in \text{Obj}(\mathcal{C})}$ compatibles con los morfismos entre ellos:

Para todo $f : A \rightarrow B$ morfismo en $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ el diagrama

$$\begin{array}{ccc} F(A) & \xrightarrow{F(f)} & F(B) \\ \varphi_A \downarrow & & \downarrow \varphi_B \\ G(A) & \xrightarrow{G(f)} & G(B) \end{array}$$

es conmutativo (i.e. $\varphi_B \circ F(f) = G(f) \circ \varphi_A$).

En particular, si cada $\varphi_A : F(A) \xrightarrow{\sim} G(A)$ es un isomorfismo en $\mathcal{D}$ entonces decimos que $\varphi : F \xrightarrow{\sim} G$ es un **isomorfismo natural** entre F y G .

EQUIVALENCIA DE CATEGORÍAS

Si $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ y $G : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}$ son funtores covariantes, su composición $G \circ F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C}$ se define por $(G \circ F)(A) := G(F(A))$ y $(G \circ F)(f) := G(F(f))$.

Categorías equivalentes

Decimos que $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ son **equivalentes** si existen funtores covariantes $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ y $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ e isomorfismos naturales

$$G \circ F \xrightarrow{\sim} \text{Id}_{\mathcal{C}} \quad \text{y} \quad F \circ G \xrightarrow{\sim} \text{Id}_{\mathcal{D}}.$$

En este caso, decimos que F y G definen una **equivalencia de categorías**.

Ejercicio: sean $\mathcal{V}_k$ la categoría con objetos $\{k^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ y $\text{Hom}(k^n, k^m) := M_{m \times n}(k)$, y $\mathbf{Vec}_k^{\text{fin}}$ la de k -espacios vectoriales de dimensión finita. Verificar que el functor “elegir base” define una equivalencia $\mathcal{V}_k \simeq \mathbf{Vec}_k^{\text{fin}}$.

Más adelante, veremos que para un cuerpo k :

Hay una equivalencia entre las categorías de “**variedades algebraicas afines sobre k** ” y de “ **k -álgebras (abelianas) finitamente generadas y reducidas** (i.e. sin nilpotentes no-nulos)”.

Esto permitirá generalizar al contexto algebraico la equivalencia entre las dos formas posibles de definir una variedad diferenciable (cf. primera parte de esta clase).

Si $u : H \rightarrow H$ es un operador lineal acotado en un espacio de Hilbert H , el [Teorema de representación de Riesz \(1907\)](#) implica que existe un único $u^* : H \rightarrow H$ lineal acotado, el **adjunto** de u , tal que

$$\langle u(f), g \rangle = \langle f, u^*(g) \rangle \quad \text{para todos } f, g \in H.$$

Esta noción se generaliza naturalmente al contexto de categorías:

FUNCTORES ADJUNTOS

Sean $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ y $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ funtores covariantes. Decimos que (F, G) es un par de **funtores adjuntos** si $\forall A \in \text{Obj}(\mathcal{C}), B \in \text{Obj}(\mathcal{D})$ hay una *biyección natural*

$$\tau_{AB} : \text{Hom}_{\mathcal{D}}(F(A), B) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, G(B)),$$

i.e., si $f : A_2 \rightarrow A_1$ y $g : B_1 \rightarrow B_2$ son morfismos en $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$, resp., entonces:

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_{\mathcal{D}}(F(A_1), B_1) & \xrightarrow[\tau_{A_1 B_1}]{\sim} & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A_1, G(B_1)) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{Hom}_{\mathcal{D}}(F(A_2), B_2) & \xrightarrow[\tau_{A_2 B_2}]{\sim} & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A_2, G(B_2)) \end{array}$$

es conmutativo¹. En este caso, decimos que F es el **adjunto izquierdo** de G , y que G es el **adjunto derecho** de F , y escribimos $F \dashv G$.

¹La flecha vertical izquierda se obtiene mediante $F(f) : F(A_2) \rightarrow F(A_1)$ al considerar un morfismo $h : F(A_1) \rightarrow B_1$ y asociarle $g \circ h \circ F(f) : F(A_2) \rightarrow B_2$.

ADJUNCIÓN ENTRE $(\cdot) \otimes_A N$ Y $\text{Hom}_A(N, \cdot)$

Sean A un anillo y M, N, P tres A -módulos, y sea $\text{Bil}_A(M \times N, P)$ el conjunto de aplicaciones A -bilineales $B : M \times N \rightarrow P$. La *propiedad universal* de $\otimes_A$ y el morfismo $B \mapsto \widehat{B} : M \rightarrow \text{Hom}_A(N, P)$, $m \mapsto B(m, \cdot)$ dan dos descripciones del mismo objeto:

$$\text{Hom}_A(M \otimes_A N, P) \cong \text{Bil}_A(M \times N, P) \cong \text{Hom}_A(M, \text{Hom}_A(N, P)),$$

es decir,

$$\underbrace{\text{Hom}_A(M \otimes_A N, P)}_{:=F(M)} \cong \text{Hom}_A(M, \underbrace{\text{Hom}_A(N, P)}_{:=G(P)}) \quad (\star)$$

Con un poco de paciencia, se verifica que $(\star)$ es *functorial*, y así

$$\begin{array}{ccc} F : A\text{-Mod} \longrightarrow A\text{-Mod} & \text{y} & G : A\text{-Mod} \longrightarrow A\text{-Mod} \\ M \longmapsto M \otimes_A N & & P \longmapsto \text{Hom}_A(N, P) \end{array}$$

son adjuntos para todo N *fijo*: $(\cdot) \otimes_A N \dashv \text{Hom}_A(N, \cdot)$.

Caso particular importante

Si $A = k$ es un cuerpo y U, V, W son k -espacios vectoriales de dimensión finita, entonces^a $\text{Hom}_k(V, W) \cong V^* \otimes_k W$, y por ende

$$\text{Hom}_k(U \otimes_k V, W) \cong \text{Hom}_k(U, V^* \otimes_k W).$$

En geometría, la notación $(\cdot)^*$ se reserva para el **pullback**, por lo que el espacio dual de un k -e.v. será denotado $V^\vee$, y el isomorfismo anterior se reescribe como:

$$\text{Hom}_k(U \otimes_k V, W) \cong \text{Hom}_k(U, V^\vee \otimes_k W).$$

^aExplícitamente, $V^* \otimes_k W \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_k(V, W)$ envía el tensor simple $\varphi \otimes w$ en la aplicación lineal $v \mapsto \varphi(v)w$; es inyectiva entre espacios de la misma dimensión finita, y luego un isomorfismo.