

CURVAS ALGEBRAICAS (MAT426)

Pedro MONTERO
pedro.montero@usm.cl

El objetivo de este curso es que las y los estudiantes se introduzcan a la geometría algebraica. El principal objeto de estudio de la geometría algebraica son las variedades algebraicas, las cuales son objetos geométricos que están definidos (localmente) por sistemas de ecuaciones polinomiales. Un ejemplo notable es la ecuación

$$x^3 + y^3 = z^3.$$

Si suponemos que las soluciones (x, y, z) son *enteras* entonces se sabe que dicha ecuación no posee soluciones no-triviales (Euler, 1760). Por otra parte, si suponemos que las soluciones son *complejas* entonces se sabe que el objeto geométrico que describe las soluciones de la ecuación es una curva elíptica (objeto muy importante en geometría, teoría de números, criptografía, etc).

Dado que en general existen demasiadas ecuaciones polinomiales a considerar, generalmente se imponen restricciones para estudiar dichas variedades algebraicas. Ejemplos de dichas restricciones pueden ser la cantidad de variables, la cantidad de polinomios, el grado de los polinomios, etc. Finalmente, otro tipo de restricciones interesantes son aquellas que involucran la *geometría* de la variedad algebraica definida por dichas ecuaciones polinomiales, como por ejemplo que el objeto sea suave (o que no tenga singularidades demasiado malas), que tenga una dimensión determinada, que posea ciertas formas diferenciales, etc.

Estas primeras restricciones sobre los polinomios son el objeto de interés de la *geometría algebraica clásica*, mientras que el segundo punto de vista ha sido el predominante desde la reformulación de la geometría algebraica en los años 60 por la escuela de Grothendieck, y es por lo cual es que nos referimos a él como *geometría algebraica moderna*.

En otras palabras, y más precisamente, el objetivo de este curso es introducir las nociones básicas de la geometría algebraica moderna. En particular, se estudiarán algunos de los invariantes geométricos más importantes tales como los divisores, grupos de cohomología y el haz dualizante. Adicionalmente, se estudiarán algunos ejemplos remarcables provenientes de la geometría algebraica clásica tales como las hipersuperficies en espacios proyectivos, las variedades grassmannianas y los blow-up de variedades a lo largo de sub-variedades, entre otros. Finalmente, aplicaremos los resultados y métodos estudiados para analizar el caso de **curvas algebraicas** (i.e., variedades algebraicas de dimensión 1).

La planificación aproximada (y las referencias asociadas) del curso es la siguiente. Como regla general, trataré de dar a lo más dos referencias principales (donde probablemente considero que está mejor escrito el tema en cuestión), y luego daré referencias adicionales donde está escrito esencialmente lo mismo (lo que no impide que quizás ustedes pueden pensar que está más claro allí).

1. Lenguaje de categorías, funtores, transformaciones naturales, adjuntos, etc.
 - (a) **Principal:** [Vakil, Capítulo 1] y [MIT, §6].
 - (b) **Adicional:** [Lang, §11].
 - (c) **Ayudantía:** [Vakil, §1.1–§1.5].
2. Prehaces y haces. Espacios anillados.
 - (a) **Principal:** [Debarre, Capítulo 6] (en francés) y [Vakil, Capítulo 2].
 - (b) **Adicional:** [Hartshorne, Capítulo II.§1], [Le Potier, Capítulo 1.§1] (en francés), [Miranda, Capítulo IX.§1–§2], [RedBook, Capítulo 1.§4], [Perrin, Capítulo III], [FAC, Capítulo I.§1] (en francés), [Shafa2, Capítulo 5.§2].
 - (c) **Ayudantía:** [Vakil, Capítulo 2].
3. Variedades afines, funciones regulares, morfismos.
 - (a) **Principal:** [Debarre, Capítulo 1] (en francés) y [Shafa1, Capítulo 1.§2].
 - (b) **Adicional:** [Fulton, Capítulo 2], [Harris, §2], [Hartshorne, Capítulo 1.§3], [Le Potier, Capítulo 1.§2.3 & §2.5] (en francés), [Perrin, Capítulo I.§3], [Undergrad, Capítulo II.§4].
 - (c) **Ayudantía:** [Harris, §1–§2].
4. Variedades algebraicas, producto de variedades, separación.

- (a) **Principal:** [Le Potier, Capítulo 1.§2.6–2.9] (en francés) y [RedBook, Capítulo I.§5–§6].
- (b) **Adicional:** [Fulton, Capítulo 6.§1–§4], [Hartshorne, Capítulo II.§2 & §4], [Shafa2, Capítulo 5.§3–§4].
- (c) **Ayudantía:** [Toric, Capítulo 1].
5. Variedades proyectivas, incrustación de Segre y de Veronese, Grassmannianas.
- (a) **Principal:** [Debarre, Capítulo 2] (en francés) y [Fulton, Capítulo 4].
- (b) **Adicional:** [Harris, §1, §2 & §6], [Hartshorne, Capítulo I.§2], [Le Potier, Capítulo 1.§2.10–2.12] (en francés), [Mumford, Capítulo 2], [Perrin, Capítulo II], [Undergrad, Capítulo III.§5], [Shafa1, Capítulo 1.§4–§5].
- (c) **Ayudantía:** [Harris, §2 & §6].
6. Componentes irreducibles, funciones racionales y dimensión.
- (a) **Principal:** [Debarre, Capítulo 3] (en francés) y [Fulton, Capítulo 6].
- (b) **Adicional:** [Harris, §7 & §11], [Hartshorne, Capítulo I.§4], [Le Potier, Capítulo 1.§3–§5], [Perrin, Capítulo IV], [Undergrad, Capítulo III.§5–§6], [Shafa1, Capítulo 1.§6], [Vakil, Capítulo 11].
- (c) **Complemento de álgebra conmutativa:** [MIT, §21], [AM, Capítulo 11], [Eisenbud, Capítulo II.§8.1–§8.2].
- (d) **Ayudantía:** [Harris, §7 & §11].
7. Morfismos finitos.
- (a) **Principal:** [Le Potier, Capítulo 1.§6–§7] (en francés) y [Vakil, Capítulo 7].
- (b) **Adicional:** [Debarre, Capítulo 3] (en francés), [Fulton, Capítulo 1.§1.8–§1.9], [Harris, págs. 178–179], [Hartshorne, Capítulo II, §3], [RedBook, Capítulo II.§7], [Perrin, Capítulo IV.§4], [Shafa1, Capítulo 1.§5.3–§5.4].
- (c) **Complemento de álgebra conmutativa:** [MIT, §10 & §14], [AM, Capítulo 5], [Eisenbud, Capítulo I.§4], [Lang, Capítulo VII].
- (d) **Ayudantía:** [Perrin, Capítulo IV].
8. Puntos lisos, Teorema de Bertini y Teorema principal de Zariski.
- (a) **Principal:** [Debarre, Capítulo 4] (en francés) y [Vakil, Capítulo 12].
- (b) **Adicional:** [Harris, §14], [Hartshorne, Capítulo I.§5], [Le Potier, Capítulo 1.§8–§9] (en francés), [Mumford, Capítulo 3], [RedBook, Capítulo III.§4–§9], [Perrin, Capítulo V], [Undergrad, Capítulo III.§6], [Shafa1, Capítulo 1.§1, §3, §5, §6].
- (c) **Ayudantía:** [Harris, §14 & §17].
9. Fibrados vectoriales.
- (a) **Principal:** [Le Potier, Capítulo 2.§1] (en francés) y [Shafa2, Capítulo 6.§1.1–1.3].
- (b) **Adicional:** [Hartshorne, Capítulo II.§5], [Vakil, Capítulo 13.§1].
- (c) **Ayudantía:** [Vakil, Capítulo 13.§1].
10. Haces localmente libres y haces invertibles asociados a un divisor.
- (a) **Principal:** [Debarre, Capítulo 5] (en francés) y [Vakil, Capítulo 14].
- (b) **Adicional:** [Hartshorne, Capítulo II.§6], [Le Potier, Capítulo 2.§2] (en francés), [Miranda, Capítulo XI], [Shafa1, Capítulo 3.§1.1–§1.4], [Shafa2, Capítulo 6.§1.4].
- (c) **Ayudantía:** [Vakil, Capítulo 14].
11. Grupo de Picard y sistemas lineales.
- (a) **Principal:** [Le Potier, Capítulo 2.§3] (en francés) y [Vakil, Capítulo 16].
- (b) **Adicional:** [Hartshorne, Capítulo II.§6–§7], [Mumford, Capítulo 6], [Shafa1, Capítulo 3.§1.5].
- (c) **Ayudantía:** [Debarre, Capítulo 5] (en francés).
12. Haces coherentes.
- (a) **Principal:** [FAC, Capítulo I.§2] (en francés) y [Shafa2, Capítulo 6.§3].

- (b) **Adicional:** [Debarre, Capítulo 6.§3] (en francés), [Hartshorne, Capítulo II.§5], [Le Potier, Capítulo 2.§4] (en francés), [RedBook, Capítulo III.§1–§2], [Perrin, Capítulo III.§7 & §9], [Vakil, Capítulo 13].
- (c) **Ayudantía:** [Vakil, Capítulo 13].
13. Cohomología de Čech.
- (a) **Principal:** [Debarre, Capítulo 6] (en francés) y [Vakil, Capítulo 18.§1–§3].
- (b) **Adicional:** [Hartshorne, Capítulo III.§4], [Le Potier, Capítulo 3.§4] (en francés), [Perrin, Capítulo VII], [FAC, Capítulo I.§3–§4] (en francés).
- (c) **Motivación:** [Miranda, Capítulo VI.§2] y [Miranda, Capítulo IX.§3].
- (d) **Formulario cohomológico:** [Chapters, §B.9].
- (e) **Ayudantía:** [Vakil, Capítulo 18.§1–§3]
14. Álgebra homológica y funtores derivados.
- (a) **Principal:** [Le Potier, Capítulo 3.§1–§2] (en francés) y [Fourier, Capítulo 2.§1–§2].
- (b) **Adicional:** [Hartshorne, Capítulo III.§1–§3], [Lang, Capítulo XX].
- (c) **Ayudantía:** [Vakil, Capítulo 23].
15. Teoremas de anulación y finitud.
- (a) **Principal:** [Le Potier, Capítulo 3.§5] (en francés) y [Vakil, Capítulo 18.§7–§9].
- (b) **Adicional:** [Hartshorne, Capítulo III.§2 & §8].
- (c) **Ayudantía:** [Vakil, Capítulo 18.§7–§9].
16. Dualidad de Serre y de Grothendieck.
- (a) **Principal:** [Le Potier, Capítulo 3.§6] (en francés) y [Vakil, Capítulo 30]
- (b) **Adicional:** [Hartshorne, Capítulo III.§6–§7].
- (c) **Ayudantía:** [Vakil, Capítulo 18.§5].
17. Teorema de Riemann-Roch para curvas algebraicas.
- (a) **Principal:** [Le Potier, Capítulo 4] (en francés) y [Fulton, Capítulo 8].
- (b) **Adicional:** [Debarre, Capítulo 7] (en francés), [Hartshorne, Capítulo IV.§1–§3], [Miranda, Capítulo VI], [Mumford, Capítulo 7.§C], [Perrin, Capítulo VIII], [Shafar1, Capítulo 3.§7].
- (c) **Ayudantía:** [Vakil, Capítulo 18.§4]

Observación: Varias de las referencias del curso (y que están particularmente bien escritas y bien estructuradas) están en francés... *c'est la vie*. Un glosario matemático entre inglés y francés será muy útil: ver [aquí](#). De todas maneras, al menos una de las referencias principales siempre estará en inglés.

Prerrequisitos: Asumiré solamente conocimientos básicos sobre anillos y módulos principalmente (por ejemplo, el Capítulo 4 del apunte [MAT214] de Estructuras Algebraicas). Es bueno saber un poco de topología (definición de topología, continuidad, conexidad, etc: el curso de Análisis I es suficiente) y ciertamente ayudaría tener la intuición y conocimientos de geometría diferencial (aunque no lo asumiré).

Seminario de Geometría Algebraica Valparaíso: El primer semestre del año 2019 organizamos en conjunto con Gonzalo MANZANO (USACH) un grupo de lectura semanal sobre geometría algebraica, y varios de los tópicos del curso fueron tocados allí. Ver [aquí](#).

Macaulay2: Si bien muchos cálculos pueden ser hechos a mano, no está demás tener una ayuda computacional. Personalmente recomiendo mucho el software libre [Macaulay2](#), cuya versión online pueden encontrar [aquí](#). Ver también [M2], donde pueden encontrar muchos ejemplos detallados.

Cualquier duda pueden enviarme un e-mail a pedro.montero@usm.cl.

Pedro MONTERO
Departamento de Matemática
UTFSM, Valparaíso

Referencias

- [MIT] A. ALTMAN & S. KLEIMAN, "A Term in Commutative Algebra". Disponible [aquí](#).
- [AM] M. F. ATIYAH & I. G. MACDONALD, "Introduction to Commutative Algebra".
- [Debarre] O. DEBARRE, "Introduction à la géométrie algébrique". Disponible [aquí](#).
- [Eisenbud] D. Eisenbud, "Commutative Algebra with a View Towards Algebraic Geometry".
- [M2] D. Eisenbud, D. R. Grayson, M. Stillman & B. Sturmfels, "Computations in Algebraic Geometry with Macaulay 2".
- [Fulton] W. FULTON, "Algebraic Curves".
- [Toric] W. FULTON, "Introduction to Toric Varieties".
- [Harris] J. HARRIS, "Algebraic Geometry: A First Course".
- [Hartshorne] R. HARTSHORNE, "Algebraic Geometry".
- [Fourier] D. HUYBRECHTS, "Fourier–Mukai transforms in algebraic geometry".
- [Lang] S. LANG, "Algebra".
- [Le Potier] J. LE POTIER, "Géométrie Algébrique". Disponible [aquí](#).
- [Miranda] R. MIRANDA, "Algebraic curves and Riemann surfaces".
- [MAT214] P. MONTERO, "Álgebra Abstracta". Disponible [aquí](#).
- [Mumford] D. MUMFORD, "Algebraic Geometry I".
- [RedBook] D. MUMFORD, "The Red Book of Varieties and Schemes".
- [Perrin] D. PERRIN, "Algebraic Geometry: An introduction".
- [Chapters] M. REID, "Chapters on Algebraic Surfaces". Disponible [aquí](#).
- [Undergrad] M. REID, "Undergraduate Algebraic Geometry".
- [FAC] J.-P. SERRE, "Faisceaux Algébriques Cohérents".
- [Shafa1] I. R. Shafarevich, "Basic Algebraic Geometry 1: Varieties in Projective Space".
- [Shafa2] I. R. Shafarevich, "Basic Algebraic Geometry 2: Schemes and Complex Manifolds".
- [Vakil] R. VAKIL, "The Rising Sea: Foundations of Algebraic Geometry". Disponible [aquí](#).