GEOMETRÍA DE VARIEDADES BANDERA

BENJAMIN VEGA

Resumen. En este artículo se enunciarán resultados geométricos en banderas de espacios vectoriales, más en particular, de hechos que se descrubren a partir de notar que una bandera posee estructura de variedad algebraica.

Índice

1. Introducción

En el contexto de espacios vectoriales, consideramos el espacio vectorial $V \cong \mathbb{C}^n$. La Grassmanniana $Gr(d,n)$ denota el conjunto de todos los subespacios vectoriales $\Lambda \leq V$ de dimensión $\dim_{\mathbb{C}}(\Lambda) = d$, que además es una variedad algebraica proyectiva. Por otro lado, una bandera se define como una colección de espacios vectoriales que satisface propiedades específicas, ofreciendo así una rica fuente de información geométrica. Exploraremos las definiciones y procesos asociados para verificar que una bandera constituye una variedad algebraica. Este enfoque nos permite generalizar la noción de Grassmanniana y explorar un nuevo tipo de variedad.

En este artículo descubriremos un nuevo tipo de variedad algebraica y estudiaremos sus propiedades geométricas. Para aquello, repasaremos resultados obtenidos al dotar a una variedad algebraica de estructura de grupo.

2. Notación, convenios y hechos preliminares

2.1. Convención. Durante todo el artículo, cuando se hable de variedades bandera trabajaremos con el cuerpo $\mathbb{C}$ de los números complejos.

2.2. Notación.

- Denotaremos por $V^\vee$ al espacio dual del espacio vectorial V.
- Denotaremos por (abuso de notación) $\overline{X} := \overline{X}^{Zar}$ a la clausura de X bajo la topología de Zariski.
- El subgrupo $G_x := \{g \in G \mid g \cdot x = x\}$ será llamado el grupo de isotropía de x, para cierto $x \in X$.
- Cuando se hable de un cuerpo, haremos uso de la letra K para no confundirse con el uso de la letra k como índice.

2.3. Hechos preliminares. Primero, definamos más formalmente la grassmanniana y veamos que esta es una variedad algebraica (proyectiva).

Definición 2.1. La Grassmanniana $Gr(d,n)$ es el conjunto de subespacios lineales $\Lambda \leq V \cong \mathbb{C}^n$ tales que $dim_{\mathbb{C}}(\Lambda) = d$.

Dado un subespacio E y una base $B_0 = \{v_1, ..., v_d\}$ de E, el producto exterior $v_1 \wedge ... \wedge v_m \in \bigwedge^d \mathbb{C}^n$ solo depende de E módulo multiplicación por un escalar (distinto de 0). Dicho de otra forma, el punto

$$\iota(E) := [v_1 \wedge ... \wedge v_d]$$

del espacio proyectivo $\mathbb{P}(\bigwedge^d \mathbb{C}^n)$ solo depende de E. Además, $\iota(E)$ está únicamente determinado por E, por lo que el morfismo ι identifica a $Gr(d,n)$ con su imagen en $\mathbb{P}(\bigwedge^d \mathbb{C}^n)$ del cono de $d-$vectores descomponibles en $\mathbb{P}(\bigwedge^d \mathbb{C}^n)$. Se sigue que la grassmanniana es una subvariedad del espacio proyectivo $\mathbb{P}(\bigwedge^d \mathbb{C}^n)$ vía

$$\iota : Gr(d,n) \to \mathbb{P}(\bigwedge^d \mathbb{C}^n)$$

lo que se conoce como el **incrustamiento de Plücker**.

Definición 2.2. Dada una secuencia $(d_1, ..., d_m)$ de valores positivos cuya suma es n, una bandera de tipo $(d_1, ..., d_m)$ en $\mathbb{C}^n$ es una secuencia creciente de subespacios lineales

$$0 = V_0 \subset V_1 \subset \cdots \subset V_m = \mathbb{C}^n$$

tales que $dim_{\mathbb{C}}(V_j/V_{j-1}) = d_j$, con $j \in \{1, ..., m\}$. Las banderas coordenadas son aquellas banderas que consisten en subespacios coordenados, es decir, aquellos generados por subconjuntos de la base canónica de V.

Adicionalmente, introduciremos una notación alternativa para la grassmanniana que se puede extender al contexto de banderas. Ésta notación es conocida como la notación de Grothendieck.

Notación 2.3. Sea $V \cong \mathbb{C}^{n+1}$. Para cierto $d \in \{1, ..., n\}$ le asociamos el conjunto $A_n(d)$ de subsespacios $\Lambda \leq V$ de dimensión $dim_{\mathbb{C}}(\Lambda) = d$ el cual puede ser dotado de estructura de variedad algebraica proyectiva. Para $d \in \{1, n\}$ tenemos que

$$A_n(1) = \mathbb{P}(V^{\vee}),\ A_n(n) = \mathbb{P}(V)$$

mientras que para los demás valores de d, el conjunto $A_n(d)$ se identifica con la grasmanniana $Gr(d,n)$. Podemos extenderla al contexto de banderas denotando por $A_n(d_1, ..., d_m)$ a la bandera de tipo $(d_1, ..., d_m)$.

3. Grupos algebraicos y Variedades racionales homogeneas

Definición 3.1. Un grupo algebraico es una variedad G, dotada de estructura de grupos, y tal que la multiplicación e inversión:

$$\varphi : G \times G \to G,\ (g_1, g_2) \mapsto \varphi(g_1, g_2) := g_1 g_2$$
$$\iota : G \to G, g \mapsto \iota(g) := g^{-1}$$

son morfismos de variedades. Una acción algebraica de G en una variedad X es un morfismo:

$$a : G \times X \to X$$

que satisface $a(e,x) = x, \forall x \in X$, y $a(g, a(h,x)) = a(gh,x), \forall g,h \in G, \forall x \in X$. Siempre y cuando la acción sea clara en el contexto, escribiremos $gx := a(g,x)$.

Sea X una variedad proyectiva suave. Uno de los objetos asociados a X más importantes es su grupo de automorfismos $Aut(X)$, el cual es un grupo algebraico. Considerando su álgebra de Lie, la cual se define tomando el espacio tangente en la identidad del grupo de automorfismos, ie, definida como el álgebra de derivaciones de $\mathcal{O}(X)$, entonces tenemos:

$$Lie(Aut(X)) \cong H^0(X, T_X).$$

En escencia, mientras más grande es el conjunto $Aut(X)$, más simple será nuestra variedad.

Definición 3.2. Una variedad proyectiva X se dice homogenea si su grupo de automorfismos actúa transitivamente en X, es decir, si el morfismo de evaluación:

$$ev : Aut(X) \times X \to X,\ (g, x) \mapsto ev(g, x) := gx,$$

satisface que dados $x, y \in X$, existe $g \in Aut(X)$ tal que $gx = y$.

Observación 3.3. Sabemos que en carácterística cero, el grupo de automorfismos de una variedad proyectiva es reducido gracias a los resultados de Jean Cartier (revisar [FR66]), pero en general no es verdad que posee un número finito de componentes. De cualquier manera, se puede mostrar fácilmente que si X es homogeneo, entonces la componente conexa de la identidad la cual denotaremos por:

$$Aut^\circ(X) \subset Aut(X),$$

es un grupo algebraico conexo que actua transitivamente en X.

Proposición 3.4. *Sea X una variedad proyectiva. Entonces X es homogenea si y solo si T_X, su fibrado tangente, es generado globalmente.*

Demostración. Sea $G := Aut^\circ(X) \subset Aut(X)$, tal y como lo definimos anteriormente, G es un grupo algebraico con álgebra de Lie $H^0(X, T_X)$. Sea $x \in X$ un punto, y consideremos el morfismo

$$Gx : G \to X,\ g \mapsto gx$$

que describe la órbita de x. Su diferencial en la identidad $e \in G$ coincide con el morfismo de evaluación en x:

$$ev_x : H^0(X, T_X) \to T_X, x.$$

Concluimos señalando que Gx es sobreyectiva si y solo si ev_x es sobreyectiva. □

Observación 3.5. En particular, el fibrado tangente (y en particular, su determinante, el fibrado canónico) de una variedad homogenea es **nef** (numéricamente efectivo).

Definición 3.6. Se dice que un cuerpo K es perfecto si se cumple una de las siguientes condiciones:

- car(K) = 0
- car(K) = p primo y todo elemento de K es una p-ésima potencia.

Recordemos que una Variedad abeliana es definida como una variedad proyectiva que admite la estructura de grupo algebraico. La primera observacion importante que uno hace es que hay escencialmente dos diferentes tipos de grupos algebraicos: grupos afines y variedades abelianas. Más orecisamente, Chevalley probó en 1960 el siguiente resultado (cf. [CHE60])

Teorema 3.7. *Todo grupo algebraico conexo G sobre un cuerpo perfecto tiene un único subgrupo algebraico conexo afin H tal que G/H es una variedad abeliana.*

Definición 3.8. Una variedad proyectiva suave obtenida del cociente de un grupo algebraico conexo afín (es decir, que admite una accion transitiva de un grupo algebraico conexo afín) es llamada una variedad homogenea racional (en ciertos textos, abreviada como variedad RH, cf. [SOL19]).

En el caso de una variedad homogenea racional X, el fibrado tangente T_X no solo es **nef** sino que también satisface la propiedad de tener un determinante amplio. En otras palabras, las variedades RH son, por definición *variedades de Fano*. El recíproco de este enunciado, que dice que toda variedad suave de Fano con fibrado tangente **nef** es racional homogeneo, sigue a dia de hoy como un problema abierto, conocido como *la conjetura de Campana-Peternell*.

Proposición 3.9. *Para una variedad homogenea racional X, el divisor anticanónico $-K_X$ es amplio y globalmente generado.*

Definición 3.10. Dado un grupo G, su subgrupo conmutador es el subgrupo $G^{(1)} = [G, G]$ generado por todos los conmutadores $ghg^{-1}h^{-1}, g, h \in G$. Este es un subgrupo normal de G. Recursivamente definimos $G^{(d)} = [G^{(d-1)}, G^{(d-1)}]$, y las *series derivadas* de G como las secuencias de subgrupos

$$\cdots G^{(d)} \subset G^{(d-1)} \subset \cdots \subset G^{(1)} \subset G.$$

Un grupo se llama *soluble* si $G^{(k)} = \{e\}$ para cierto valor de d.

El ejemplo más emblemático de un grupo soluble conexo es el subgrupo de matrices triangulares superiores $T(V)$ de $GL_n(\mathbb{C})$, el grupo general lineal de $V \cong \mathbb{C}^{n+1}$. Además cualquier subgrupo de $T(V)$ es soluble también, y resultados teóricos de representaciones nos permiten representar subgrupos solubles conexos como subgrupos de T(V).

Teorema 3.11. *Sea $V \cong \mathbb{C}^{n+1}$ un espacio vectorial de dimensión finita $n+1$ y sea $G \subset GL(V)$ un subgrupo soluble conexo. Entonces existe una base de V tal que el correspondiente grupo $T(V)$ contiene a G.*

Este resultado se debe considerar en conjunto con el siguiente resultado.

Teorema 3.12. *Dado un grupo algebraico afín y un subgrupo cerrado $H \subset G$, existe una representación fiel V de G tal que, considerando la acción asociada en $\mathbb{P}(V^\vee)$, H es el grupo de isotropíade un punto $x \in \mathbb{P}(V^\vee)$. En particular, el espacio cociente G/H, identificado por la órbita de G de $x \in \mathbb{P}(V^\vee)$, es un abierto suave en cierta variedad proyectiva.*

Notemos que la acción de $T(V)$ en $\mathbb{P}(V^\vee)$ tiene un punto fijo $[e_1]$. Esta característica se puede extender a la siguiente propiedad clave de grupos solubles conexos.

Teorema 3.13. *(Teorema del punto fijo de Borel) La acción de un grupo algebraico soluble conexo en una variedad proyectiva X tiene a lo menos un punto fijo.*

Demostración. Probaremos el resultado por inducción. (el cuál es obvio para $dim(G) = 0$). El subgrupo normal $G^{(1)} = [G, G] \subset G$ es soluble de dimensión menor que la dimensión de G, por lo tanto el conjunto de puntos fijos $X' := X^{G^{(1)}}$ es un subconjunto cerrado (pues las órbitas pueden ser expresadas por V(f) para cierto $f \in \mathbb{O}(G)$) no vacío (por inducción) de X, en particular, proyectivo. Este conjunto es invariante bajo la acción de G (pues $G^{(1)}gX' = gG^{(1)}X' = gX', \forall g \in G$), lo cuál es suficiente para afirmar que $X'^G \neq \emptyset$.

Consideremos las órbitas de G en X'. Como $G^{(1)} \subset G_x, \forall x \in X'$, tenemos que G_x es normal, y con esto se prueba que $Gx = G/G_x$ es un grupo algebraico afín para todo x. Eligiendo un x tal que Gx sea de dimensión minimal, obtenemos que Gx es cerrada en X' y por lo tanto proyectiva. Como G es conexo, Gx es irreducible, y además tenemos que su haz de $K-$álgebras $K[Gx] = K$. Como también es afín, tenemos que $Gx = Spec(K[Gx]) = Spec(K)$, y por lo tanto, Gx consiste en solo un punto $Gx = \{x\}$. Esto concluye la demostración. □

Proposición 3.14. *Dado un grupo algebraico G, este contiene un único grupo conexo soluble maximal, llamado el* radical de G *denotado por $R(G)$.*

Definición 3.15. Un grupo se dice *semisimple* si y solo si $R(G) = \{e\}$

Dado un grupo algebraico G, su cociente por $R(G)$ siempre será un grupo semisimple. Además, se puede probar que si G es afín y actúa de forma transitiva sobre una variedad proyectiva X, entonces el cociente $G/R(G)$ también actúa sobre X, y también, con el objetivo de clasificar variedades RH, vamos a reducir el estudio al caso en el que el grupo G es semisimple.

Definición 3.16. Dado un grupo G, un subgrupo de Borel B de G es un subgrupo cerrado, soluble y conexo que no está contenido propiamente en ningún otro subgrupo de este tipo.

Observación 3.17. Es posible probar que un subgrupo de Borel de G contiene a $R(G)$, pero para eso se requieren conceptos que no serán vistos en este artículo, por lo que será asumido sin demostrar.

El ejemplo más emblemático de un subgrupo de Borel es, nuevamente, el subgrupo de matrices triangulares superiores $T(V) \subset GL(V)$, respecto a una cierta base.

Proposición 3.18. *Dado un grupo algebraico G y un subgrupo de Borel B de dimensión maximal, el cociente G/B es una variedad proyectiva.*

Demostración. Sketch de la demostración: Sin perdida de generalidad, asumiremos que G es conexo. El teorema 3.12 nos permite tomar un incrustamiento de G como un subgrupo cerrado de $GL(V)$, tal que $B = G_x$ para cierto $x \in \mathbb{P}(V^\vee)$, correspondiente al espacio vectorial $V_1 = \langle e_1 \rangle \subset V$. Por el teorema 3.11, la acción de B en V/V_1 se triagonaliza en una cierta base $\{e_2 + V_1, ..., e_n + V_1\}$. Entonces, con respecto a una base $\{e_1, ...e_n\}$, B está contenido en $T_n^+ \cap G$, el cual es el grupo de isotropía de la bandera $y = (\langle e_1 \rangle, \langle e_1, e_2 \rangle, ...)$ cuando concideramos la acción de G en la bandera $A_n(1, 2, ..., n)$ (esta notación tendrá una mejor interpretación más adelante).

Convenientemente, un elemento de G fijando la bandera fija a V_1, por lo tanto está contenido en B.

Finalmente, para ver que $G_y = G/B$ es proyectivo basta mostrar que que es una órbita de dimensión minimal en X, dado que en este caso es necesariamente cerrado. Pero dada otra bandera $y' \in A_n(1, 2, ..., n)$, la componente conexa por la identidad de su subgrupo de isotropía $G^\circ_{y'} \subset G$ es un subgrupo cerrado, soluble, conexo de dimensión menor que la dimensión de B, por hipótesis. Esto concluye la demostración. □

Notar que el conjudago de un subgrupo de Borel es obviamente un subgrupo de Borel. El reciproco se obtiene como consecuencia de la proposición anterior:

Corolario 3.19. *Dado un grupo algebraico afín G, todos sus subgrupos de Borel son conjudagos. En particular, todos los cocientes de G por un subgrupo de Borel son isomorfos a variedades proyectivas.*

Demostración. Fijemos un subgrupo de Borel de G de dimensión maximal, y denotemos por $X := G/B$ a ls variedad proyectiva. Consideremos la acción de G en X. Consideremos ahora otro subgrupo de Borel $B' \leq G$, el teorema 3.13 nos dice que existe un punto $gB \in X$ tal que $B'gB = gB$, esto es, que B' está contenido en el grupo de isotropía de gB. Pero el grupo de isotropía de gB es $conj_g(B)$, y este es un subgrupo cerrado, soluble y conexo de G. Se sigue que $B' = conj_g(B)$.

□

Definición 3.20. Un subgrupo P de G es llamado *parabólico* si este contiene un subgrupo de Borel de G.

Corolario 3.21. *El cociente de un grupo algebraico afín por un subgrupo es proyectivo si y solo si el subgrupo es parabólico.*

Demostración. Sea P un subgrupo parabólico de G, el cual contiene un subgrupo de Borel B de G. Podemos darnos el morfismo sobreyectivo $G/B \to G/P$, el cual dado que G/B es proyectivo y G/P es quasi-proyectivo, se sigue que G/P es también sobreyectivo. Reciprocamente, si G/P es proyectivo, un subgrupo de Borel $B \leq G$ tiene un punto fijo en G/P (por el teorema 3.13), entonces $B \subset cong_g(P)$, para cierto $g \in G$. Luego el $conj_g(B)$, el cual es un subgrupo de Borel, está contenido en P.

□

Finalmente, como cada subgrupo de Borel de un grupo algebraico afín G contiene $R(G)$ (ver 3.17), esta última afirmación nos dice que para la clasificación de variedades racionales homogeneas, debemos introducir el caso de los cocientes de grupos semisimples:

Corolario 3.22. *Toda variedad homogenea racional X admite una acción algebraica transitiva de un grupo semisimple G, y un morfismo sobreyectivo $G/B \to X$, donde $B \subset G$ es un subgrupo de Borel.*

Definición 3.23. De forma análoga para el caso de $SL(V)$, dado un grupo semisimple G y un subgrupo de Borel $B \subset G$, la variedad G/B será llamada (generalmente), una *Variedad bandera completa asociada a G.*

4. Grassmanniana y Variedades bandera

4.1. Grassmanniana. Las variedades bandera son uno de los ejemplos más simples de variedades RH. En esta sección haremos repaso de definiciones para aplicar los resultados de grupos algebraicos en el contexto que deseamos.

Para esto, comencemos consideremos el grupo $G := GL_n(\mathbb{C})$ el grupo general lineal de matrices invertibles. Este grupo lo usaremos durante toda la sección (a menos que se especifique lo contrario). Este grupo actúa sobre la variedad

$$X := Gr(d, n)$$

vía su acción natural en $\mathbb{C}^n$. Claramente la acción es algebraica y transitiva, y además el incrustamiento de Plücker es equivariante con respecto a la acción algebraica de G en $\mathbb{P}(\bigwedge^d \mathbb{C}^n)$ a partir de su acción lineal en $\bigwedge^d \mathbb{C}^n$. Tomando la base canónica $\{e_1, ..., e_n\}$ de $\mathbb{C}^n$, tenemos que el grupo de isotropia del subespacio $\langle e_1, ..., e_d\rangle$ es:

$$P := \left\{ \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,d} & a_{1,d+1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{d,1} & \cdots & a_{d,d} & a_{d,d+1} & \cdots & a_{d,n} \\ 0 & \cdots & 0 & a_{d+1,d+1} & \cdots & a_{d+1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n,d+1} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix} \right\}$$

el cuál es un grupo parabólico maximal de G. Por lo tanto, X es el espacio homogéneo G/P. Como conscuencia X es conexo, en particular, suave, y de dimensión $dim(G) - dim(P) = d(n-d)$. En particular, $X \cong \mathbb{A}^{d(n-d)}$

Para cualquier multi-índice $I := (i_1, ..., i_d)$, donde $1 \leq i_1 < \cdots < i_d \leq n$, denotamos por E_I al correspondiente subespacio coordenado de $\mathbb{C}^n$, es decir, que tomando un subconjunto de la base canónica (determinado por I), el conjunto $E_I = \langle e_{i_1}, ..., e_{i_d}\rangle \in X$. En particular, usamos $E_{1,2,...,d}$ para denotar el subespacio estandar $\langle e_1, ..., e_d\rangle$. Gracias a los resultados anteriores, podemos definir lo siguiente:

Proposición 4.1. (1) *Los E_I son precisamente los puntos fijos de X bajo el grupo D, definido por*

$$D := \left\{ \begin{pmatrix} a_{1,1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{2,2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix} \right\}$$

el subgrupo de matrices diagonales de G.

(2) *X es la unión disjunta de las órbitas BE_I, donde*

$$B := \left\{ \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ 0 & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix} \right\}$$

Es el subgrupo de matrices triangulares superiores (el cual es un subgrupo de Borel de G).

Definición 4.2. Las *Células de Schubert* en la Grasmanniana son las órbitas $C_I := BE_I$, es decir, las $B-$órbitas en X. La clausura de una célula de Schubert en X es llamada la *Variedad de Schubert* $X_I := \overline{C_I}$.

Notar que B es el semi-producto directo de T con el subgrupo normal

$$U := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ 0 & 1 & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

(este es un subgrupo unipotente de G, es decir, que todas sus entradas en la diagonal tienen valor 1). Por lo tanto, también tenemos que $C_I = UE_I$, y en particular, las células de Schubert son también $U-$órbitas en X.

Además, el grupo de isotropía U_E es el subgrupo de U donde $a_{ij} = 0$ cuando $i \notin I$ y $j \in I$. Sea U^I el conjunto *complementario* de U, definido por $a_{ij} = 0$ si $i \in I$ y $j \notin I$. Entonces se verifica que U^I es un subgrupo de U, y el morfismo $U^I \to X, g \mapsto gE_I$ es localmente un incrustamiento con imagen C_I. Se sigue que C_I es un cerrado de X, isomorfo al espacio afín $\mathbb{C}^{|I|}$, donde $|I| := \sum_{j=1}^{d}(i_j - j)$. Por lo tanto, su clausura X_I es una variedad proyectiva de dimensión $|I|$.

Proposición 4.3. (1) *C_I es el conjunto de subespacios $E \subset \mathbb{C}^n$ con $dim_{\mathbb{C}}(E) = d$ y tal que*

$$dim(E \cap \langle e_1, ..., e_j \rangle) = card(\{k \mid 1 \leq k \leq d,\ i_k < j\ \}),\ \ \forall j \in \{1, ...n\}$$

(2) *X_I es el conjunto de subespacios $E \subset \mathbb{C}^n$ con $dim_{\mathbb{C}}(E) = d$ y tal que*

$$dim(E \cap \langle e_1, ..., e_j \rangle) \geq card(\{k \mid 1 \leq k \leq d,\ i_k < j\ \}),\ \ \forall j \in \{1, ...n\}$$

Por lo tanto, tenemos que

$$X_I = \bigcup_{J \leq I} C_J$$

donde $J \leq I$ si y solo si $j_k \leq i_k$, $\forall k$.

Ejemplo 4.4. El ejemplo más típico es para $d = 1$, donde la Grassmanniana denota al espacio proyectivo $\mathbb{P}^{n-1}$ y las variedades de Schubert forman una bandera de subespacios lineales $X_1 \subset \cdots \subset X_n$, donde $X_j \cong \mathbb{P}^{j-1}$

4.2. Variedades Bandera. Recordando la definición de una bandera introducida al comienzo, y teniendo en cuenta los resultados de la sección anterior. Denotamos por $X(d_1, ..., d_m)$ al conjunto de banderas de tipo $(d_1, ..., d_n)$. Por ejemplo, $X(d, n-d)$ denota la Grassmanniana. También tenemos que en la notación de Grothendieck, $X(d_1, ..., d_m) = A_n(d_1, ..., d_m)$. Más generalmente, $X(d_1, ..., d_m)$ es una variedad algebraica incrustada en el producto de Grasmannianas $Gr(d_i, n)$, llamada la *Variedad Bandera Parcial* de tipo $(d_1, ..., d_m)$.

El grupo $G = GL_n(\mathbb{C})$ actúa transitivamente en $X(d_1, ..., d_m)$. Sea $P = P(d_1, ..., d_m)$ el grupo de isotropía de la bandera estándar $x = (\langle e_1 \rangle \langle e_1, e_2 \rangle \cdots) \in X(d_1, ..., d_m)$. Entonces $P(d_1, ..., d_m)$ consiste en las matrices triangulares superiores invertibles por bloques con bloques diagonales de tamaño $d_1, ..., d_m$, es decir, de la forma

$$A := \left\{ \begin{pmatrix} A_{d_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_{d_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_{d_m} \end{pmatrix} \right\}$$

donde cada A_{d_i} denota un bloque de la matriz A. Además, podemos ver que $P(d_1, ..., d_m)$ contiene a $B \leq G$ subgrupo de Borel, por lo que $P(d_1, ..., d_m)$ es un subgrupo parabolico. Como $X \cong G/P$, se sigue que X es suave de dimensión $\sum_{1 \leq i < j \leq m} d_i d_j$.

En particular, tenemos la variedad $X := X(1, 1, ..., 1)$ de banderas completas, también llamaba la *Variedad Bandera Completa*, la cual se identifica con el espacio homogeneo G/B de dimension $n(n-1)/2$. Enviando cualquier bandera completa en la correspondiente bandera parcial de un tipo $d_1, ..., d_m)$ ya dado, obtenemos el morfismo

$$\varphi : X = G/B \longrightarrow G/P(d_1, ..., d_m) = X(d_1, ..., d_m).$$

Claramente, f es $G-$equivariante con fibra P/B en el punto base B/B (la bandera canónica completa). Por lo tanto, f induce un fibrado cuyas fibras son el producto de variedades bandera completas en $\mathbb{C}^{d_1}, ..., \mathbb{C}^{d_m}$. Esto nos permite reducir preguntas en el contexto de variedades bandera al caso de variedades bandera completas.

Definición 4.5. Las banderas canónicas (también conocidas como banderas coordenadas) corresponden a permutaciones del conjunto $\{1, ..., n\}$, vía asignarle a la bandera

$$0 \subset \langle e_{i_1} \rangle \subset \cdots \langle e_{i_1}, e_{i_2}, \ldots, e_{i_d} \rangle \subset \cdots$$

la permutación σ tal que $\sigma(k) = i_k, \ \forall k$

Ahora introduciremos la noción de *Célula de Schubert* y *Variedad de Schubert* en G/B. Es posible considerar al grupo simétrico S_n como un subgrupo de $GL_n(\mathbb{C})$ vía su acción natural en la base canónica $\{e_1, ..., e_n\}$. Entonces las banderas canónicas (completas) son exactamente $F_\sigma := \sigma F$, donde F denota la bandera canónica completa. Además, S_n se identifica con el cociente $S := N_G(D)/D$, donde $N_G(D)$ denota el normalizador de D (proposición 4.1) en G.

Ahora formularemos una proposición análoga a la proposición 4.1.

Proposición 4.6. (1) *Los puntos fijos de D en X son las banderas canónicas F_σ, $\sigma \in S$.*
(2) *X es la unión disjunta de las órbitas $C_\sigma := BF_\sigma = UF_\sigma$, $\sigma \in S$.*
(3) *Sea $X_\sigma := \overline{C_\sigma}$, entonces*

$$X_\sigma = \bigcup_{\tau \in S, \tau \leq \sigma} C_\tau$$

donde $\tau \leq \sigma$ si y solo sí se tiene que

$$(\tau(1), ..., \tau(d))^* \leq (\sigma(1), ..., \sigma(d))^* \quad , \forall d \in \{1, ..., n-1\}$$

(el asterisco denota un reordenamiento de valores ascendentes *en la tupla)*

Observación 4.7. El orden partcial $\leq$ en S es conocido como el *Orden de Bruhat*.

Definición 4.8. Definimos por $C_\sigma := BF_\sigma$ a la célula de Schubert y $X_\sigma := \overline{C_\sigma}$ a la variedad de Schubert asociada.

Gracias a la proposición anterior, tenemos que $X_\tau \subset X_\sigma$ si y solo si esto también se cumple para las imagenes de X_τ y X_σ en $Gr(d, n)$, donde $d \in \{1, ..., n-1\}$. Esto junto con la proposición 4.3 nos lleva a una caracterización del ordenamiento de Bruhat en variedades de Schubert. También notar que los puntos fijos de D en X_σ son las banderas canónicas F_σ, donde $\tau \in S$ y $\tau \leq \sigma$.

Ahora describiremos las células de Schubert UF_σ. Notemos que el grupo de isotropía

$$U_{F_\sigma} = U \cap \sigma U \sigma^{-1} =: U_\sigma$$

está definido por $a_ij = 0$ cuando $i < j$ y $\sigma^{-1}(i) < \sigma^{-1}(j)$. Sea U^σ el conjunto *complementario* de U, definido por $a_ij = 0$ cuando $i < j$ y $\sigma^{-1}(i) > \sigma^{-1}(j)$. Entonces $U^\sigma = U \cap \sigma U^- \sigma^{-1}$[1] es un subgrupo, y se verifica que el morfismo del producto $U^\sigma \times U_\sigma \longrightarrow U$ es un isomorfismo de variedades. Por lo tanto, el morfismo $U^\sigma \longrightarrow C_\sigma$, $g \mapsto gF$ es también un isomorfismo. Se sigue que cada célula C_σ es isomorfa a un espacio afín de dimensión

$$dim(C_\sigma) = card(\{(i,j) \mid 1 \leq i < j \leq n, \sigma^{-1}(i) > \sigma^{-1}(j)\} = card(\{(i,j) \mid 1 \leq i < j \leq n, \sigma(i) > \sigma(j)\}.$$

Estos últimos conjuntos consisten en todas las *inversiones* de la permutación σ cuyo cardinal es el largo de σ el cual denotaremos por $l(\sigma)$. Por lo tanto, tenemos que $C_\sigma \cong \mathbb{C}^{l(\sigma)} \cong \mathbb{A}^{l(\sigma)}(\mathbb{C})$.

Más generalmente, debemos definir las células y variedades de Schubert en cualquier variedad bandera parcial $X(d_1, ..., d_m) = G/P$, donde $P = P(d_1, ..., d_m)$. Estas son parametrizadas por el cociente $S_n/(S_{d_1} \times \cdots \times S_{d_m}) =: S/S_P$. Más especificamente, cada cociente módulo S_P contiene una única permutación σ tal que tenemos que $\sigma(1) < \cdots < \sigma(d_1), \ \sigma(d_1 + 1) < \cdots < \sigma(d_1 +$

[1] $U^- = -{}^tU$ denota el inverso aditivo de la matriz traspuesta de U

$d_2), \ldots, \sigma(d_1 + \cdots + d_m - 1) < \cdots \sigma(d_1 + \cdots + d_m) = \sigma(n)$. De forma equivalente, tenemos que $\sigma \leq \sigma\tau$ para todo $\tau \in S_P$. Esto define el conjunto S^P de representantes minimales de S/S_P.

Ahora las células de Schubert en G/P son órbitas $C_{\sigma P} := B\sigma P/P = U\sigma P/P \subset G/P$, $\sigma \in S^P$, y las variedades de Schubert $X_{\sigma P}$ son sus clausuras. Luego se verifica que el morfismo $\varphi : G/B \longrightarrow G/P$ se restringe a un isomorfismo $C_\sigma = B\sigma B/B \cong B\sigma P/P = C_{\sigma P}$, y por lo tanto, a un morfismo birracional $X_\sigma \dashrightarrow X_{\sigma P}$ para cualquier $\sigma \in S^P$.

Ejemplo 4.9. Además de la Grassmanniana, la otra variedad bandera más simple es la *variedad de incidencia* $I = I_n$ la cual consiste en los pares (V_1, V_{n-1}), donde $V_1 \subset \mathbb{C}^n$ es una recta, y $V_{n-1} \subset \mathbb{C}^n$ es un hiperplano que contiene a V_1. Denotando por $\mathbb{P}^{n-1} = \mathbb{P}(\mathbb{C}^n)$ (resp. $\mathbb{P}^{n-1} = \mathbb{P}((\mathbb{C}^n)^\vee)$) el espacio proyectivo de rectas (resp. hiperplanoes) en $\mathbb{C}^n$, entonces $I \subset \mathbb{P}^{n-1} \times \mathbb{P}^{n-1}$ se define como por la ecuación *bi-homogenea*

$$x_1y_1 + \cdots + x_ny_n = 0$$

donde $x_1, ..., x_n$ son las coordenadas estándar de $\mathbb{C}^n$, y las variables $y_1, ..., y_n$ son las coordenadas duales de $(\mathbb{C}^n)^\vee$. Luego se verifica que las variedades de Schubert en I son

$$I_{i,j} := \{(V_1, V_{n-1}) \in I \mid V_1 \subseteq E_{1,\ldots,i} y E_{1,\ldots,j-1} \subseteq V_{n-1}\},$$

donde, $1 \leq i, j \leq n$ y $i \neq j$. Por lo tanto, $I_{i,j} \subseteq I$ está determinada por las ecuaciones

$$x_{i+1} = \cdots = x_n = y_1 = \cdots = y_{j-1} = 0.$$

Se sigue que $I_{i,j}$ es singular para $1 < j < i < n$, donde su lugar singular es $I_{sing} = I_{j-1,i+1}$, mientras que es suave en cualquier otro lugar.

Ejemplo 4.10. Para cualquier variedad bandera G/P y cualquier $\sigma \in S^P$, el pullback de la variedad de Scubert vía $f : G/B \longrightarrow G/P$ es fácil de identificar con la variedad $X_{\sigma\sigma_{0,P}}$, donde $\sigma_{0,P}$ denota un elemento maximal en S^P. Más en especifico, si $P = P(d_1, ..., d_m)$ de tal forma que $S_P = S_{d_1} \times \cdots \times S_{d_m}$, entonces $\sigma_{0,P} = (\sigma_{0,d_1}, \ldots, \sigma_{0,d_m})$ (donde le damos sentido a la notación). Los productos $\sigma\sigma_{0,P}$, donde $\sigma \in S^P$, son los representantes maximales de los cocientes módulo S^P. Entonces f se restringe a un fibrado localmente trivial $X_{\sigma\sigma_{0,P}} \longrightarrow X_{\sigma P}$ cuya fibra es P/B.

En particular, el ejemplo anterior nos muestra una forma de construir variedades de Schubert singulares en la variedad de banderas completas, vía el pullback de la variedad de incidencia.

Definición 4.11. La *Célula opuesta de Schubert (resp. variedad)* asociada a $\sigma \in S^P$ es $C^\sigma := \sigma_0 C_{\sigma_0\sigma}$ (resp. $X^\sigma := \sigma_0 X_{\sigma_0\sigma}$). Observar que $C^\sigma = B^- F_\sigma$, donde

$$B^- := \left\{ \begin{pmatrix} a_{1,1} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix} \right\}$$

es el subgrupo apuesto de Borel respecto de B. También se tiene que X^σ tiene codimensión $l(\sigma)$ en X.

4.3. Clase de Schubert.

Definición 4.12. Sea X una variedad algebraica proyectiva suave de dimensión n. Entonces X admite una orientación canónica, y por lo tanto, un generador canónico del grupo de homología $H_{2n}(X)$, el cuál definiremos como la **clase fundamental** $[X]$. Por la dualidad de Poincaré, el morfismo $H_j(C) \to H_{2n-j},\ \alpha \mapsto \alpha \cap [X]$ es un isomorfismo para todo j.

De manera similar, cualquier variedad algebraica suave $Y \subseteq X$ de dimensión p tiene una clase fundamental en $H_{2n}(Y)$. Utilizando la dualidad de Pincarpe, la imagen de esta clase en

$H_{2n}(X)$ proporciona la clase fundamental $[Y] \in H^{2c}(X, \mathcal{O}_X)$, donde $c = n-p$ es la codimensión de Y. En particular, obtenemos la clase fundamental de un $[x]$ que es independiente de x y genera el grupo $H_{2n}(X)$. Más generalmente, se define la clase fundamental $[Y] \in H^{2c}(X, \mathcal{O}_X)$ para cualquier variedad algebraica (posiblemente singular) Y de codimensión c.

Definición 4.13. Dados α, β en el anillo de cohomología $H^\bullet(X, \mathcal{O}_X)$, sea $\langle \alpha, \beta \rangle$ el coeficiente de la clase $[x]$ en el producto copa $\alpha \cup \beta$. Entonces $\langle , \rangle$ es una forma bilineal en $H^\bullet(X, \mathcal{O}_X)$ llamada el *emparejamiento de dualidad de Poincaré*. Este es no degenerado sobre los racionales, respectivamente sobre los enteros en el caso donde el grupo $H^\bullet(X, \mathcal{O}_X)$ es libre de torsión.

Proposición 4.14. *Sea X una variedad algebraica proyectiva y $Y, X \subseteq X$. Cada componente irreducible C de $Y \cap Z$ satisface que $dim(C) \geq dim(Y) + dim(Z)$, es decir, $codim(Y) \leq codim(Y) + codim(Z)$. Decimos que* Y y Z se encuentran adecuadamente en X *si $codim(C) = codim(Y) + codim(Z)$ para cada C. Luego en $H^\bullet(X, \mathcal{O}_X)$, tenemos:*

$$[Y] \cup [Z] = \sum_C \nu_C [C],$$

donde la suma se toma sobre todas las componentes de $Y \cap Z$, y ν_c es la multiplicidad de intersecciones de Y y Z a lo largo de C, un número entero positivo. Además, ν_c =1 si y solo si Y y Z se encuentran transversalmente *a lo largo de C, es decir, existe un punto $x \in C$ tal que x es un punto suave de Y y de Z, y el espacio tangente de x satisface que $T_xY + T_xZ = T_xX$. Entonces x es un punto suave de C y $T_xC = T_xY \cap T_xZ$.*

En particular, si Y y Z son variedades tales que $dim(Y) + dim(Z) = dim(X)$, entonces Y se encuentra adecuadamente con Z si y solo si su intersección son finita. En este caso tenemos que $\langle [Y], [Z] \rangle = \sum_{x \in Y \cap Z} m_x$, donde m_x denota la multiplicidad de las intersecciones de Y y Z en x. En el caso de intersecciones transversales, esto se simplifica en $\langle [Y], [Z] \rangle = |Y \cap Z|$.

Volviendo al caso de una variedad bandera, acá tenemos sus clases de cohomología de las subvariedades de Schubert, la llamada *clase de Schubert*. Dado que X es la unión disjunta de células de Schubert, las clases de Schuber forman una base aditiva de $H^\bullet(X, \mathcal{O}_X)$. En particular, este grupo es libre de torsión.

Lema 4.15. *Sea X una variedad bandera y $Y, Z \subseteq X$, y sean $Y_0 \subseteq Y$ y $Z_0 \subseteq Z$ abiertos no vacíos de puntos suaves. Entonces existe un abierto no vacío $\Omega \subseteq G$ tal que para cualquier $g \in \Omega$, Y se encuentra adecuadamente con gZ, y $Y_0 \cap gZ_0$ es suave y denso en $Y \cap gZ$. Por lo tanto, $[Y] \cup [Z] = [Y \cap gZ]$, para cualquier $g \in \Omega$. En particular, si la dimensión $dim(Y) + dim(Z) = dim(X)$, entonces Y se encuentra transversalmente con gZ para todo $g \in \Omega \subseteq G$. Por lo tanto, $Y \cap gZ$ es finito y $\langle [Y], [Z] \rangle = |Y \cap gZ|$, para cualquier $g \in \Omega \subseteq G$.*

Demostración. Consideremos el morfismo $\varphi : G \times Z \to X$, $(g, z) \mapsto gz$. Este es un morfismo sobreyectivo, equivariante bajo la acción de G en $G \times Z$ multiplicando por la izquierda al primer factor. Como $X = G/P)$, se sigue que φ es localmente un fibrado trivial. Por lo tanto, sus fibrados son variedades de dimensión $dim(G) + dim(Z) - dim(X)$. Lo siguiente a considerar es el producto fibrado $V := (G \times Z) \times_x Y$ y el pullback $\varphi^+ : V \to Y$ de φ. Entonces φ^* es también localmente un fibrado trivial cuyas fibras son variedades. Se sigue que la variedad V es de dimensión $dim(G) + dim(Z) - dim(X) + dim(Y)$. Sea $\pi : V \to G$ ser la composición de las proyecciones $(G \times Z) \times_X Y \to G \times Z \to G$. Entonces la fibra de π en cualquier $g \in G$ se identifica con la intersección de $Y \cap gZ$. Además, existe un abierto no vacío $\Omega \subseteq G$ tal que la fibra de π en los puntos de Ω son o vacíos o equidimensionales de dimensión $dim(Y) + dim(Z) - dim(X)$, es decir, de codimensión $codim(Y) + codim(Z)$. Esto prueba que Y se encuentra adecuadamente con gZ para todo $g \in \Omega \subseteq G$. De igual manera, la restricción $\varphi_0 : G \times Z_0 \to X$ es localmente un fibrado trivial con fibras suaves, por lo que el producto fibrado $V_0 := (G \times Z_0) \times_X Y_0$ es un abierto no vacío de V el cual está compuesto por puntos suaves. Dada la suavidad obtenida, se sigue que $Y_0 \cap gZ_0$ es suave y denso en $Y \cap gZ$, para todo g en algún (probablemente muy pequeño) abierto de G. Esto implica que, a su vez, todas las multiplicidades de intersecciones de $Y \cap Z$ son 1.

Por lo tanto, tenemos que $[Y] \cup [gZ] = [Y \cap gZ]$ para cualquier $g \in \Omega$. Además, $[Z] = [gZ]$ dado que G es conexo, por lo que $[Y] \cup [Z] = [Y \cap gZ]$. □

Como consecuencia, el la variedad bandera completa X, cualquier variedad de Schubert X_σ se encuentra adecuadamente con cualquier variedad de Schubert opuesta X^σ. (De hecho, el subconjunto abierto Ω se encuentra con el subconjunto abierto $BB^- = BU^- \cong B \times U^-$ de G, además X_σ es invariante bajo la acción de B y X^τ es invariante bajo la acción de B^-). Entonces, $X_\sigma \cap X^\tau$ es equidimensional de dimentión $dim(X_\sigma) + dim(X^\tau) - dim(X) = l(\sigma) - l(\tau)$

Proposición 4.16. *Para cualesquiera $\tau, \sigma \in S$, la intersección $X_\sigma \cap X^\tau$ es no vacía si y solo si $\tau \leq \sigma$. Entonces $X_\sigma \cap X^\tau$ es una variedad.*

Definición 4.17. Dados $\tau, \sigma \in S$ tales que $\tau \leq \sigma$, la correspondiente *Variedad de Richardson* se define como $X_\sigma^\tau := X_\sigma^\tau$.

Notar que X_σ^τ es $D-$invariante cuyos puntos fijos son las banderas canónicas $F_x = xB/B$ donde $x \in S$ satisface que $\tau \leq x \leq \sigma$. Se sigue que $X_\sigma^\tau \subseteq X_{\sigma'}^{\tau'}$ si y solo si $\tau' \leq \tau \leq x \leq \sigma \leq \sigma'$. Por lo tanto, las variedades de Richardson deben ser vistas como análogos geométricos de intervalos dados por el orden de Bruhat.

Las variedades de Richardson suelen ser utilizadas para describir estructuras locales de una variedad de Schubert a lo largo de subvariedades.

Proposición 4.18. *Sean $\tau, \sigma \in S$ tales que $\tau \leq \sigma$. Entonces $X_\sigma \cap \tau C^{id}$ es una vecindad abierta $D-$invariante del punto fijo F_τ en X_σ el cual se encuentra con X_σ^τ a lo largo $X_\sigma \cap C^\tau$. Además, el morfismo*

$$(U \cap \tau U^- \tau^{-1}) \times (X_\sigma \cap C^\tau) \to, \ (g, x) \mapsto gx$$

es un incrustamiento abierto con imagen $X_\sigma \cap \tau C^{id}$. (Recordar que $U \cap \tau U^- \tau^{-1}$ es isomorfa a $\mathbb{C}^l(\tau)$ como variedad, y el morfismo $U \cap \tau U^- \tau^{-1} \to X$, $g \mapsto gF_\tau$ es un isomorfismo en C_τ). De forma adicionla, si $l(\tau) = l(\sigma) - 1$, entonces $X_\sigma \cap X^\tau$ es isomorfa a la recta afín. Como consecuencia, X_σ es suave a lo largo de su divisor de Schubert X_τ.

Demostración. Notar que τC^{id} es una vecindad abierta $D-$invariante de F_τ en X, isomorfa a la variedad $\tau U^- \tau^{-1}$. Como resultado, se sigue que es isomorfa a $(U \cap \tau U^- \tau^{-1}) \times (X_\sigma \cap C^\tau)$ via el morfismo producto. Por otro lado el morfismo $U^- \cap \tau U^- \tau^{-1} \to X, g \mapsto gF_\tau$ es un incrustamiento cerrado con imagen C^τ. Se sigue que el morfismo

$$(U \cap \tau U^- \tau^{-1}) \times C^\tau \to X, (g, x) \mapsto gx$$

es un incrustamiento abierto con imagen τF^{id}, y se tiene que $\tau F^{id} = X^\tau = C^\tau$. Intersectando con la subvariedad X_σ (invariante bajo la acción del subgrupo $U \cap \tau U^- \tau^{-1}$) se completa la demostración de la primera afirmaación. □

Las variedades de Richardson también aparecen cuando se multiplican clases de Schubert. De hechp, por la proposición 4.16, tenemos que en $H^\bullet(X, \mathcal{O}_X)$:

$$[X_\sigma] \cup [X^\tau] = [X_\sigma^\tau].$$

Como $dim(X_\sigma^\tau) = l(\sigma) - l(\tau)$, se sigue que el emparejamiento de dualidad de Poincaré $\langle [X_\sigma], [X^\tau] \rangle = 1$ si $\sigma = \tau$, y 0 en cualquier otro caso. Esto implica el siguiente resultado.

Proposición 4.19. (1) *Las bases* $\{[X_\sigma\}$ *y* $\{X^\sigma\} = \{[X_{\sigma_0\sigma}\}$ *de* $H^\bullet(X, \mathcal{O}_X)$ *son duales para el emparejamiento de dualidad de Poincaré.*

(2) *Para cualquier variedad algebraica* $Y \subseteq X$*, tenemos que*

$$[Y] = \sum_{\sigma \in S} a^\sigma(Y)[X_\sigma],$$

donde $a^\sigma(Y) = \langle [Y], [X^\sigma] \rangle = |Y \cap gX^\sigma|$ *para cualquier* $g \in G$*. En particular, los coeficientes de* $[Y]$ *en una base de clases de Schubert son no negativos.*

(3) *Sea*

$$[X_\tau] \cup [X_\sigma] = \sum_{x \in S} a^x_{\tau\sigma}(Y)[X_x] \text{ en } H^\bullet(X, \mathcal{O}_X),$$

entonces las constantes de estructura $a^x_{\tau\sigma}$ *son valores enteros no negativos.*

Finalmente, notar que todos estos resultados se adaptan a cualquier variedad bandera G/P. De hecho, el morfismo $f : G/B \longrightarrow G/P$ induce un morfismo de anillos $f^* : H^\bullet(G/P, \mathcal{O}(G/P)) \longrightarrow H^\bullet(G/B, \mathcal{O}(G/B))$ el cual envía toda clase de Schubert $[X]$ a la clase de Schubert $[X_{\sigma\sigma_{0,P}}]$, donde $\sigma \in S^P$. En particular, f^* es inyectivo.

5. Grupo de Picard de una variedad bandera

Proposición 5.1. *El grupo* $Pic(X)$ *es libremente generado por las clases de los divisores de Schubert* $X_{\sigma s_i}$*, donde* $i \in \{1, ..., n-1\}$*. Cualquier divisor amplio de X (respectivamente generado por sus secciones globales) es linealmente equivalente a una cmobinación positiva (respectivamente no negativa) de estos divisores. Además, cualquier divisor amplio es* muy amplio

Demostración. La célula abierta de Schubert C_{σ_0} tiene commo complemento la unión de divisores de Schubert. Como C_{σ_0} es isomorfa al espacio afín, su grupo de Picard es trivial. Por lo tanto las clases de $X_{\sigma s_1}, ..., X_{\sigma s_{n-1}}$ generan el grupo $Pic(X)$. Si tenemos una relación mónica $\sum_{i=1}^{n-1} a_i X_{\sigma_0 s_i} = 0$ en $Pic(X)$, entonces existe una función racional en X que tiene unicamente o un cero o un polo de orden a_i a lo largo de $X_{\sigma_0 s_i}$. En particular, f es una función regular que no se anula en la variedad afín C_{σ_0}. Así, f es constante y $a_i = 0$ para todo i.

Cada divisor de Schubert $X_{\sigma_0 s_d}$ es el pullback bajo la proyección $X \xrightarrow{pr} Gr(d, n)$ del único divisor de Schubert en $Gr(d, n)$. Como el divisor anterior es una sección de un hiperplano en el incrustamiento de Plücke, se sigue que $X_{\sigma_0 s_d}$ es generado por sus secciones globales. Como consecuencia, cualquier combinación de divisores no negativa es generada por sus secciones globales. Además, el divisor $\sum_{d=1}^{n-1} X_{\sigma_0 s_d}$ es muy amplio, dado que el morfismo producto $X \to \prod_{d=1}^{n-1} Gr(d, n)$ es un incrustamiento cerrado. Por lo tanto, toda combinación positiva de divisores es muy amplia.

Por el contrario, sea $D = \sum_{i=1}^{n-1} a_i X_{\sigma s_i}$ un divisor globalmente generado (resp. amplio) en X. Entoncespara cualquier curva $Y \subseteq X$, el número de interssecciones $\langle [D], [Y] \rangle$ es no negativo (resp. positivo). Ahora tomando para Y una curva X_{s_j}, entonces

$$\langle [D], [Y] \rangle = \langle \sum_{i=1}^{n-1} a_i [X_{\sigma s_i}], [X_{s_j}] \rangle = \sum_{i=1}^{n-1} a_i \langle [X^{s_j}], [X_{s_j}] \rangle = a_j.$$

Esto concluye la demostración ∎

Referencias

[SOL19] Luis E. Solá Conde. *Geometry of Rational Homogeneous Spaces* Lukecin. **2-31**, 2019.
[BRI05] Michael Brion. *Lectures on the Geometry of Flag Varieties*. Birkhäuser Verlag Basel, **34-50**, 2005.
[FR66] Frans J. Oort. *Algebraic Group Schemes in Characteristic zero are Reduced*. Invent. Math., **2;79-80** (1966)
[CHE60] Claude Chevalley. *Une démostration d'un théorème sur les groupes algébriques* Pures Appl. **39(9):307-317**, 1960.

Universidad Técnica Federico Santa María, Valparaíso, Chile.
Email address: `benjamin.vegav@usm.cl`