Operadores elípticos y el Teorema de Atiyah-Singer.

Pedro Tobar y Nicolás Muñoz.

Proyecto de Investigación realizado durante el segundo semestre del 2023 para la asignatura *Curvas Algebraicas*, dictada por el profesor Pedro Montero en la Universidad Técnica Federico Santa María sede Casa Central.

Noviembre 2023

Índice general

1. Preliminares

1.1 Introducción

En el año 2004 Sir Michael Atiyah e Isadore Singer recibieron el premio Abel por su descubrimiento y demostración del teorema del índice, integrando la topología, la geometría y el análisis, y por su destacado papel en la construcción de nuevos vínculos entre las matemáticas y la física teórica. Como uno de los hitos más destacados en el ámbito matemático del siglo XX, este teorema ha dejado una marca indeleble, influyendo profundamente en diversos campos, desde la topología hasta la geometría diferencial y la teoría cuántica de campos. En este proyecto, se emprende la tarea de explorar el origen del teorema, sus diversas manifestaciones y una serie de aplicaciones que ilustran su versatilidad.

El teorema abarca un espectro amplio de disciplinas matemáticas. Aunque se han esbozado los conceptos clave en el texto, se reconoce la necesidad de cierto nivel de sofisticación para una comprensión completa. En el abordaje de las aplicaciones, se ha procurado demostrar cómo el teorema puede ser utilizado como una herramienta concreta, sin requerir una inmersión exhaustiva en los detalles de la prueba.

Es importante destacar que la visión e intuición aplicadas en la demostración del teorema siguen siendo un logro notable, y el prestigioso Premio Abel otorgado a Atiyah y Singer es un testimonio genuino de este hecho. Este reconocimiento honra no solo la complejidad y elegancia del teorema, sino también la destreza intelectual y la contribución significativa de sus distinguidos creadores a la matemática contemporánea.

1.2 Resultados y definiciones previas

Comenzaremos esta sección con el teorema que da comienzo al teorema de Atiyah-Singer.

Teorema 1.1 — Riemann-Roch. Sea X una curva proyectiva suave, sea D un divisor de X y sea K su divisor canónico. Entonces

$$\ell(D) - \ell(K - D) = \deg(D) - g(X) + 1$$

donde $g(X)$ denota el género de la curva X, $\ell(D)$ denota la dimensión del espacio de Riemann-Roch de D y $\deg(D)$ es el grado del divisor D.

Este es el teorema de clásico de Riemann-Roch, donde Riemann probo la desigualdad $\ell(D) \geq \deg(D) - g(X) + 1$ y Roch más tarde probo la igualdad que viene dada por el teorema. El teorema del índice de Atiyah-Singer es una generalización de este teorema, como veremos más adelante. Para ello es necesario definir ciertos conceptos fundamentales para el teorema de Atiyah-Singer

Definición 1.1 — Clase característica. Dado una variedad X, una clase característica c de fibrados vectoriales es una correspondencia de cada fibrado $E \to X$ con una clase de cohomología $c(E) \in H^*(X)$ que es natural, en el sentido de que si $f : Y \to X$ es una aplicación, entonces $c(f^*E) = f^*(c(E)) \in H^*(Y)$.

Ahora definiremos las clases características más esenciales

Definición 1.2 — Clases de Chern. Para cada fibrado vectorial complejo E sobre una variedad X existen las llamadas clases de Chern $c_i(E)$ que cumplen:

1) $c_i(E) \in H^{2i}(X;\mathbb{Z}), c_0(E) = 1, c(E) := \sum_{i=0}^{\infty} c_i(E) \in H^*(X;\mathbb{Z})$
2) $c_i(f^*E) = f^*c_i(E)$,
3) $c(E + F) = c(E) \cdot c(F)$,

donde "+"denota la suma directa.

Aplicando la propiedad 1) y 3) cuando $E = L_1 + \cdots + L_n$ es una suma de fibrados en rectas complejo se tiene que

$$c(E) = c(L_1) \cdot \ldots \cdot c(L_n) = (1 + c_1(L_1)) \cdot \ldots \cdot (1 + c_1(L_n)).$$

reemplazando x_i por $c_1(L_i)$ podemos reescribirlo de la siguiente manera

$$c = \prod_1^n (1 + x_i)$$

Aunque en general no es cierto que un fibrado E sea una suma de fibrados en recta, existe un argumento llamado Splitting Principle que muestra que en cálculos con clases características uno puede actuar como si todos los fibrados vectoriales complejos fueran sumas de fibrado en rectas.

Luego a partir de las clases de Chern podemos definir inmediatamente otro tipo de clase que guarda directa relación con ella, ya que se definen a partir de estas

Definición 1.3 — Clase de Todd. Es la clase de cohomología en $H^*(X;\mathbb{Q})$ dada por

$$\operatorname{Todd}(E) = \prod_1^n \frac{x_i}{1-e^{-x_i}} = 1 + \frac{1}{2}c_1 + \frac{1}{12}\left(c_2 + c_1^2\right) + \dots.$$

Necesitamos también definir la clase de Euler, ya que juega un rol importante dentro de la fórmula del teorema de Atiyah-Singer, pero para ello necesitamos definir primero la Clase de Thom

Definición 1.4 — Clase de Thom. Ahora, sea E un fibrado vectorial real orientable de dimensión n. Si X es compacto, existe una clase de cohomología $U \in H_c^n(E)$ (cohomología con soporte compacto) cuya restricción a cada fibra E_x es la clase de orientación en $H_c^n(E_x)$. U se llama la clase de Thom de E.

Definición 1.5 — Clase de Euler. La clase de Euler de E se define como la restricción de la clase de Thom de E a X:

$$e(E) = U|_X$$

Dado que la definición de la clase Euler como tal resulta muy compleja de trabajar, es mucho más conveniente trabjarla a través de las siguientes propiedades

Proposición 1.1 La clase de Euler cumple las siguientes propiedades

a) Cuando n es impar, $2e = 0$.
b) Si E y F son orientables, $e(E+F) = e(E)e(F)$.
c) Si E es un fibrado real orientable de dimensión $2n$ subyacente a un fibrado complejo E' de dimensión n entonces $e(E) = c_n(E')$, donde c_n es la enésima clase Chern.

Estas proposición nos demuestra que la clase de Euler y la clase de Chern guardan una directa relación, de modo que en ciertos casos trabajar podemos trabajar con la clase de Chern en vez de la clase Euler.

Definición 1.6 — característica de Euler. Sea X una variedad suave orientada y compacta, y E un fibrado vectorial de X entonces definimos la característica de Euler como

$$\chi(X,E) = \sum (-1)^i \dim H^i(X,E)$$

Cuando el fibrado es claro en el contexto la caractestica de Euler se suele denotar simplemente como $\chi(X)$

Un teorema que que relaciona directamente la característica de Euler con la clase de Euler, es el un teorema de topologia diferencial que relaciona la invarianza de la suavidad de la estructura de X con un invariante puramente topológico

Teorema 1.2 Sea $e = e(TX)$ la clase de Euler del fibrado tangente de X, y sea $e[X]$ la evaluación de e en la clase de orientación de X. Entonces, $e[X] = \chi(X)$.

A partir de este teorema se deducen diversos resultados, como por ejemplo el teorema de Gauss-Bonet.

Luego como se menciono antes de la clase de Euler guarda directa relación con la clase de Chern, por tanto es natural pensar que existe un teorema parecido al anterior pero para las clases de Chern

Teorema 1.3 Sea X una variedad casi compleja (es decir con cada espacio tangente con estructura compleja) de dimensión compleja n. Entonces, la n-ésima clase de Chern $c_n = c_n(TX) \in H^{2n}(X; \mathbb{Z})$ satisface $c_n[X] = \chi(X)$.

Una de los últimos elementos necesarios para definir no solo teorema principal, también para el teorema de Hirzebruch Riemann-Roch es el caracter de Chern

Definición 1.7 — Caracter de Chern. Es la clase de cohomología en $H^*(X; \mathbb{Q})$ dada por

$$\operatorname{ch}(E) = \sum_1^n e^{x_i} = n + c_1 + \frac{1}{2}\left(c_1^2 - 2c_2\right) + \cdots .$$

(Aquí asumimos que X tiene dimensión finita, de modo que la expansión $e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \cdots$ es una suma finita).
Para fibrados en recta, se tiene la fórmula $c_1\left(L_1 \otimes L_2\right) = c_1\left(L_1\right) + c_1\left(L_2\right)$. Por lo tanto, si E y F son sumas de fibrados en rectas, observamos que

$$\begin{aligned} \operatorname{ch}(E + F) &= \operatorname{ch}(E) + \operatorname{ch}(F) \\ \operatorname{ch}(E \otimes F) &= \operatorname{ch}(E) \operatorname{ch}(F) \end{aligned}$$

Luego se deduce del Splitting Principle que estas expresiones son válidas para todos los fibrados vectoriales complejos.

En la característica de euler al tomar $\dim(X) = 1$ obtenemos directamente el teorema de Riemann-Roch. Para X una superficie algebraica proyectiva suave $(n = 2)$ y $V \to X$ el fibrado trivial de rango 1, el resultado se conoce comúnmente como la fórmula de Noether:

$$\chi(X) = \frac{1}{12}\left(c_1^2(X) + c_2(X)\right)[X]$$

donde c_1, c_2 son las clases de Chern que se evalúan sobre la clase fundamental de X

dada por la orientación natural. Por esto y por los teoremas mencionado anteriormente la característica de Euler y las clases de Chern estan intrínsecamente relacionadas, y como a su vez las clases de Todd y el caracter de Chern se relacionan con las clases de Chern, es natural pensar que la característica de Euler se relaciona con estas también, y en el teorema en el que se ve reflejado esta conexión es el siguiente

Teorema 1.4 — Hirzebruch Riemann-Roch. Sea X una variedad proyectiva compleja, y sea $E \to X$ un fibrado vectorial complejo. Entonces

$$\chi(X, E) = \mathrm{Todd}(X)\,\mathrm{ch}(E)[X].$$

El teorema de Atiyah-Singer calcula el índice de un complejo elíptico donde este índice viene dado por la característica de Euler de ciertos operadores, entonces el teorema de Hirzebruch Riemann-Roch da la noción de como podemos de calcularlo a través de los elementos relacionados en este sección.

Finalmente definiremos una útlima clase que será útil para ciertos resultados que se obtienen a través del teorema de Atiyah-Singer

Definición 1.8 — Clase de Pontrjagin. Sea E un fibrado vectorial real sobre una variedad X, entonces, su k-ésima clase de Pontrjagin es $p_k(E) := (-1)^k c_{2k}\,(E \otimes \mathbb{C}) \in H^{4k}(X)$. La clase de Pontrjagin total es $p(E) := 1 + p_1(E) + \cdots$.

2. Teorema del índice de Atiyah-Singer

2.1 Operadores y complejos elípticos

Sea X una variedad diferenciable compacta de dimensión k, y sean E y F fibrados vectoriales complejos C^∞ sobre X de rango m y n, respectivamente. Denotemos por Γ al espacio vectorial de todas las secciones C^∞ de un fibrado, y sea $D : \Gamma(E) \to \Gamma(F)$ una aplicación $\mathbb{C}$-lineal. Cada $f \in \Gamma(E)$ puede escribirse sobre un vecindad abierta trivializante U de un punto $x \in X$ como $f = (f_1, \dots, f_m)$, donde los f_i son funciones C^∞ sobre U. De la misma manera, la imagen $g = D(f)$ puede escribirse localmente como $g = (g_1, \dots, g_n)$.

Definición 2.1 — Operador diferencial de orden p. D se llama un operador diferencial de orden p si existe una matriz (d_{ij}) de tamaño $m \times n$ con

$$(g_1, \dots, g_n) = (f_1, \dots, f_m) \cdot (d_{ij})$$

donde los d_{ij} son polinomios en las $\frac{\partial}{\partial x_r}$ de grado (a lo más) p con funciones diferenciables como coeficientes.

Aquí no se requiere que el orden p se elija de manera minimal. Sea π la proyección $\pi : T^*X \backslash 0_X \to X$, es decir, el fibrado cotangente. Para un operador diferencial D de orden p, definimos el símbolo p como sigue:

$$\sigma^{(p)}(D) : \pi^* E \to \pi^* F$$

de la siguiente manera:
Para $0 \neq v \in T^*(X)$ y g una función C^∞ en X con $dg_x = v$ y $f(x) = e \in E_x$, pon

$$\sigma^{(p)}(D)(x, v)e := D\left(\frac{i^p}{p!}(g - g(x))^p \cdot f\right)(x).$$

Para describir el símbolo localmente, formamos la matriz $\left(d_{ij}^{(p)}\right)$, donde $d_{ij}^{(p)}$ es el componente homogéneo de d_{ij} de grado p. Para $x \in X$ y $v = (v_1(v), \ldots, v_k(v)) \in T_x^*X$, reemplazamos las $\frac{\partial}{\partial x_r}$ por iv_r en $\left(d_{ij}^{(p)}\right)$ y obtenemos una matriz $\left(\sigma_{ij}^{(p)}\right)$. Esto es independiente de la carta elegida para la variedad, ya que las v_r (funciones coordenadas de T_x^*X) y las $\frac{\partial}{\partial x_x}$ (base de T_xX) coinciden. Por lo tanto, obtenemos la aplicación lineal $\mathbb{C}$-lineal $\left(\sigma_{ij}^{(p)}(D)(x,v)\right)$. Obviamente, el símbolo depende del orden del operador diferencial.

Definición 2.2 — Operador diferencial elíptico. Un operador diferencial D de orden p es llamado un operador elíptico diferencial si $\sigma^{(p)}(D) : \pi^*E \to \pi^*F$ es un isomorfismo de fibrado de π^*E sobre π^*F.

■ **Ejemplo 2.1 — Laplaciano.** Sea $X = \mathbb{R}^k/L$, donde $L \subset \mathbb{R}^k$ es un reticulado, el Laplaciano $\Delta := \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_k^2}$ es un operador elíptico de orden 2 sobre las funciones, es decir, sobre secciones del fibrado trivial $X \times \mathbb{C}$, porque se tiene $\sigma^{(2)}(\Delta)(x,v) = -\left(v_1^2 + \cdots + v_k^2\right) \neq 0$ para $v \neq 0$. ■

Teorema 2.1 El $\ker(D)$ y el coker (D) son de dimensión finita.

Definición 2.3 — Índice. El índice de D se define como

$$\operatorname{ind}(D) = \dim_{\mathbb{C}} \ker(D) - \dim_{\mathbb{C}} \operatorname{coker}(D)$$

.

Sea $E_0, \ldots, E_m$ fibrados vectoriales complejos sobre X, y para $i = 0, \ldots, m-1$ sea $D_i : \Gamma E_i \to \Gamma E_{i+1}$ operadores diferenciales de grado de p con $D_{i+1}D_i = 0$ y los símbolos correspondientes $\sigma_i = \sigma^{(p)}(D_i)$.

Definición 2.4 — Complejo elíptico. Un complejo

$$D : \Gamma E_0 \xrightarrow{D_0} \Gamma E_1 \to \cdots \xrightarrow{D_{m-1}} \Gamma E_m$$

es llamado un complejo elíptico si el correspondiente complejo de símbolos

$$0 \to \pi^* E_0 \xrightarrow{\sigma_0} \cdots \xrightarrow{\sigma_{m-1}} \pi^* E_m \to 0$$

es una sucesión exacta de fibradas vectoriales.

Si consideramos $\sigma_i^{(p)}(x,v) : E_{i,x} \to E_{i+1,x}$, entonces el complejo es elíptico sí y solo si el complejo de símbolos es exacto para todo $x \in X$ y $v \in T_x^*X \backslash \{0\}$. Para $m = 1$, un complejo elíptico es exactamente un operador diferencial elíptico.

De la composición $D_i D_{i-1} = 0$, se puede considerar el grupo de cohomología $H^i = \ker(D_i) / \operatorname{im}(D_{i-1})$.

Teorema 2.2 Para un complejo elíptico, todo grupo de cohomología H^i es finito dimensional.

Pondremos $h^i := \dim_{\mathbb{C}} H^i$ cuando el complejo elíptico sea claro en el contexto.

Definición 2.5 El índice de un complejo elíptico D se define como

$$\operatorname{ind}(D) = \sum_{i=0}^{m} (-1)^i \cdot \dim_{\mathbb{C}} H^i = \sum_{i=0}^{m} (-1)^i \cdot h^i.$$

Para $m = 1$, el índice de un complejo elíptico coincide con el índice del operador elíptico D_0.

Teorema 2.3 — Teorema del índice de Atiyah-Singer. Sea X una variedad comapacta orientada y diferenciable de dimensión $2n$ y $D = (D_i : \Gamma E_i \to \Gamma E_{i+1})$ un complejo elíptico $(i = 0, \cdots, m-1)$, asociado al fibrado tangente. Entonces el índice del complejo es determinado por:

$$\operatorname{ind}(D) = (-1)^n \left(\left(\frac{1}{e\left(T^*X\right)} \sum_{i=0}^{m} (-1)^i \cdot \operatorname{ch}\left(E_i\right) \right) \operatorname{td}(TX_{\mathbb{C}}) \right) [X]$$

---

3. Aplicaciones

3.1 Operador de Dirac

En esta sección nos enfocaremos en el operador de Dirac. Para mas detalle sobre la construcción ver [2]

Comenzaremos visitando algunas propiedades de las *álgebras de Clifford*.

Sea V un espacio de Hilbert, con producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$. El álgebra de Clifford $C(V)$ se obtiene del álgebra libre sobre V (i.e, el álgebra tensorial sobre V), sujeta a la condición

$$v \otimes v = -\langle v, v \rangle.$$

En términos de una base ortonormal $e_1, ..., e_n$ de V, $C(V)$ es el álgebra generada por las condiciónes

$$\begin{aligned} e_i e_k &= -\, e_j e_i, \quad i \neq j \\ e_i^2 &= -\, 1 \end{aligned}$$

Los elementos $e_{i_1} e_{i_2} \cdots e_{i_k}$ con $i_1 < i_2 < \cdots i_k$ forman una base en $C(V)$. Así, como espacio vectorial, $C(V)$ es isomorfo a la álgebra exterior $\bigwedge V$. Tenemos una descomposición de $C(V)$ como suma directa de los subespacios $C^{par}(V)$ y $C^{impar}(V)$ generados por los productos $e_{i_1} e_{i_2} \cdots e_{i_k}$ con k par e impar respectivamente.

Cuando $V = \mathbb{R}^n$ con el producto interno estandar, denotamos $C_n := C(V)$.

Ahora consideremos una variedad Riemanniana X compacta y orientable de dimensión n, y sea T su fibrado cotangente. La estructura de T esta descrita por cambios de coordenadas locales $g_{ij}(x) \in SO(n)$ (*special Orthogonal Group*). Como la acción de $SO(n)$ en $\mathbb{R}^n$ preserva el producto interno, esta se extiende a una acción en el álgebra

C_n, así $g_{ij}(x)$ define un fibrado de álgebras de Clifford sobre X. Es posible construir un operador diferencial en secciones de este fibrado.

Sea $n = 2\ell$ un número par. Es posible probar que el álgebra $C_n \otimes \mathbb{C}$ es isomorfa al álgebra $C(2^e ll)$, de todas las matrices $2^e ll \times 2^\ell$ con coeficientes en $\mathbb{C}$. Entonces existe una representación compleja irreducible de $C_n \otimes \mathbb{C}$ de dimensión 2^ℓ. Esta representación se puede ver como un ideal izquierdo del álgebra $C_n \otimes \mathbb{C}$ de la siguiente manera.

Sea Q_j la transformación de $C_n \otimes \mathbb{C}$ dada por la multiplicación por la derecha por $e_{2j-1}e_{2j} \otimes i$. Luego, $Q_j^2 = 1$, entonces los valores propios de Q_j son ± 1. Como Q_j conmutan entre ellos y con multiplicación por la izquierda por elementos arbitrarios, se sigue que el espacio

$$\Delta_n = \{a : Q_j a = -a, j = 1, ..., \ell\}$$

es invariante bajo multiplicación por la izquiera por elementos de $C_n \otimes \mathbb{C}$, y tiene dimensión 2^ℓ. Como ya mencionamos, la acción de $SO(n)$ sobre $\mathbb{R}^n$ se extiende a una acción en C_n. Se sigue que $SO(n)$ actua en el álgebra matricial $C_n \otimes \mathbb{C}$ por automorfismos. Entonces para cada $g \in SO(n)$ existe un elemento invertible $x\mathbb{C}_n \otimes \mathbb{C}$ tal que $g(a) = xax^{-1}$ para todo $a \in C_n \otimes \mathbb{C}$. En otras palabras, para cada g existe un elemento tal que la multiplicación por la izquierda del álgebra de Clifford tiene "la mitad"del efecto de g.

Este elemento x no es único. Pero, se puede probar que existe un subgrupo $\mathrm{Spin}(n)$ del grupo C_n^{par} caracterizado por las siguientes propiedades:

- Para todo $x \in \mathrm{Spin}(n)$, el automorfismo xax^{-1} lleva al subespacio $\mathbb{R}^n \subset C_n$ a si mismo;
- si $x \longrightarrow \overline{x}$ es la inyección en C_n definida como $\overline{e_{i_1} \cdots e_{i_k}} = (-1)^k e_{i_k} \cdots e_{i_1}$ entonces se tiene $x\overline{x} = 1$ para todo $x \in \mathrm{Spin}(n)$.

se sigue de la primera propiedad que para cada $x \in \mathrm{Spin}(n)$, la transformación que lleva $v \in \mathbb{R}^n$ a xvx^{-1} es un elemento de $SO(n)$. El homomorfismo del $\mathrm{Spin}(n)$ a $SO(n)$ definido por esta correspondencia es un cubrimiento doble.

El grupo $\mathrm{Spin}(n)$ actúa en el espacio $C_n \otimes \mathbb{C}$ por la multiplicación de Clifford por la izquierda, y por tanto actúa en el subespacio Δ_n. De hecho, no es dificiel ver que existe una representación

$$C_n \otimes \mathbb{C} = 2^\ell \Delta_n$$

A pesar de que Δ_n es irreducible como representación de $C_n \otimes \mathbb{C}$, como representación de $\mathrm{Spin}(n)$ este se descompone como la suma de dos representaciones irreducible

$$\Delta_n = \Delta_n^+ + \Delta_n^-$$

donde $\Delta_n^+ = \Delta_n \cap (C_n^{par} \otimes \mathbb{C})$ y $\Delta_n^- = \Delta_n \cap (C_n^{impar} \otimes \mathbb{C})$. Así, Δ_n^+ y Δ_n^- construyen $C_n \otimes \mathbb{C}$.

Queremos usar las representaciones mediante $\mathrm{Spin}(n)$ para construir fibrados vectoriales sobre X. Localmente, el cambio de coordenadas $g_{ij}(x) \in SO(n)$ asociado al fibrado tangente, se pueden llevar a elementos $\tilde{g_{ij}}(x) \in \mathrm{Spin}(n)$. Pero, si los elementos $\tilde{g_{ij}}(x)$ se usan para construir un fibrado sobre X, deben cumplir la condición de cociclo,

$$\tilde{g_{ij}}(x)\tilde{g_{jk}}(x)\tilde{g_{ki}}(x) = 1$$

a priori no podemos asegurar que la condición de cociclo se cumpla con $\tilde{g_{ij}}(x)$. En el caso de que siempre se pueda llevar $g_{ij}(x)$ a elementos $\tilde{g_{ij}}(x)$ tales que cumplen la condición de cociclo, decimos que X es una variedad *spin*. Es posible probar que una condición necesaria y suficiente para que X sea spin es que las clases de Stiefel-Whitney w_2 sean 0. Por ejemplo, todas las esferas son variedades spin.

Ahora en adelante, tomamos X como variedad spin. Sea $C(T)$ un fibrado vectorial real con fibras $C(T_x)$ y cambios de coordenadas

$$G_{ij}(x) = \text{ multiplicación izquierda por } \tilde{g_{ij}}(x).$$

Si ΔT, $\Delta^+ T$ y $\Delta^- T$ denotan los fibrados vectoriales complejos definidos de forma similar, tenemos isomorfismos $C(T) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = 2^\ell \Delta T$ y $\Delta T = \Delta^+ T + \Delta^- T$. La relación $g(va) = (gvg^{-1})(ga)$ mustra que la multiplicación por la izquierda por elementos de ΔT_X por vectores cotangentes a x definen un morfismo de fibrados $T \otimes \Delta T \to \Delta T$. Las secciones de ΔT son llamadas *spinors* en X. Las secciones de $\Delta^+ T$ y $\Delta^- T$ son llamadas *+1/2-spinors* y *-1/2-spinors*, respectivamente.

Queremos definir un operador diferencial ∇ en spinors con símbolo $\sigma(x,\xi)$ es la multiplicación de Clifford por ξ. Por analogía a la derivada exterior d (que tiene por símbolo la multiplicación por ξ), la fórmula $\nabla(a_J e_J) = \sum_\nu \frac{\partial a_I}{\partial x_\nu} e_\nu e_J$ es un candidato, donde $e_\nu e_J$ es el producto de Clifford $e_\nu e_{j_1} \cdots e_{j_k}$. pero, la multiplicación de Clifford depende del producto interno, que varía fibra a fibra, y la fórmula en cuestión no considera esta variación. Con esto en mente, definimos el operador $\nabla : C^\infty(\Delta) \to C^\infty(\Delta)$ como

$$\nabla s = \sum_i e_i \partial_{e_i} s$$

donde ∂_v es la derivada covariante en la dirección de v asociada a la estructura Riemanniana en X, y el producto es la multiplicación de Clifford.

En términos locales, tenemos

$$\nabla\left(\sum_J a_J e_J\right) = \sum_{i,J} e_i \partial_{e_i}(a_J e_J) = \sum_{i,J} e_i \frac{\partial a_I}{\partial x_i} e_J + \sum_{i,J} e_i a_J \partial_{e_i} e_J.$$

Se sigue qie ∇ es un operador diferencial de primer orden y que su símbolo viene dado por

$$\sigma(x,\xi) = \xi a, \qquad a \in \Delta_X.$$

Como $\xi^2 = -\langle \xi, \xi \rangle$, la multiplicación por $\xi \neq 0$ es un isomorfismo, y por lo tanto ∇ es un operador elíptico.

Mediante un calculo es posible demostrar que si $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es la extensión del producto interno de $\mathbb{R}^n$ a C_n para el cual $\{e_I\}$ es una base ortonormal, entonces

$$\langle \xi a, b \rangle = -\langle a, \xi b \rangle$$

para $a, b \in C_n$. Como para un operador diferencial de orden k tenemos $\sigma(D^*) = (-1)^k \sigma(D)^*$, esto nos dice que ∇ puede ser autoadjunto, en efecto, esto sigue directamente se un cálculo.

Como ∇ es autoadjunto, su índice es cero. Para obtener un operador tal que su índice es distinto de cero, restringimos ∇ al operador

$$\nabla^+ : C^\infty(\Delta^+ T) \to C^\infty(\Delta^- T)$$

El operador ∇^+ es el *operador de Dirac* en la variedad spin X.

Finalmente, podemos aplicar el Teorema del índice a este operador. Para esto, vamos a aplicar otra versión del Teorema, distinta a la enunciada en el capítulo anterior

Teorema 3.1 Sea X una variedad suave compacta de dimensión n, y sea D un operador elíptico en X, y sea $\sigma(D)$ su símbolo. Entonces,

$$\operatorname{ind} D = (-1)^n (\operatorname{ch}(\sigma(D)) \operatorname{Todd}(TX \otimes \mathbb{C}))[TX]$$

Aplicando el Teorema para el operador de Dirac en X, tenemos

$$\operatorname{ind} \nabla^+ = \big(\operatorname{ch}(\sigma(\nabla^+)) \operatorname{Todd}(T \otimes \mathbb{C})\big) [TX] \tag{3.1.1}$$

Para interpretar el lado izquierdo de esta ecuación, primero observamos que como $\langle \nabla^2 u, u \rangle = \langle \nabla u, \nabla u \rangle$, tenemos

$$\operatorname{Ker} \nabla^+ + \operatorname{Ker} \nabla^- = \operatorname{Ker} \nabla = \operatorname{Ker} \nabla^2.$$

El operador ∇^2 es llamado *Laplaciano spinor*, y soluciones de la ecuación $\nabla^2 u = 0$ son llamadas *spinors armónicas* en X. Como la adjunta de ∇^+ es ∇^-, se tiene

$$\operatorname{ind} \nabla^+ = \dim \operatorname{Ker} \nabla^+ - \dim \operatorname{Ker} \nabla^-$$

Este entero el llamado el *índice spinor* de X, denotado $\operatorname{Spin}(X)$. Para simpificar la expresión del lado derecho de 3.1.1, se puede demostrar que el lado derecho es igual a

$$(-1)^\ell \left(\frac{\operatorname{ch}(\Delta^+ T - \Delta^- T)}{e(T)} \operatorname{Todd}(T \otimes \mathbb{C}) \right) [X].$$

Para caluclar la clase de Chern en la expresión anterior, invocamos el *Splitting principle*. Así, podemos suponer que T es la suma de fibrados reales orientables

$$T = P_1 \oplus \ldots P_m$$

Además, podemos suponer que cada P_ν, x tiene un producto interno que coincide con el producto interno en T_x.

Como ch es un homomorfismo de anillos, tenemos

$$\mathrm{ch}(\Delta^+T - \Delta^-T) = \prod_1^\ell \mathrm{ch}(\Delta^+P_i - \Delta^-P_i).$$

Además, para fibrados en rectas L' y L'' tenemos $c_1(L' \otimes L'') = c_1(L') \oplus c_1(L'')$, por lo tanto $\mathrm{ch}(\Delta^+P) = e^{x/2}(L)$ y $\mathrm{ch}(\Delta^-P) = e^{-x/2}(L)$. Entonces

$$\mathrm{ch}(\Delta^+T - \Delta^-T) = \prod_{i=1}^\ell (e^{x_i/2} - e^{-x_i/2})(T \otimes \mathbb{C})$$

donde, se indexan los x_i tal que $x_{i+\ell} = -x_i$, $i = 1, ..., \ell$. Reemplazando esta relación en 3.1.1 obtenemos

$$\begin{aligned}
\operatorname{ind} \Delta^+ =& (-1)^\ell \frac{\prod_1^\ell (e^{x_i/2} - e^{-x_i/2}) \prod_1^\ell x_i \prod_1^\ell (-x_i)}{e(T) \prod_1^\ell (1 - e^{-x_i}) \prod_1^\ell (1 - e^{x_i})}[X] \\
&= (-1)^\ell \prod_1^\ell x_i \frac{e^{x_i/2} - e^{-x_i/2}}{(1 - e^{x_i})(1 - e^{-x_i})}[X] \\
&= (-1)^\ell \prod_1^\ell \frac{x_i}{e^{x_i/2} - e^{-x_i/2}}[X] \\
&= (-1)^\ell \hat{A}[X]
\end{aligned}$$

así, logramos llegar a una expresión para el índice del operador que es más facíl de calcular y que se calcula a partir de características puramente topológicas de la variedad, donde $\hat{A}$ es el $\hat{A}$-*genus*, dado por

$$\hat{A}[X] = \prod_1^\ell \frac{x_i/2}{\sinh x_i/2}(T \otimes \mathbb{C}$$

es un polinomio en las clases de Pontrjagin de X.

La fórmula,

$$\operatorname{ind} \Delta^+ = (-1)^\ell \hat{A}[X]$$

es precisamente la fórmula conjeturada, para ℓ par, para el operador de Dirac, antes de que se demostrara el Teorema de Atiyah-Singer.

Obs Como $\hat{A}$ es la suma de clases de cohomología de dimesión par, cuando ℓ es impar, se tien $\hat{A}[X] = 0$.

Hay una relación cercana entre el polinomio $\hat{A}$ y la clase de Todd. Si X es una variedad compleja $m-$dimensional con fibrado tangente T_C, entonces,

$$\begin{aligned}\text{Todd}(T_C) =& \prod_1^m \frac{x_i}{1-e^{-x_i}}(T_C) \\ =& \prod_1^m e^{x_i/2} \prod_1^m \frac{x_i/2}{\sinh x_i/2}(T_C) \\ =& e^{\frac{1}{2}c_1}\hat{A}\end{aligned}$$

donde c_1 es la primera clase de Chern de T_C, y $\hat{A}$ esta dado en términos de las clases de Pontrjagin del fibrado real subyacente a T_C. Entonces, para una variedad real X, podemos definir una çlase de Todd real"para X, dado que un hay un substituto apropiado para c_1. Este el punto de partida para el Teorema de Rieman-Roch de Atiyah y Hirzebruch.

3.2 Teoría de Yang-Mills

En esta sección presentamos una aplicación del Teorema de Atiyah-Singer a la teoría de Yang-Mills. La teoría de Yang-Mills se basa en la idea de los grupos de Lie y las álgebras de Lie, resulta ser un caso especial de la teoría de campos de gauge, que a su vez es un tipo de teoría cuantica de campos. Dentro de la teoría de Yang-Mills, estan las ecuaciones de Yang-Mills, que, simplificando, son las ecuaciones de movimiento o ecuaciones de Euler-Lagrange dentro de la teoría de Yang-Mills.

Usaremos el Teorema de Atiyah-Singer para calcular la dimensión de un espacio de funciones llamadas *Instantones*, que corresponden a soluciones no triviales a las ecuaciones de Yang-Mills, matematicamente, los instantones son conexiones en un fibrado sobre una variedad Riemanniana 4-dimensional que tiene actua como el espacio-tiempo.

Consideramos una variedad M $4-$dimensional compacta y orientable, por ejemplo $M = S^4$, la esfera $4-$dimensional.

En M tenemos un campo de Yang-Mills, que pertenece a un grupo de Lie compacto G y esta dado por un potencial de gauge A (en términos matemáticos, un potencial de gauge es una conexión sobre un fibrado principal), una $1-$forma en M con valores en el álgebra de Lie g de G. Simplificando notación, podemos identificar este campo como,

$$F = dA + \frac{1}{2}A \wedge A$$

una $2-$forma en M con valores en g. Con esta notación, la identidad de Bianchi queda como

$$D_2F := dF + A \wedge F = 0$$

y el efecto de una tranformación de gauge infinitesimal en A es,

$$\delta A = d\chi + A \wedge \chi =: D_0 \chi \tag{3.2.1}$$

donde χ es una función en M que alcanza valores en g (mas precisamente, es una sección del fibrado vectorial V_g, que corresponde al fibrado con fibra g, asociado al fibrado principal).

Un *instanton* sobre M esta definido como la conexión A tal que el campo sea *self-dual*,

$$\star F = F$$

donde $\star$ es el operador de Hodge. Esto implica que la ecuación de Yang-Mills

$$D_2 \star F := (d + A\wedge) \star F = 0$$

se cumple. El problema a tratar es calcular la dimensión de una familia local de instantones. La variación de F inducida por una variación infinitesimal de A es,

$$\delta F = d\delta A + A \wedge \delta A =: D_1 \delta A$$

Así, una fórmulación equivalente a nuestro problema es preguntar: ¿Cual es la dimesnión h_1 del espacio de variaciones δA tales que F es self-dual y no sean de la forma 3.2.1, i.e, no sean producto de una tranformada de gauge? Esta equivalencia es debido a que estamos buscando la dimensión de una familia *local* de instantones.

Denotando la proyección a las $2-$formas *anti-self-dual* ($\star F = -F$) por P, podemos decir que queremos calcular la cantidad,

$$h_1 = \operatorname{Ker} PD_1 / \operatorname{Im} D_0. \tag{3.2.2}$$

Esta cantidad esta bien definida pues $\operatorname{Im} D_0 \subset \operatorname{Ker} PD_1$, ya que $D_1 D_0 \chi = F\chi$, y así

$$(PD_1) D_0 \chi = 0$$

porque F es self-dual. Aquí, el Teorema del índice entra mediante el complejo

$$D : 0 \longrightarrow \Lambda_g^0(M) \xrightarrow{D_0} \Lambda_g^1(M) \xrightarrow{PD_1} \Lambda_{-g}^2(M) \longrightarrow 0.$$

Se puede probar que este complejo es eliptico! En lo anterior,

$$\begin{aligned} \Lambda_g^0(M) =& \Lambda^0(M) \otimes V_g \\ \Lambda_g^1(M) =& \Lambda^1(M) \otimes V_g \\ \Lambda_g^2(M) =& \Lambda_-^2(M) \otimes V_g \end{aligned}$$

Las secciones de estos fibrados son $0-$formas, $1-$formas, y $2-$formas anti-self-dual respectivamente. Luego, por

$$\operatorname{ind} D = \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i \dim H^i$$

tenemos

$$\operatorname{ind} D = h_0 - h_1 + h_2$$

con h_1 dado por 3.2.2 y $h_0 = \dim \ker D_0$, $h_2 = \dim \ker(PD_1)^*$. Este índice puede ser evaluado con el Teorema de Atiyah-Singer, y obtenemos

$$h_1 = 4kC(G) - \frac{1}{2} \dim G(\chi - \sigma) + h_0 + h_2$$

donde k es el índice del instanton, χ es la característica de Euler de M, y σ es la firma de M.

Los valores h_0 y h_2 se desvanecen en algunos casos intersantes. Si la conexión es reducible a un subgrupo $H \subset G$, entoneces h_0 es distinto de cero. Una condición suficiente para que $h_2 = 0$ es que la curvatura escalar de M sea no-negativa y que el tensor de Weyl en M es autoadjunto.

Como ejemplo, si tomamos $M = S^4$, tenemos $\chi = 2$ y $\sigma = 0$, $G = SU(2)$ con $C(G) = 2$, dim $= 3$ y $h_0 = h_2 = 0$. En este caso recuperamos un resultado clásico,

$$h_1 = 8k - 3.$$

4. Heat Kernel

Los papers originales de Atiyah y Singer sobre el Teorema del índice expresan el índice analítico como un invariante topológico. Este se puede representar de distintas maneras dependiendo de cual versión de cohomología se este usando y como se representan las clases características. Pero, los principales operadores de interes, como el operador de Dirac, son expresados en términos de la métrica Riemanniana. En este setting tambien hay una manera natural para representar las clases características, usando la curvatura de la conexión de Levi-Civita. En la decada del 1970 aparecen nuevas demostraciones que se aprovechaban este hecho, y daban más herramientas para el estudio de otros problemas sobre el índice. La idea original viene de McKean y Singer.

Supongamos que D es un operador eliptico de primer orden, y consideremos los operadores autoadjuntos D^*D y DD^*. En una variedad compacta, estos tienen espectro discreto $0 \leq \lambda_0 \leq \lambda_1 ...$, donde cada valor se alcanza solo un número finito de veces. Si ϕ_i son los vectores propios, entonces el *kernel de calor*

$$H(x, y, t) = \sum_{j=0}^{\infty} e^{-\lambda_j t} \phi_j(x) \phi_j(y)$$

es una función suave para $t > 0$, formalmente escrito como e^{-tD^*D} ó e^{-tDD^*}. En particular tiene traza

$$\operatorname{Tr} e^{-tD^*D} = \sum_{j=0}^{\infty} e^{-\lambda_j t}, \qquad \operatorname{Tr} e^{-tDD^*} = \sum_{j=0}^{\infty} e^{-\mu_j t}$$

Si $D^*D\phi = \lambda\phi$, entonces $DD^*D\phi = \lambda D\phi$, entonces, si $D\phi$ es distinto de cero, este será un vector propio de DD^*. De esto, podemos concluir que los vectores propios de DD^* y D^*D coinciden, así

$$\operatorname{Tr} e^{-tD^*D} - \operatorname{Tr} e^{-tDD^*} = \dim \operatorname{Ker} D^*D - \dim \operatorname{Ker} DD^* = \operatorname{ind} D.$$

En particular, esta expresión es independiente de t, así podemos observar el comportamiento de cada término del lado izquierdo cuando $t \to 0$.

En este caso, a lo largo de la diagonal, tenemos la expansión asintótica

$$H(x,x,t) \sim \sum_{j=0}^{\infty} a_j t^{-n/2+j}$$

donde los coeficientes a_j estan determinados localmente. En otras palabras, cada uno es una expresión algebraica en un número finito de derivadas de los coeficientes del operador D, que en el caso del operador de Dirac corresponden a la métrica Riemanniana. Luego,

$$\begin{aligned} \operatorname{ind} D &= \int_M \left[\sum_{j=0}^{\infty} a_j(D^*D)t^{-n/2+j} - \sum_{j=0}^{\infty} a_j(DD^*)t^{-n/2+j} \right] \\ &= \int_M \left(a_{n/2}(D^*D) - a_{n/2}(DD^*) \right). \end{aligned}$$

Para el operador de Laplace-Beltrami Δ en una variedad Riemanniana $n-$dimensional, el primer coeficiente a_0 es la función constante $1/(4\pi)^n/2)$. Esto refleja la solución a la ecuación de calor clásica en el espacio Euclideano, e implica la ley de Weyl para el crecimiento asintótico de los valores propios de Δ, que solo dependen de n y de $\operatorname{Vol}(X) \sim \int_X a_0(x)|dx|$.

La ley de Weyl, que no depende de la expansión del kernel del calor, fue una motivación para Mark Kac, que se hizo la pregunta: Los valores propios de Δ, ¿Que tanto determinan de X? Kac se concentro en dominios del espacio Euclideano $\mathbb{E}^2$. McKean y Singer comenzaron a trabajar en esto, y determinaron los coeficientes a_1 y a_2 en la expansión del kernel del calor. En particular, a_1 es un multiplo de la curvatura escalar. Para $n = 2$, McKean y Singer observaron una cancelación que se cumple en todos los puntos de X, y conjeturan un resultado similar en cualquier dimensión. Es decir, denotemos por $\Delta^{(q)}$ al operador de Laplace en $q-$formas diferenciales, $H^{(q)}$ al kernel de calor asociado, y $a_k^{(q)}$ a sus coeficientes en la expansión. La conjetura de McKean-Singer es que para todo $x \in X$ el límite

$$\lim_{t \to 0} \sum_{q=0}^{n} (-1)^q \operatorname{Tr} H^{(q)}(x,x,t)$$

existe y, además, para n par es igual al integrando de Gauss-Bonnet-Chern, que integra para obtener el número de Euler de X. De la expansión asintótica, la existencia del límite es equivalente a la cancelación

$$\sum_{q=0}^{n} (-1)^q \operatorname{Tr} a_k^{(q)}(x) = 0, \quad k < \frac{n}{2}, \quad x \in X$$

McKean-Singer demustran que el límite existe y es cero para n impar, y calculan el límite para $n = 2$.

En 1970 Vijay Patodi demustra la conjetura de McKean-Singer mediante un calculo. Patodi inmediatamente aplicó sus métodos para probar el Teorema de Rieman-Roch para variedades de Kähler. Algunos años despues, Gilkey uso métodos diferentes para probar el Teorema para operadores de firma con torsión. Por argumentos topológicos, este Teorema implica el Teorema del índice de Atiyah-Singer. Consideremos los functores

$$\mathrm{Met} : \mathbf{Man}_n^{op} \longrightarrow \mathbf{Set}$$
$$\Omega^q : \mathbf{Man}_n^{op} \longrightarrow \mathbf{Set}$$

donde, si M es una variedad suave de dimensión n, $\mathrm{Met}(M)$ es el conjunto de métricas Riemannianas y $\Omega^q(M)$ es el conjunto de $q-$formas diferenciales. El resultado principal de Gilkey es el siguiente:

Teorema 4.1 Una forma diferencial natural

$$\omega : \mathrm{Met} \longrightarrow \Omega^q$$

que es regular, homogénea y de peso no-negativo, es un polinomio en las formas de Chern-Weil de las clases de Pontrjagin.

Atuyah-Bott-Patodi aplican el Teorema anterior al operador firma P en una variedad Riemanniana. El devanecimiento de las formas con peso positivo implica

$$\mathrm{Tr}[a_k^0(x) - a_k^1(x)] = 0, \quad k < \frac{n}{2}, \quad x \in X$$

Esta cancelación implica la existencia de

$$\lim_{t\to 0}[\mathrm{Tr}\, H(x,x,t)^0 - \mathrm{Tr}\, H(x,x,t)^1],$$

y el Teorema de Gilkey nos dice que el límite es un polinomio en clases de Pontrjagin. La existencia de este límite, que esta directamente conectado con el Teorema del índice localmente, es una pieza que permite continuar con el desarrollo de la teoría en el futuro.

5. Referencias

1 D.Freed, "*The Atiyah-Singer Index Theorem*"
2 A. Mukherjee, "*Atiyah-Songer Index Theorem: An Introduction*"
3 P. Shanahan, "*The Atiyah-Singer Index Theorem, An Introduction*"
4 A. Gathmann, "*Notes on Algebraic Geometry 2002/2003.*"
5 H. Holden, R. Piene,"*The Abel Prize 2003 - 2007: The First Five Years*"
6 P.B. Gilkey, "*Invariance theory, the heat equation, and the Atuyah-Singer index Theorem*"
7 F. Hirzebruch, T. Berger, R. Jung, "*Manifolds and Modular Forms*"
8 H. Römer, "*Atiyah-Singer Index Theorem and Quantum Field Theory*"
9 H. Ooguri, "*Conferencia Internacional de Fisica Avanzada*"