CATEGORÍAS DERIVADAS Y TRANSFORMADA DE FOURIER-MUKAI

MATEO HIDALGO

Resumen. En este artículo daremos un vistazo general sobre las categorías derivadas y sobre la transformada de Fourier-Mukai. Nos basaremos principalmente en el libro de [Huybrechts]. Omitiremos la mayoría de demostraciones y nos centraremos en la construcción de las categorías derivadas y en resultados que se desprenden de la teoría de la transformada de Fourier-Mukai.

Índice

... if I could only understand the
beautiful consequence following
from the concise proposition
$d^2 = 0$.

From Henri Cartan Laudatio on receiving the degree of Doctor Honoris Causa, Oxford University, 1980

1. Introducción

1.1. Estructura del Texto. La sección 2 recuerda conceptos de teoría de categorías que serán usados constantemente en el texto, además de definir las categorías trianguladas. La sección 3 recuerda álgebra homológica, construye las categorías derivadas y define los functores derivados. La sección 4 define y ve resultados de la transformada de Fourier-Mukai.

1.2. Convención. En este texto asumiremos las variedades algebraicas definidas sobre un cuerpo k algebraicamente cerrado, y las supondremos, al menos que se especifique lo contrario, reducidas y separadas, pero no necesariamente irreducibles o suaves. En particular, haces coherentes sobre una variedad algebraica serán simplemente haces localmente finitamente presentados.

2. Teoría de Categorías

2.1. Recuerdos sobre Categorías y Functores. Suponemos que el lector está familiarizado con el concepto de categoría y de functor entre dos categorías. Recordamos algunas nociones por conveniencia. Al menos que se diga explícitamente lo contrario, todos los functores en este texto serán covariantes y las categorías serán pequeñas.

Definición 2.1. Sea $\mathcal{C}$ una categoría, $X, Y \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$, $f, g \in \mathrm{Hom}(X, Y)$. Un equalizador consiste de un objeto $E \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ y un morfismo $\mathrm{eq} \in \mathrm{Hom}(E, X)$ que satisface $f \circ \mathrm{eq} = g \circ \mathrm{eq}$ tal que cumple que para todo objeto $O \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C}), m \in \mathrm{Hom}(O, X)$ se satisface que

$$f \circ m = g \circ m \implies \exists! u : O \to E \text{ tal que } \mathrm{eq} \circ u = m$$

es decir, siempre es posible completar el siguiente diagrama conmutativo de manera única

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[rr] & & X \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & Y \\
& O \arrow[ul, dotted, "\exists ! u"] \arrow[ur, "m"'] & &
\end{tikzcd}$$

es estándar demostrar que esta construcción es única salvo un único isomorfismo.

Análogamente, un coequalizador de f, g es un objeto Q junto a un morfismo $q : Y \to Q$ tal que $q \circ f = q \circ g$ y además que para cualquier otro objeto Q y morfismo $q' : Y \to Q$ tal que $q' \circ f = q' \circ g$ se tiene que existe un único morfismo $u : Q \to Q'$ tal que $u \circ q = q'$. En otras palabras, siempre se puede completar de manera única el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & Y \arrow[r, "q"] \arrow[dr, "q'"'] & Q \arrow[d, dotted, "\exists ! u"] \\
& & Q'
\end{tikzcd}$$

es estándar demostrar que esta construcción es única salvo un único isomorfismo.

Definición 2.2. Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ dos categorías. Un functor $F : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ es completo si para todo par de objetos $A, B \in \mathcal{A}$ el mapa inducido

$$F : \mathrm{Hom}(A, B) \longrightarrow \mathrm{Hom}(F(A), F(B))$$

es sobreyectivo. El functor F es llamado fiel si este mapa es inyectivo para todo $A, B \in \mathcal{A}$.

Un morfismo $F \longrightarrow F'$ entre dos functores $F, F' : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ está dado por morfismos $\varphi_A \in \mathrm{Hom}\,(F(A), F'(A))$ para cualquier objeto $A \in \mathcal{A}$ los cuales son functoriales en A, i.e. $F'(f) \circ \varphi_A = \varphi_B \circ F(f)$ para cualquier $f : A \longrightarrow B$.

Definición 2.3. Dos functores $F, F' : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ son isomorfos si existe un morfismo de functores $\varphi : F \longrightarrow F'$ tal que para cualquier objeto $A \in \mathcal{A}$ el morfismo inducido $\varphi_A : F(A) \longrightarrow F'(A)$ es un isomorfismo (en $\mathcal{B}$).

Equivalentemente, F y F' son isomorfos si existen morfismos de functores $\varphi : F \longrightarrow F'$ y $\psi : F' \longrightarrow F$ con $\varphi \circ \psi = \mathrm{id}$ y $\psi \circ \varphi = \mathrm{id}$.

Definición 2.4. Un functor $F : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ es llamado una equivalencia si existe un functor $F^{-1} : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{A}$ tal que $F \circ F^{-1}$ es isomorfo a $\mathrm{id}_{\mathcal{B}}$ y $F^{-1} \circ F$ es isomorfo a $\mathrm{id}_{\mathcal{A}}$. Uno llama a F^{-1} un inverso de F.

Dos categorías $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ se dicen equivalente si existe una equivalencia $F : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$.

Claramente una equivalencia es completamente fiel. Un converso parcial está dado por la siguiente proposición

Proposición 2.5. *Sea $F : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ un functor completamente fiel. Entonces F es una equivalencia si y solo si todo objeto $B \in \mathcal{B}$ es isomorfo a un objeto de la forma $F(A)$ para algún $A \in \mathcal{A}$.*

Demostración. Para cada objeto $B \in \mathcal{B}$ elijamos $A_B \in \mathcal{A}$ junto con un ismorfismo $\varphi_B : F(A_B) \xrightarrow{\sim} B$, así, definamos el functor

$$F^{-1} : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{A}$$

como el functor que a cada objeto $B \in \mathcal{B}$ le asocia el objeto $A_B \in \mathcal{A}$ y cuyo mapa inducido en morfismos $F^{-1} : \mathrm{Hom}\,(B_1, B_2) \to \mathrm{Hom}\,\left(F^{-1}(B_1), F^{-1}(B_2)\right)$ venga dado por la composición de

$$\mathrm{Hom}\,(B_1, B_2) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}\,(F(A_{B_1}), F(A_{B_2}))\,, \quad f \longmapsto \varphi_{B_2}^{-1} \circ f \circ \varphi_{B_1}$$

y el inverso de la biyección

$$F : \mathrm{Hom}\,(A_{B_1}, A_{B_2}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}\,(F(A_{B_1}), F(A_{B_2}))$$

Los isomorfismos $F \circ F^{-1} \simeq \mathrm{id}_{\mathcal{B}}$ y $F^{-1} \circ F \simeq \mathrm{id}_{\mathcal{A}}$ son los naturalmente inducidos por los isomorfismos φ_B. $\square$

Definición 2.6. Dada una categoría $\mathcal{A}$, una subcategoría $\mathcal{D}$ consiste de una subcolección de objetos y morfismos de $\mathcal{A}$ tales que se cumple

i) Si el morfismo $f : A \to B$ está en $\mathcal{D}$ entonces también lo están A y B.

ii) Si los morfismos $f : A \to B$ y $g : B \to C$ están en $\mathcal{D}$ entonces también $g \circ f$ está en $\mathcal{D}$.
iii) Si el objeto A están en $\mathcal{D}$ entonces el morfismo 1_A también lo está.

Estas condiciones hacen de $\mathcal{D}$ una categoría y de la inclusión $\mathcal{D} \hookrightarrow \mathcal{C}$ un functor. Adicionalmente, decimos que $\mathcal{D}$ es una subcategoría completa si para cualquier A, B en $\mathcal{D}$, todo morfismo $f : A \to B$ en $\mathcal{C}$ también está en $\mathcal{D}$ (es decir, el functor inclusión es completo).

Corolario 2.7. *Cualquier functor completamente fiel $F : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ define una equivalencia entre $\mathcal{A}$ y la subcategoría completa $\mathcal{B}$ de todos los objetos $B \in \mathcal{B}$ isomorfos a $F(A)$ para algún $A \in \mathcal{A}$.*

En la siguiente proposición sea $\mathrm{Fun}(\mathcal{A})$ la categoría de todos los functores contravariantes, es decir, los objetos son functores $F : \mathcal{A}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Conj}$ y los morfismos son morfismos de functores. Considerar el functor natural

$$\mathcal{A} \to \mathrm{Fun}(\mathcal{A}),\ A \to \mathrm{Hom}(\ , A)$$

Proposición 2.8 (Lema de Yoneda)**.** *Este functor define una equivalencia de $\mathcal{A}$ con la subcategoría completa de functores representables, es decir, functores isomorfos a algún* $\mathrm{Hom}(\ , A)$*. En particular,* $A \mapsto \mathrm{Hom}(\ , A)$ *es completamente fiel.*

Demostración. Ver [Categories for the working mathematician, p.61] □

2.2. Categorías Aditivas y Abelianas.

Definición 2.9. Una categoría $\mathcal{A}$ es aditiva si para todo par de objetos $A, B \in \mathcal{A}$ el conjunto $\mathrm{Hom}(A, B)$ tiene estructura de grupo abeliano y se cumplen las siguientes tres condiciones:

i) La composiciones $\mathrm{Hom}(A_1, A_2) \times \mathrm{Hom}(A_2, A_3) \longrightarrow \mathrm{Hom}(A_1, A_3)$ escritas como $(f, g) \longmapsto g \circ f$ son bilineales.
ii) Existe un objeto nulo $0 \in \mathcal{A}$,, es decir un objeto tal que $\mathrm{Hom}(0, 0)$ es el grupo trivial de un elemento.
iii) Para cualquier par de objetos $A_1, A_2 \in \mathcal{A}$ existe un objeto$B \in \mathcal{A}$ con morfismos $j_i : A_i \longrightarrow B$ y $p_i : B \longrightarrow A_i, i = 1, 2$, que hacen de B el producto y suma directa de A_1 y A_2.

Tácitamente asumimos las compatibilidades $p_i \circ j_i = \mathrm{id}, p_2 \circ j_1 = p_1 \circ j_2 = 0$, y $j_1 \circ p_1 + j_2 \circ p_2 = \mathrm{id}$, que se cumplen automaticamente modulo automorfismo de B.

Un functor $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ entre categorías aditivas $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ normalmente se asumirá aditivo, i.e. los mapas inducidos $\mathrm{Hom}(A, B) \to \mathrm{Hom}(F(A), F(B))$ son morfismos de grupos.

Iremos un paso más allá. Como las categorías con las que nos interesaremos tendrán origen geométrico, es decir, están definidas en términos de ciertas variedades sobre algún cuerpo base, usualmente lidiaremos con el siguiente tipo de categoría aditiva. Denotamos por k a un cuerpo arbitrario.

Definición 2.10. Una categoría k-lineal es una categoría aditiva $\mathcal{A}$ tal que los grupos $\mathrm{Hom}(A, B)$ son k-espacios vectoriales y tal que todas las composiciones son k-bilineales.

Functores aditivos entre categorías k-lineales sobre un cuerpo común k se asumirán k-lineales i.e. para todo par de objetos $A, B \in \mathcal{A}$ el mapa $F : \mathrm{Hom}(A, B) \longrightarrow \mathrm{Hom}(F(A), F(B))$ es k-lineal.

Todo lo ya definido sobre equivalencia de categorías y el Lema de Yonneda se traspasa directamente de forma natural a categorías (y functores) aditivos y k-lineales.

Definición 2.11. Una categoría aditiva $\mathcal{A}$ es llamada abeliana si además se cumple la siguiente condición:

iv) Todo morfismo $f \in \mathrm{Hom}(A, B)$ admite un kernel y un cokernel, donde el kernel de f se define como el equalizador de f y el elemento nulo de $\mathrm{Hom}(A, B)$ mientras que el cokernel de f se define como el coecualizador de f y el elemento neutro de $\mathrm{Hom}(A, B)$.

Además, pedimos que el mapa natural $\mathrm{Coim}(f) \longrightarrow \mathrm{Im}(f)$ sea un isomorfismo, donde definimos la imagen $\mathrm{Im}(f)$ como un kernel para el cokernel $B \to \mathrm{Coker}(f)$ y la coimagen $\mathrm{Coim}(f)$ como un cokernel para el kernel $\mathrm{Ker}(f) \to A$.
Así, la condición iv) dice que para cualquier $f : A \longrightarrow B$ existe el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Ker}(f) \arrow[r, "i"] & A \arrow[rrr, "f"] \arrow[dr] & & & B \arrow[r, "\pi"] & \mathrm{Coker}(f) \\
& & \mathrm{Coker}(i) \arrow[r, "\sim"] & \mathrm{Ker}(\pi) \arrow[ur] & &
\end{tikzcd}$$

En particular, la noción de sucesión exacta es usualmente solo considerada en categorías abelianas. Recordamos que la sucesión:

$$A_1 \xrightarrow{f_1} A_2 \xrightarrow{f_2} A_3$$

es llamada exacta si y solo si $\operatorname{Im}(f_1) = \operatorname{Ker}(f_2)$ y es un complejo si $\operatorname{Im}(f_1) \subset \operatorname{Ker}(f_2)$, es decir, $f_2 \circ f_1 = 0$.

Ejemplo 2.12.

1. Sea A un anillo conmutativo. La categoría $\mathbf{Mod}(A)$ de A-módulos es abeliana. La subcategoría completa de modulos finitamente generados también es abeliana.
2. Dado un espacio topológico X, la categoría de haces de grupos abelianos en X, denotada $\mathbf{Sh}(X)$ es abeliana.
3. Dada una variedad algebraica X, las categorías $\mathbf{Coh}(X)$ y $\mathbf{Qcoh}(X)$ de haces coherentes y haces quasi-coherentes, respectivamente, son ambas abelianas.

Es claro que un functor, al mapear composiciones en composiciones, debe mandar complejos en complejos. Sin embargo, no necesariamente manda sucesiones exactas en sucesiones exactas. Este es un problema fundamental de la teoría.

Definición 2.13. El functor F es exacto por la izquierda (derecha) si cualquier sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow A_1 \xrightarrow{f_1} A_2 \xrightarrow{f_2} A_3 \longrightarrow 0$$

es mapeada a la sucesión

$$0 \longrightarrow F(A_1) \xrightarrow{F(f_1)} F(A_2) \xrightarrow{F(f_2)} F(A_3) \longrightarrow 0$$

la cual es exacta excepto posiblemente en $F(A_3)$ (respectivamente en $F(A_1)$). El functor es exacto ssi es exacto por la izquierda y exacto por la derecha.

Ejemplo 2.14. Los siguientes ejemplos son cruciales

i) Sea $\mathcal{A}$ una categoría abeliana y $A_0 \in \mathcal{A}$. Entonces

$$\operatorname{Hom}(A_0, \quad) : \mathcal{A} \longrightarrow \mathbf{Ab}$$

es un functor exacto por la izquierda. El functor contravariante

$$\operatorname{Hom}(;, A_0) : \mathcal{A} \longrightarrow \mathbf{Ab}$$

también es exacto por la izquierda. (Exactitud por la izquierda del functor contravariante $F : \mathcal{A} \longrightarrow \mathbf{Ab}$ da por definición exactitud por la izquierda del functor covariante $F : \mathcal{A}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Ab}$.)

ii) Recordar que un objeto $P \in \mathcal{A}$ es llamado proyectivo si $\operatorname{Hom}(P, \quad)$ es exacto por la derecha (y por tanto exacto). Un objeto $I \in \mathcal{A}$ es llamado inyectivo si $\operatorname{Hom}(\ , I)$ es exacto por la derecha (y por tanto exacto), esto último puede expresarse como que siempre es posible completar el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} I & \\ A \arrow[u, "f"] \arrow[r, hook, "\varphi"'] & B \arrow[ul, dashed, "\exists g"'] \end{tikzcd}$$

iii) Módulo libres sobre un anillo R son objetos proyectivos en $\operatorname{Mod}(R)$. Pero haces (localmente) libres en $\mathbf{Coh}(X)$ casi nunca son proyectivos (pues la noción de sobreyectividad de haces no es lo suficientemente rídiga para garantizar la existencia de el levantamiento). Serán los objetos inyectivos los que usaremos en nuestra teoría.

La siguiente definición extiende las nociones de operador adjunto propias del análisis funcional

Definición 2.15. Sea $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ un functor entre categorías arbitrarias.

Un functor $H : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ es adjunto por la derecha a F (uno escribe $F \dashv H$) si existen isomorfismos:

$$\operatorname{Hom}(F(A), B) \simeq \operatorname{Hom}(A, H(B))$$

para todo par de objetos $A \in \mathcal{A}$ y $B \in \mathcal{B}$ que es functorial en A y B.

Un functor $G : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ es adjunto por la izquierda F (uno escribe $G \dashv F$) si existen isomorfismos $\operatorname{Hom}(B, F(A)) = \operatorname{Hom}(G(B), A)$ para todo par de objetos $A \in \mathcal{A}$ y $B \in \mathcal{B}$ los cuales son functoriales en A y B.

Claramente, H es adjunto por la derecha a F si y solo si F es adjunto por la izquierda a H. Usando el lema de Yoneda, uno verifica que un adjunto por la izquierda (derecha) de existir, es único salvo isomorfismo.

Nota 2.16. Si $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ son catgegorias abelianas y $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ es adjunto por la izquierda a $H : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$, entonces F es exacto por la derecha y H es exacto por la izquierda. Sin embargo, incluso si F es exacto (por la izquierda y la derecha), su adjunto por la derecha en general no es exacto por la izquierda. En categorías trianguladas tendremos resultados más precisos al respecto (H sí será exacto).

Ejercicio 2.17. Suponga $F \dashv H$. Muestre que para los morfismos inducidos $g : F \circ H \longrightarrow id$ y $h : \mathrm{id} \longrightarrow H \circ F$ la composición

$$H \xrightarrow{h_{H()}} (H \circ F) \circ H = H \circ (F \circ H) \xrightarrow{H(g)} H$$

es la identidad.

2.3. Functor de Serre.

Definición 2.18. Sea $\mathcal{A}$ una categoría k-lineal. Un functor de Serre es un equivalencia k-lineal $S : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}$ tal que para todo par de objetos $A, B \in \mathcal{A}$ existe un isomorfismo

$$\eta_{A,B} : \mathrm{Hom}(A, B) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}(B, S(A))^*$$

(de k-espacios vectoriales) el cual es functorial en A y B.

Escribimos el emparejamiento inducido como

$$\mathrm{Hom}(B, S(A)) \times \mathrm{Hom}(A, B) \longrightarrow k, (f, g) \longmapsto \langle f \mid g\rangle$$

Lema 2.19. *Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ categorías k-lineales sobre un cuerpo k con Hom's finito-dimensionales. Si $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ son provistos de un functor de Serre $S_{\mathcal{A}}$, respectivamente $S_{\mathcal{B}}$, entonces cualquier equivalencia k-lineal*

$$F : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$$

conmuta con el functor de Serre, es decir, existe un isomorfismo

$$F \circ S_{\mathcal{A}} \simeq S_{\mathcal{B}} \circ F$$

Demostración. Aplicar el lema de Yoneda. □

2.4. Categorías Trianguladas.

Categorías trianguladas, el tipo de categorías en el que estaremos interesatodos aquí, fueron introducidas independientemente por Puppe y en la tesis del estudiante de Grothendieck, Verdier.

Empecemos por la definición de categoría triangulada

Definición 2.20. Sea $\mathcal{D}$ una categoría aditiva. La estructura de una categoría triangulada $\mathcal{D}$ es dada por una equivalencia aditiva

$$T : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{D}$$

llamado el functor de shift, y un conjunto de triángulos distinguidos

$$A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow T(A)$$

sujetos a los axiomas TR1-TR4 abajo.

Antes de realmente explicar los axiomas TR, introduzcamos la notación, $A[1] := T(A)$ para cualquier objeto $A \in \mathcal{D}$ y $f[1] := T(f) \in \mathrm{Hom}(A[1], B[1])$ para cualquier morfismo $f \in \mathrm{Hom}(A, B)$. Similarmente, uno escribe $A[n] := T^n(A)$ y $f[n] := T^n(f)$ para $n \in \mathbb{Z}$. Así, un triángulo también será denotado por $A \to B \to C \to A[1]$. También es usual en la literatura anotar los triángulos como:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr] & & B \arrow[dl] \\ & C \arrow[ul] & \end{tikzcd}$$

Un morfismo entre dos triángulos está dado por (la información de) un diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d, "f"'] & B \arrow[r] \arrow[d, "g"'] & C \arrow[r] \arrow[d, "h"'] & A[1] \arrow[d, "f[1]"] \\ A' \arrow[r] & B' \arrow[r] & C' \arrow[r] & A'[1] \end{tikzcd}$$

Es un isomorfismo si f, g y h son isomorfismos.

TR1

i) Cualquier triángulo de la forma

$$A \xrightarrow{\text{id}} A \longrightarrow 0 \longrightarrow A[1]$$

es distinguido.

ii) Cualquier triángulo isomorfo a un triángulo distinguido es distinguido

iii) Cualquier morfismo $f : A \longrightarrow B$ puede ser completado en un triángulo distinguido.

$$A \xrightarrow{f} B \longrightarrow C \longrightarrow A[1]$$

TR2 El triángulo

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{h} A[1]$$

es un triángulo distinguido si y solo si

$$B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{h} A[1] \xrightarrow{-f[1]} B[1]$$

es un triángulo distinguido

TR3 Suponga que existe un diagrama conmutativo de triángulos distinguidos con flechas verticales f y g:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d, "f"'] & B \arrow[r] \arrow[d, "g"'] & C \arrow[r] \arrow[d, dotted, "h"'] & A[1] \arrow[d, "f[1]"] \\ A' \arrow[r] & B' \arrow[r] & C' \arrow[r] & A'[1] \end{tikzcd}$$

Entonces el diagrama puede ser completado a un diagrama conmutativo, es decir, a un morfismo de triangulos, por un morfismo (no necesariamente único) $h : C \longrightarrow C'$.

TR4 . Suponga que nos son dados triángulos distinguidos

$$A \xrightarrow{f} B \longrightarrow C' \longrightarrow A[1],$$

$$B \xrightarrow{g} C \longrightarrow A' \longrightarrow A[1],$$

$$A \xrightarrow{g \circ f} C \longrightarrow B' \longrightarrow A[1],$$

entonces existe un triángulo distinguido

$$C' \to B' \to A' \to C'[1]$$

tal que el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "id_A"'] & B \arrow[r] \arrow[d, dashed, "g"] & C' \arrow[r] \arrow[d] & A[1] \arrow[d, "id_{A[1]}"] \\ A \arrow[r, "g \circ f"] \arrow[d, "f"'] & C \arrow[r] \arrow[d, "id_C"] & B' \arrow[r] \arrow[d] & A[1] \arrow[d, "f[1]"] \\ B \arrow[r, "g"'] \arrow[d] & C \arrow[r] \arrow[d] & A' \arrow[r] \arrow[d, "id_{A'}"] & B[1] \arrow[d] \\ C' \arrow[r] & B' \arrow[r] & A' \arrow[r] & C[1] \end{tikzcd}$$

Notar que, a priori, no hemos pedido que los triángulos "formen complejos", i.e. que en un triángulo $A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow A[1]$ se tenga que la composición $A \longrightarrow C$ es cero. Pero esto puede deducirse de TR1 y TR3.

Definición 2.21. Un functor aditivo

$$F : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{D}'$$

entre categorías trianguladas $\mathcal{D}$ y $\mathcal{D}'$ se dice exacto si las siguientes condiciones se satisfacen:
i) Existe un isomorfismo de functores

$$F \circ T_{\mathcal{D}} \xrightarrow{\sim} T_{\mathcal{D}'} \circ F.$$

ii) Cualquier triángulo distinguido

$$A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow A[1]$$

en $\mathcal{D}$ es mapeado a un triángulo distinguido

$$F(A) \longrightarrow F(B) \longrightarrow F(C) \longrightarrow F(A)[1]$$

en $\mathcal{D}'$, donde $F(A[1])$ es identificado con $F(A)[1]$ via el isomorfismo de functores en i).

Una vez más, las nociones de categoría triangulada y de functor exacto deben ser ajustadas cuando uno está interesado en categorías aditivas sobre un cuerpo k. En este caso, el functor shift debe ser k-lineal y uno usualmente considera solo functores k-lineales.

Proposición 2.22. *Sea $F : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{D}'$ un functor exacto entre categorías trianguladas. Si $F \dashv H$, entonces $H : \mathcal{D}' \to \mathcal{D}$ es exacto.*
Similarmente, si $G \dashv F$ entonces $G : \mathcal{D}' \longrightarrow \mathcal{D}$ es exacto. Ver [?]

Demostración. Primero mostremos que el functor adjunto H conmuta con los functores shifts T y T' en $\mathcal{D}$ y $\mathcal{D}'$ respectivamente. Dado que F es un functor exacto, uno tiene isomorfismos $F \circ T \simeq T' \circ F$ y $F \circ T^{-1} \simeq T'^{-1} \circ F$.
Esto da los siguientes isomorfismos functoriales

$$\begin{aligned}
\operatorname{Hom}(A, H(T'(B))) &\simeq \operatorname{Hom}(F(A), T'(B)) \simeq \operatorname{Hom}\left(T'^{-1}(F(A)), B\right) \\
&\simeq \operatorname{Hom}\left(F\left(T^{-1}(A)\right), B\right) \simeq \operatorname{Hom}\left(T^{-1}(A), H(B)\right) \\
&\simeq \operatorname{Hom}(A, T(H(B))).
\end{aligned}$$

Como todo es functorial, el lema de Yoneda entrega un isomorfismo

$$H \circ T' \xrightarrow{\sim} T \circ H.$$

Después, tenemos que mostrar que H mapea un triángulo distinguido en $\mathcal{D}'$ a un triángulo distinguido en $\mathcal{D}$. Sea $A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow A[1]$ un triangulado distinguido en $\mathcal{D}'$. El morfismo inducido $H(A) \longrightarrow H(B)$ puede ser completado en un triángulo distinguido

$$H(A) \longrightarrow H(B) \longrightarrow C_0 \longrightarrow H(A)[1].$$

Aquí, tácitamente usamos $H(A[1]) \simeq H(A)[1]$ dados por los isomorfismos arriba $H \circ T' \simeq T \circ H$.
Usando los morfismos de adjunción $F(H(A)) \longrightarrow A$ y $F(H(B)) \longrightarrow B$ y la hipótesis que F es exacto, uno obtiene un diagrama conmutativo de triángulos distinguidos

$$\begin{tikzcd}
F(H(A)) \arrow[r] \arrow[d] & F(H(B)) \arrow[r] \arrow[d] & F(C_0) \arrow[r] \arrow[d, dotted, "\xi"'] & F(H(A))[1] \arrow[d] \\
A \arrow[r] & B \arrow[r] & C \arrow[r] & A[1]
\end{tikzcd}$$

el cual puede compeltarse con la línea punteada por el axioma TR3.
Aplicando H a el diagrama entero y usando la adjunción $h : \mathrm{id} \longrightarrow H \circ F$, da

$$\begin{tikzcd}
H(A) \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dd, bend right, dotted] & H(B) \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dd, bend right, dotted] & C_0 \arrow[r] \arrow[d, "h_{C_0}"] & H(A)[1] \arrow[d] \\
HFHA \arrow[r] \arrow[d] & HFHB \arrow[r] \arrow[d] & HFC_0 \arrow[r] \arrow[d, "H(\xi)"] & HFHA[1] \arrow[d] \\
H(A) \arrow[r] & H(B) \arrow[r] & H(C) \arrow[r] & H(A)[1]
\end{tikzcd}$$

Aquí, en ambos casos, las flechas punteadas son las líneas punteadas (ver 2.17). Usando adjunción (y la exactitud por la izquierda de $\mathrm{Hom}(\ ,C)$), sabemos que para cualquier A_0 la sucesión

$$\begin{array}{ccccc}
\mathrm{Hom}\left(A_0, H(B)\right) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}\left(A_0, H(C)\right) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}\left(A_0, H(A)[1]\right) \\
\simeq \mathrm{Hom}\left(F\left(A_0\right), B\right) & & \simeq \mathrm{Hom}\left(F\left(A_0\right), C\right) & & \simeq \mathrm{Hom}\left(F\left(A_0\right), A[1]\right)
\end{array}$$

es exacta. Entonces obtenemos $\mathrm{Hom}\left(A_0, C_0\right) \simeq \mathrm{Hom}\left(A_0, H(C)\right)$ para todo A_0 y por tanto $H(\xi) \circ h_{C_0} : C_0 \xrightarrow{\sim} H(C)$. De esta forma, $H(A) \longrightarrow H(B) \longrightarrow H(C) \longrightarrow H(A)[1]$ es isomorfo a un triángulo distinguido $H(A) \longrightarrow H(B) \longrightarrow C_0 \longrightarrow H(A)[1]$, así que es distinguido por TR1. □

2.5. Subcategorías Admisibles. Una subcategoría $\mathcal{D}' \subset \mathcal{D}$ de una categoría triangulada es una subcategoría triangulada si $\mathcal{D}'$ admite una estructura de categoría triangulada tal que la inclusión es exacta (es decir las sucesiones exactas en $\mathcal{D}'$ siguen siendo exactas al verla en $\mathcal{D}$). Si $\mathcal{D}' \subset \mathcal{D}$ es una subcategoría completa, entonces es una subcategoría triangulada si y solo si $\mathcal{D}'$ es invariante bajo el functor shift y para todo triángulo distinguido $A \to B \to C \to A[1]$ en $\mathcal{D}$ con $A, B \in \mathcal{D}'$ el objeto C es isomorfo a un objeto en $\mathcal{D}'$.

Definición 2.23. Una subcategoría triangulada completa $\mathcal{D}' \subset \mathcal{D}$ es llamada admisible (por la derecha) si la inclusión tiene un adjunto por la derecha $\pi : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{D}'$, i.e. existen isomorfismos functoriales $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(A, B) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}'}(A, \pi(B))$ para todo $A \in \mathcal{D}'$ y $B \in \mathcal{D}$.

El complemento ortogonal (por la derecha) de una subcategoría (admisible) $\mathcal{D}' \subset \mathcal{D}$ es la subcategoría completa $\mathcal{D}^{\perp}$ de todos los objetos $C \in \mathcal{D}$ tales que $\mathrm{Hom}(B, C) = 0$ para todo $B \in \mathcal{D}'$.

También podríamos definir el complemento ortogonal por la izquierda de forma análoga, pero nunca lo usaremos en este texto.

Lema 2.24. *Una subcategoría triangulada completa $\mathcal{D}' \subset \mathcal{D}$ es admisible si y solo si para todo $A \in \mathcal{D}$ existe un triángulo distinguido*

$$B \longrightarrow A \longrightarrow C \longrightarrow B[1]$$

con $B \in \mathcal{D}'$ y $C \in \mathcal{D}'^{\perp}$.

Demostración. Suponga que $\mathcal{D}'$ es admisibile. La propiedad de adjunción π nos permite asociar a la identidad en $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}'}(\pi(A), \pi(A))$ un morfismo $B := \pi(A) \longrightarrow A$ que podemos completar en un triángulo distinguido

$$B \longrightarrow A \longrightarrow C \longrightarrow B[1]$$

Para ver que efectivamente $C \in \mathcal{D}'^{\perp}$, uno aplicaHom $(B',\quad)$ y usa que para todo $B' \in \mathcal{D}'$

$$\mathrm{Hom}\left(B', B\right) \simeq \mathrm{Hom}\left(B', \pi(A)\right) \simeq \mathrm{Hom}\left(B', A\right).$$

Conversamente si un triángulo distinguido de esta forma es dado para cualquier A, entonces uno define el functor $\pi : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{D}'$ por $\pi(A) = B$. Ahora usando que $\mathrm{Hom}(B, C) = 0$ para $B \in \mathcal{D}'$ y $C \in \mathcal{D}'^{\perp}$ para mostrar que B no depende (salvo isomorfismo) en la elección de triangulo. Similarmente, uno demostraría que π está bien definido para morfismos.

□

Los functores de Serre siempre son compatibles con la estructura de categoría triangulada. En la situación geométrica con la que trabajaremos esto será obvio. Aun así, mencionamos el resultado general, que dejamos sin demostración

Proposición 2.25 (Bondal, Kapranov). *Cualquier functor de Serre en una categoría triangulada sobre un cuerpo k es exacto. ver* [Kapranov].

Definición 2.26. Una colección Ω de objetos en una categoría triangulada $\mathcal{D}$ es una clase generadora de $\mathcal{D}$ (o se dice que genera $\mathcal{D}$) si para cada $B \in \mathcal{D}$ las siguientes dos condiciones se cumplen:

i) Si $\mathrm{Hom}(A, B[i]) = 0$ para todo $A \in \Omega$ y todo $i \in \mathbb{Z}$, entonces $B \simeq 0$.

ii) Si $\mathrm{Hom}(B[i], A) = 0$ para todo $A \in \Omega$ y todo $i \in \mathbb{Z}$, entonces $B \simeq 0$.

2.6. Descomposiciones semi-ortogonales.

Definición 2.27. Un objeto $E \in \mathcal{D}$ en una categoría triangulada k-lineal $\mathcal{D}$ es llamada excepcional si

$$\mathrm{Hom}(E, E[\ell]) = \begin{cases} k & \text{if } \ell = 0 \\ 0 & \text{if } \ell \neq 0 \end{cases}$$

Una sucesión excepcional es una sucesión $E_1, \ldots, E_n$ ofde objetos excepcionales tal que $\mathrm{Hom}\,(E_i, E_j[\ell]) = 0$ para todo $i > j$ y todo ℓ. En otras palabras

$$\mathrm{Hom}\,(E_i, E_j[\ell]) = \begin{cases} k & \text{if } \ell = 0, i = j \\ 0 & \text{if } i > j \text{ or if } l \neq 0, i = j. \end{cases}$$

Una sucesión excepcional es completa si $\mathcal{D}$ está generada por $\{E_i\}$, i.e. cualquier subcategoría triangulada completa que contiene todos los objetos E_i es equivalente a $\mathcal{D}$ (via la inclusión).

Lema 2.28. *Sea $\mathcal{D}$ una categoría triangulada k-lineal tal que para cualquier $A, B \in \mathcal{D}$ el espacio vectorial $\bigoplus_i \mathrm{Hom}(A, B[i])$ es finito dimensional.*

Si $E \in \mathcal{D}$ es excepcional, entonces los objetos $\bigoplus E[i]^{\oplus j_i}$ forman una subcategoría triangulada admisible $\langle E \rangle$ de $\mathcal{D}$.

Demostración. Usaremos el lema 2.24. Dejamos como ejercicio al lector revisar que $\langle E \rangle$ es triangulada. Para ver que es admisible consideremos para cada objeto $A \in \mathcal{D}$ el morfismo canónico

$$\bigoplus \mathrm{Hom}(E, A[i]) \otimes E[-i] \longrightarrow A$$

que puede ser completado en un triángulo distinguido

$$\oplus \mathrm{Hom}(E, A[i]) \otimes E[-i] \longrightarrow A \longrightarrow B$$

Usando que E es excepcional, tenemos $\mathrm{Hom}(E, B[i]) = 0$. Por el lema citado, tenemos $B \in \langle E \rangle^{\perp}$. $\square$

El concepto de una secuencia excepcional completa es generalizada por lo siguiente

Definición 2.29. Una sucesión de subcategorías completas admisibles

$$\mathcal{D}_1, \ldots, \mathcal{D}_n \subset \mathcal{D}$$

es semi-ortogonal si para todo $i > j$

$$\mathcal{D}_j \subset \mathcal{D}_i^{\perp}$$

Esta sucesión define un descomposición semi-ortogonal de $\mathcal{D}$ si $\mathcal{D}$ es generada por las $\mathcal{D}_i$, i.e. via la inclusión, $\mathcal{D}$ es equivalente a la subcategoría completa triangulada más pequeña de $\mathcal{D}$ conteniendo cada $\mathcal{D}_i$.

3. Complejos

Recordemos que por definición un haz coherente sobre una variedad algebraica X admite, al menos localmente una sucesión exacta $\mathcal{O}_X^{\oplus m_1} \to \mathcal{O}^{\oplus m_2} \to \mathcal{F} \to 0$. Es posible probar (cf. [Hartshorne, Capitulo III Ejercicio 6.8]) que una variedad suave y proyectiva X de dimensión $n = \dim(X)$ admite una resolución localmente libre de largo n. Es decir, existe una sucesión exacta de la forma:

$$0 \longrightarrow \mathcal{E}_n \longrightarrow \ldots \longrightarrow \mathcal{E}_1 \longrightarrow \mathcal{E}_0 \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow 0$$

donde los $\mathcal{E}_i$ son haces coherentes localmente libres. Así, para estudiar haces coherentes es posible cambiar a haces localmente libres y complejos de ellos.

Más aún, en nuestro estudio de las categorías derivadas, trabajaremos con complejos de objetos de una categoría abeliana en vez de directamente en los objetos de la categoría abeliana. Esto motivado por teoremas de la topología algebraica, como por ejemplo:

Teorema 3.1. *Complejos simpliciales X e Y tienen realizaciones geométricas homotópicas $|X|$ e $|Y|$ si, y solo si, existe un complejo simplicial Z y mapeos simpliciales $f : Z \to X$ y $g : Z \to Y$ tal que los mapas $f_* : C.(Z) \to C.(X)$ y $g_* : C.(Z) \to C.\,(Y)$ son quasi-isomorfismos, es decir, los mapas inducidos*

$$f_* : H_i(Z) \to H_i(X), \quad g_* : H_i(Z) \to H_i(Y)$$

son isomorfismos para todo i.

Lo que vemos es que para obtener invariantes homotpicas no es suficiente con recordar sola la (co)homología de $H.(X)$ de el complejo de $C.(X)$ sino que debemos recordar el complejo entero. No basta con tener isomorfismos $H_i(X) \cong H_i(Y)$, necesitamos mapas $C.(X) \to C.\,(Y)$ que induzcan esos isomorfismos.

Permitamonos rápidamente recordar la definición de la categoría de complejos $\mathrm{Kom}(\mathcal{A})$ de una categoría abeliana $\mathcal{A}$. Un complejo en $\mathcal{A}$ consiste de un diagrama de objetos y morfismos en $\mathcal{A}$ de la forma

$$\cdots \longrightarrow A^{i-1} \xrightarrow{d^{i-1}} A^i \xrightarrow{d^i} A^{i+1} \xrightarrow{d^{i+1}} \cdots$$

satisfaciendo $d^i \circ d^{i-1} = 0$ o, equivalentemente, $\mathrm{Im}\left(d^{i-1}\right) \subset \mathrm{Ker}\left(d^i\right)$, para todo $i \in \mathbb{Z}$.

Un morfismo $f : A^\bullet \longrightarrow B^\bullet$ entre dos complejos $A^\bullet$ y $B^\bullet$ está dado por un diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
\dots \arrow[r] & A^{i-1} \arrow[r, "d_A^{i-1}"] \arrow[d, "f^{i-1}"] & A^i \arrow[r, "d_A^i"] \arrow[d, "f^i"] & A^{i+1} \arrow[r, "d_A^{i+1}"] \arrow[d, "f^{i+1}"] & \dots \\
\dots \arrow[r] & B^{i-1} \arrow[r, "d_B^{i-1}"] & B^i \arrow[r, "d_B^i"] & B^{i+1} \arrow[r, "d_B^{i+1}"] & \dots
\end{tikzcd}$$

Proposición 3.2. *La categoría de complejos* $\mathrm{Kom}(\mathcal{A})$ *de una categoría abeliana es de nuevo abeliana.*

También notar que el mapa de un objeto $A \in \mathcal{A}$ a el complejo $A^\bullet$ con $A^0 = A$ y $A^i = 0$ para $i \neq 0$ identifica $\mathcal{A}$ con una subcategoría completa de $\mathrm{Kom}(\mathcal{A})$.

La categoría de complejos $\mathrm{Kom}(\mathcal{A})$ tiene dos características más: cohomología y shifts.

Definición 3.3. Sea $A^\bullet \in \mathrm{Kom}(\mathcal{A})$ un complejo dado. Entonces $A^\bullet[1]$ es el complejo con $\left(A^\bullet[1]\right)^i := A^{i+1}$ y diferencial $d^i_{A[1]} := -d_A^{i+1}$.

El shift $f[1]$ de un morfismo de complejos $f : A^\bullet \to B^\bullet$ es el morfismo de complejos $A^\bullet[1] \longrightarrow B^\bullet[1]$ dado por $f[1]^i := f^{i+1}$.

Más generalmente, $A^\bullet[k]^i = A^{k+i}$ y $d^i_{A[k]} = (-1)^k d_A^{i+k}$ para cualquier $k \in \mathbb{Z}$.

La elección de signo menos en la definición anterior se verá motivada una vez vista la definición de Cono en esta misma sección.
Notar, sin embargo, que la categoría $\mathrm{Kom}(\mathcal{A})$ no es una categoría triangulada. Es por esto que deberemos pasar por un paso intermedio antes de obtener las categorías derivadas.

Ejemplo 3.4. Probar que las sucesiones exactas cortas $0 \longrightarrow A^\bullet \longrightarrow B^\bullet \longrightarrow C^\bullet \longrightarrow 0$, las cuales pueden ser vistas como triángulos con $C^\bullet \longrightarrow A^\bullet[1]$ trivial, en general, no satisfaces las condiciones impuestas en triángulos distinguidos para una categoría triangulada.

En lo que sigue, vale la pena considerar

Hecho 3.5 (Teorema de Freyd-Mitchell, 1964). Toda categoría abeliana (pequeña) $\mathcal{C}$ puede ser vista como subcategoría de $\mathbf{R}-\mathbf{Mod}$ para cierto anillo (no necesariamente conmutativo) R.

Recordar que la cohomología $H^i\left(A^\bullet\right)$ de un complejo $A^\bullet$ es el cuociente

$$H^i\left(A^\bullet\right) := \frac{\mathrm{Ker}\left(d^i\right)}{\mathrm{Im}\left(d^{i-1}\right)} \in \mathcal{A}$$

es decir $H^i\left(A^\bullet\right) = \mathrm{Coker}\left(\mathrm{Im}\left(d^{i-1}\right) \longrightarrow \mathrm{Ker}\left(d^i\right)\right)$. Un complejo $A^\bullet$ es acíclico si $H^i\left(A^\bullet\right) = 0$ para todo $i \in \mathbb{Z}$. Un morfismo de complejos $f : A^\bullet \longrightarrow B^\bullet$ induce morfismos naturales

$$H^i(f) : H^i\left(A^\bullet\right) \longrightarrow H^i\left(B^\bullet\right).$$

Definición 3.6. Un morfismo de complejos $f : A^\bullet \longrightarrow B^\bullet$ es un quasi-isomorfismo (o qis, por abreviar) si para todo $i \in \mathbb{Z}$ el mapa inducido $H^i(f) : H^i(A^\bullet) \longrightarrow H^i(B^\bullet)$ es un isomorfismo.

Notar que la resolución considerada para haces coherentes da el quasi-isomorfismo $(\mathcal{E}_n \longrightarrow \ldots \longrightarrow \mathcal{E}_1 \longrightarrow \mathcal{E}_0) \longrightarrow \mathcal{F}$. Esto explica por qué es deseable no distinguir entre complejos quasi-isomorfos

La idea central para la definición de categorías derivadas es esta: complejos quasi-isomorfos deberían ser objetos isomorfos en la categoría derivada. Tenemos el siguiente teorema:

Definición 3.7. Dos morfismos de complejos

$$f, g : A^\bullet \longrightarrow B^\bullet$$

son llamados homotópicamente equivalentes , $f \sim g$, si existe una colección de morfismos $h^i : A^i \longrightarrow B^{i-1}, i \in \mathbb{Z}$, tal que

$$f^i - g^i = h^{i+1} \circ d_A^i + d_B^{i-1} \circ h^i.$$

La categoría de homotopía de complejos $\mathrm{K}(\mathcal{A})$ es la categoría cuyos objetos son los objetos de $\mathrm{Kom}(\mathcal{A})$, i.e. $\mathrm{Ob}(\mathrm{K}(\mathcal{A})) = \mathrm{Ob}(\mathrm{Kom}(\mathcal{A}))$, y morfismos $\mathrm{Hom}_{\mathrm{K}(\mathcal{A})}(A^\bullet, B^\bullet) := \mathrm{Hom}_{\mathrm{Kom}(\mathcal{A})}(A^\bullet, B^\bullet) / \sim$.

Que la definición tiene sentidos, por ejemplo, que la definición está bien defeinida en $\mathrm{K}(\mathcal{A})$, se deduce de los siguientes resultados

Proposición 3.8. *i) Equivalencia de homotopía entre morfismos $A^\bullet \longrightarrow B^\bullet$ de complejos es una relación de equivalencia*

ii) Morfismos homotópcamente triviales forman un 'ideal' en los morfismos de $\mathrm{Kom}(\mathcal{A})$*. iii) Si $f \sim g : A^\bullet \longrightarrow B^\bullet$, entonces $H^i(f) = H^i(g)$ para todo i.*

iv) Si $f : A^\bullet \longrightarrow B^\bullet$ y $g : B^\bullet \longrightarrow A^\bullet$ son dados tales que $f \circ g \sim \mathrm{id}_B$ y $g \circ f \sim \mathrm{id}_A$, entonces f y g quasi-isomorfismos y, más precisamente, $H^i(f)^{-1} = H^i(g)$.

Nota 3.9. La definición de $\mathrm{K}(\mathcal{A})$ hace sentido para cualquier categoría aditiva. Esto será necesario más tarde, cuando consideremos la subcategoría completa de todos los objetos inyectivos en una categoría abeliana dada.

Ahora viene la definición precisa de categoría derivada. El primer paso es describir los objetos de $\mathrm{D}(\mathcal{A})$. Esto es fácil, simplemente fijamos

$$\mathrm{Ob}(\mathrm{D}(\mathcal{A})) := \mathrm{Ob}(\mathrm{K}(\mathcal{A})) = \mathrm{Ob}(\mathrm{Kom}(\mathcal{A}))$$

El conjunto de morfismos $\mathrm{Hom}_{\mathrm{D}(\mathcal{A})}$ entre dos complejos $A^\bullet$ and $B^\bullet$ vistos como objetos en $\mathrm{D}(\mathcal{A})$ es el conjunto de todas las clases de equivalencia de diagramas de la forma

$$\begin{tikzcd}
& C^\bullet \arrow[dl, "\text{qis}"'] \arrow[dr] & \\
A^\bullet & & B^\bullet
\end{tikzcd}$$

donde $C^\bullet \longrightarrow A^\bullet$ es un quasi-isomorfismo. Dos de estos diagramas se dicen equivalentes si son dominados en la categoría de homotopía $\mathrm{K}(\mathcal{A})$(!) por un tercero de la misma forma, i.e. existe un diagrama conmutativo en $\mathrm{K}(\mathcal{A})$ de la forma

$$\begin{tikzcd}
& & C^\bullet \arrow[dl] \arrow[dr] \arrow[ddll, dotted, bend right, "\text{qis}"'] & & \\
& C_1^\bullet \arrow[dl] \arrow[drrr] & & C_2^\bullet \arrow[dlll] \arrow[dr] & \\
A^\bullet & & & & B^\bullet
\end{tikzcd}$$

(En particular, las composiciones $C^\bullet \longrightarrow C_1^\bullet \longrightarrow A^\bullet$ y $C^\bullet \longrightarrow C_2^\bullet \to A^\bullet$ son homotópicamente equivalentes. Así, como el primero es qis, el último también lo es.

Cuidado 3.10. *Más tarde se hará claro por qué la conmutatividad del diagrama es requerida solo módulo homotopía y no en la categoría* $\mathrm{Kom}(\mathcal{A})$*. Básicamente, si imponemos una condición más rígida, la composición de dos techos (diagramas como los de arriba) no estará bien definida.*

Ahora tendremos que probar que esta colección de objetos y morfismos efectivamente forma una categoría, en particular por ejemplo que la composición está bien definida. Querremos que dados dos morfismos

$$\begin{tikzcd} & C_1^\bullet \arrow[dl, "\text{qis}"'] \arrow[dr] & \\ A^\bullet & & B^\bullet \end{tikzcd} \quad \text{y} \quad \begin{tikzcd} & C_2^\bullet \arrow[dl, "\text{qis}"'] \arrow[dr] & \\ B^\bullet & & C^\bullet \end{tikzcd}$$

pueden componerse (en la categoría $\mathrm{K}\,\mathcal{A}$) para formar un tercer diagrama conmutativo de la forma

$$\begin{tikzcd} & & C_0^\bullet \arrow[dl, "\text{qis}"'] \arrow[dr] & & \\ & C_1^\bullet \arrow[dl, "\text{qis}"'] \arrow[dr] & & C_2^\bullet \arrow[dl, "\text{qis}"'] \arrow[dr] & \\ A^\bullet & & B^\bullet & & C^\bullet \end{tikzcd}$$

Definición 3.11. Sea $f : A^\bullet \longrightarrow B^\bullet$ un morfismo de complejos. Su mapeo de cono es el complejo $\mathrm{C}(f)^\bullet$ con

$$\mathrm{C}(f)^i = A^{i+1} \oplus B^i \quad \text{y} \quad d^i_{\mathrm{C}(f)} := \begin{pmatrix} -d_A^{i+1} & 0 \\ f^{i+1} & d_B^i \end{pmatrix}$$

Notar que en la literatura uno encuentra diferentes convenciones para la definición del diferencial $d_{\mathrm{C}(f)}$, e.g. f^{i+1} con un signo extra.

El lector fácilmente checkea que el mapeo de cono es un complejo (aquí usamos la aparición de un signo menos y justificamos la definición del shift de un complejo).
Además, existen mapas naturales

$$\tau : B^\bullet \longrightarrow \mathrm{C}(f) \quad \text{y} \quad \pi : \mathrm{C}(f) \longrightarrow A^\bullet[1]$$

dados por la inyección natural $B^i \longrightarrow A^{i+1} \oplus B^i$ y la proyección natural $A^{i+1} \oplus B^i \longrightarrow A^\bullet[1]^i = A^{i+1}$, respectivamente. La composición $B^\bullet \longrightarrow \mathrm{C}(f) \to A^\bullet[1]$ es trivial y la composición $A^\bullet \longrightarrow B^\bullet \longrightarrow \mathrm{C}(f)$ es homotópica al mapa trivial. De hecho, $B^\bullet \longrightarrow \mathrm{C}(f) \longrightarrow A^\bullet[1]$ es una sucesión exacta corta de complejos. En particular, obtenemos la sucesión exacta larga en cohomología.

$$H^i(A^\bullet) \longrightarrow H^i(B^\bullet) \longrightarrow H^i(\mathrm{C}(f)) \longrightarrow H^{i+1}(A^\bullet) \longrightarrow \cdots$$

Por construcción, cualquier diagrama conmutativo puede ser completado como sigue

$$\begin{tikzcd} A_1^\bullet \arrow[r, "f_1"] \arrow[d] & B_1^\bullet \arrow[r] \arrow[d] & C(f_1) \arrow[r] \arrow[d, dotted] & A_1^\bullet[1] \arrow[d] \\ A_2^\bullet \arrow[r, "f_2"] & B_2^\bullet \arrow[r] & C(f_2) \arrow[r] & A_2^\bullet[1] \end{tikzcd}$$

Esto debería recordar al lector del axioma TR3. Así mismo, la siguiente proposición debería compararse con el axioma TR2. Pues los triángulos definidos por el mapeo de cono formarán los triángulos distinguidos en la categoría derivada.

La siguiente proposición es crucial para definir la composición de morfismos

Proposición 3.12. *Sea $f : A^\bullet \longrightarrow B^\bullet$ un morfismo de complejos y sea $\mathrm{C}(f)$ su mapeo de cono que vienbe con los dos morfismos naturales $\tau : B^\bullet \longrightarrow \mathrm{C}(f)$ y $\pi : \mathrm{C}(f) \longrightarrow A^\bullet[1]$. Entonces existe un morfismo de complejos $g : A^\bullet[1] \longrightarrow \mathrm{C}(\tau)$ el cual es un isomorfismo en $\mathrm{K}(\mathcal{A})$ y tal que el siguiente diagrama es conmutativo en $\mathrm{K}(\mathcal{A})$:*

$$\begin{tikzcd} B^\bullet \arrow[r, "\tau"] \arrow[d, "="] & C(f) \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "="] & A^\bullet[1] \arrow[r, "-f"] \arrow[d, dotted, "g"] & B^\bullet[1] \arrow[d, "="] \\ B^\bullet \arrow[r, "\tau"] & C(f) \arrow[r, "\tau_\tau"] & C(\tau) \arrow[r, "\pi_\tau"] & B^\bullet[1] \end{tikzcd}$$

Demostración. El morfismo $g : A^\bullet[1] \longrightarrow \mathrm{C}(\tau)$ es fácil de definir: Definimos

$$A^\bullet[1]^i = A^{i+1} \longrightarrow \mathrm{C}(\tau)^i = B^{i+1} \oplus \mathrm{C}(f)^i = B^{i+1} \oplus A^{i+1} \oplus B^i$$

como el mapa $\left(-f^{i+1}, \mathrm{id}, 0\right)$. No es difícil verificar que este es efectivamente un morfismo de complejos. La inversa g^{-1} en $\mathrm{K}(\mathcal{A})$ es la proyección en el segundo factor.

La conmutatividad (en $\mathrm{Kom}(\mathcal{A})$!) de el diagrama

$$\begin{tikzcd} A^\bullet[1] \arrow[r, "-f"] \arrow[d, "g"'] & B^\bullet[1] \arrow[d, "id"] \\ C(\tau) \arrow[r, "\pi_\tau"] & B^\bullet[1] \end{tikzcd}$$

en sencilla de verificar. (Notar una vez más el signo menos, responsable del signo en el axioma TR2)

El diagrama

$$\begin{tikzcd} C(f) \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "id"'] & A^\bullet[1] \arrow[d, "g"] \\ C(f) \arrow[r, "\tau_\tau"] & C(\tau) \end{tikzcd}$$

NO conmuta en $\mathrm{Kom}(\mathcal{A})$, pero sí conmuta módulo homotopía. Para probar esto, uno primero prueba que $g \circ g^{-1}$ es homotópco a la identidad y entonces usa $g^{-1} \circ \tau_\tau = \pi$. Para los detalles ver [Kashiwara, 1.4]. □

Ahora, usaremos la construcción del cono de mapeo para definir la composición en la categoría derivada. Consideramos un quasi-isomorfismo $f : A^\bullet \longrightarrow B^\bullet$ y un morfismo arbitrario $g : C^\bullet \longrightarrow B^\bullet$.

Proposición 3.13. *Existe un diagrama conmutativo en* $\mathrm{K}(\mathcal{A})$

$$\begin{tikzcd} C_0^\bullet \arrow[r, "\text{qis}"] \arrow[d] & C^\bullet \arrow[d, "g"] \\ A^\bullet \arrow[r, "f", "\text{qis}"'] & B^\bullet \end{tikzcd}$$

Demostración. Notar que la dificultad de la proposición recae en construir $C_0^\bullet \longrightarrow C^\bullet$ tal que sea un qis.

La idea es usar un diagrama conmutativo de la forma

$$\begin{tikzcd} C(\tau \circ g)[-1] \arrow[r] \arrow[d, dotted] & C^\bullet \arrow[r] \arrow[d, "g"'] & C(f) \arrow[r] \arrow[d, "="'] & C(\tau \circ g) \arrow[d, dotted] \\ A^\bullet \arrow[r, "f"] & B^\bullet \arrow[r, "\tau"] & C(f) \arrow[r] & A^\bullet[1] \end{tikzcd}$$

Gracias a la proposición anterior sabemos que $B^\bullet \xrightarrow{\tau} \mathrm{C}(f) \to A^\bullet[1]$ en $\mathrm{K}(\mathcal{A})$ es isomorfa a el triángulo $B^\bullet \xrightarrow{\tau} \mathrm{C}(f) \to \mathrm{C}(\tau)$. Así que usemos el morfismo natural $\mathrm{C}(\tau \circ g) \to \mathrm{C}(\tau)$.

Usando las sucesiones exactas largas en cohomología, uno prueba que el morfismo $C_0^\bullet := \mathrm{C}(\tau \circ g)[-1] \longrightarrow C^\bullet$ es qis. □

Esta proposición es central y su consecuencia inmediata es

Corolario 3.14. *La composición de techos como fue propuesta en 3 existe y está bien definida.*

Demostración. Aplicar la proposición 3.13

$$\begin{tikzcd} & C_1^\bullet \arrow[d] \\ C_2^\bullet \arrow[r, "\text{qis}"'] & B^\bullet \end{tikzcd}$$

en 3. Dejamos como ejercicio verificar que la clase de equivalencia del techo obtenido es única. □

Ejercicio 3.15. Checkear que $\mathrm{D}(\mathcal{A})$ es una categoría aditiva.

Definición 3.16. Un triángulo

$$A_1^\bullet \longrightarrow A_2^\bullet \longrightarrow A_3^\bullet \longrightarrow A_1^\bullet[1]$$

en $\mathrm{K}(\mathcal{A})$ (respectivamente en $\mathrm{D}(\mathcal{A})$) es llamado distinguido si es isomorfo en $\mathrm{K}(\mathcal{A})$ (respectivamente en $\mathrm{D}(\mathcal{A})$) a un triángulo de la forma

$$A^\bullet \xrightarrow{f} B^\bullet \xrightarrow{\tau} \mathrm{C}(f) \xrightarrow{\pi} A^\bullet[1]$$

con f un complejo de morfismos.

Proposición 3.17. *Sea $\mathcal{A}$ categoría abeliana. Los triángulos distinguidos dados en la definición 3.16 y el functor shift natural de complejos $A^\bullet \longmapsto A^\bullet[1]$ hacen de la categoría $K(\mathcal{A})$ y de la categoría derivada $\mathrm{D}(\mathcal{A})$ una categoría triangulada.*

Más aun, el functor natural $Q_{\mathcal{A}} : \mathrm{K}(\mathcal{A}) \to \mathrm{D}(\mathcal{A})$ es un functor exacto de categorías trianguladas.

Demostración. La demostración es larga, es necesario checkear que se cumplan los axiomas TR1-TR4. Referimos al lector a la bibliografía [Gelfand, IV. 2]. □

Definición 3.18. Definimos $\mathrm{Kom}^*(\mathcal{A})$, con $* = +, -$, o b, como la categoría de complejos $A^\bullet$ con $A^i = 0$ para $i \ll 0, i \gg 0$, respectivamente $|i| \gg 0$.

Si tomamos primero relaciones de equivalencia de homotopía y luego de quasi-isomorfismos obtenemos las categorías $\mathrm{K}^*(\mathcal{A})$ y $\mathrm{D}^*(\mathcal{A})$ con $* = +, -$, o b. Más aún, tenemos la compatibilidad que esperaríamos, garantizada por la siguiente proposición

Proposición 3.19. *Los functores naturales $\mathrm{D}^*(\mathcal{A}) \to \mathrm{D}(\mathcal{A})$, donde $* = +, -$, o b, definen equivalencias de $\mathrm{D}^*(\mathcal{A})$ con las subcategorías completas trianguladas de todos los complejos $A^\bullet \in \mathrm{D}(\mathcal{A})$ con $H^i(A^\bullet) = 0$ para $i \ll 0, i \gg 0$, respectivamente $|i| \gg 0$.*

Ejercicio 3.20. Sea $A^\bullet$ un complejo con $m := \text{máx}\left\{i \mid H^i(A^\bullet) \neq 0\right\} < \infty$. Mostrar que existe un morfismo

$$\varphi : A^\bullet \longrightarrow H^m(A^\bullet)[-m]$$

en la categoría derivada tal que $H^m(\varphi) : H^m(A^\bullet) \longrightarrow H^m(A^\bullet)$ es igual a la identidad.

Similarmente, si $m := \text{mín}\left\{i \mid H^i(A^\bullet) \neq 0\right\} > -\infty$, entonces existe un morfismo $\varphi : H^m(A^\bullet)[-m] \to A^\bullet$ con $H^m(\varphi) = \mathrm{id}$.

Ejercicio 3.21. Suponga que $H^i(A^\bullet) = 0$ para $i < i_0$. Mostrar que existe un triángulo distinguido

$$H^{i_0}(A^\bullet)[-i_0] \longrightarrow A^\bullet \xrightarrow{\varphi} B^\bullet \longrightarrow H^{i_0}(A^\bullet)[1 - i_0]$$

en $\mathrm{D}(\mathcal{A})$ con $H^i(B^\bullet) = 0$ para $i \leq i_0$ y φ induciendo isomorfismos $H^i(A^\bullet) \simeq H^i(B^\bullet)$ para $i > i_0$. Establecer y probar el resultado analogo para un complejo $A^\bullet$ con $H^i(A^\bullet) = 0$ para $i > i_0$.

Truco 3.22. Debido a la misma construcción de la categoría deriavda, es a menudo dificil hacer cálculos explícitos en ella. Sin embargo, frecuentemente, es posible trabajar con una clase muy especial de complejos para los cuales los morfismos en la categoría derivada y en la categoría de complejos modulo homotpia son la misma cosa. Dependiendo del tipo de functores en que uno esté interesado, la noción de objetos inyectivos y proyectivos será crucial (en nuestro caso objetos inyectivos).

Notar que las nociones son duales, es decir, por ejemplo, un objeto $I \in \mathcal{A}$ es inyectivo si y solo si el mismo objeto considertado como un objeto de la categoría opuesta $\mathcal{A}^{\mathrm{op}}$ es proyectivo.

Definición 3.23. Una categoría abeliana $\mathcal{A}$ contiene suficientes objetos inyectivos (respectivamente suficientes objetos proyectivas) si por cada $A \in \mathcal{A}$ existe un morfismo inyectivo $A \longrightarrow I$ con $I \in \mathcal{A}$ inyectivo (respectivamente un morfismo sobreyectivo $P \longrightarrow A$ con $P \in \mathcal{A}$ proyectivo).

Una resolución inyectiva de un objeto $A \in \mathcal{A}$ es una sucesión exacta

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow I^0 \longrightarrow I^1 \longrightarrow I^2 \longrightarrow \cdots$$

con todos los $I^i \in \mathcal{A}$ inyectivos. Similarmente, una resolución proyectiva de A consiste de una sucesión exacta

$$\cdots \longrightarrow P^{-2} \longrightarrow P^{-1} \longrightarrow P^0 \longrightarrow A \longrightarrow 0$$

con objetos proyectivos $P^i \in \mathcal{A}$. En otras palabras, una resolución inyectiva está dada por un complejo $I^\bullet$ y un quasi-isomorfismo $A \longrightarrow I^\bullet$ donde $I^i = 0$ para $i < 0$ y todo los I^i inyectivos. Una resolución proyectiva puede ser interpretada de la misma forma.

Claramente, si $\mathcal{A}$ contiene suficientes inyectivos, cualquier objeto $A \in \mathcal{A}$ admite una resolución inyectiva. Más generalmente, uno tiene

Proposición 3.24. *Supongamos que $\mathcal{A}$ es una categoría abeliana con suficientes inyectivos. Para cualquier $A^\bullet \in \mathrm{K}^+(\mathcal{A})$ existe un complejo $I^\bullet \in \mathrm{K}^+(\mathcal{A})$ con $I^i \in \mathcal{A}$ objetos inyectivos y un quasi-isomorfismo $A^\bullet \longrightarrow I^\bullet$.*

Demostración. La prueba en detalle puede verse en [Kashiwara, I.1.1.7] □

Corolario 3.25. *Suponga que $\mathcal{A}$ es una categoría abeliana con suficientes inyectivos. Cualquier $A^\bullet \in \mathrm{D}(\mathcal{A})$ con $H^i(A^\bullet) = 0$ para $i \ll 0$ es isomorfo (como un objeto de la categoría derivada) a un coimplejo $I^\bullet$ de objetos inyectivos I^i con $I^i = 0$ para $i \ll 0$.*

Demostración. Por la proposición 3.19 podemos asumir que $A^i = 0$ para $i \ll 0$. Entonces usar la proposición 3.24. □

Observación 3.26. Fácilmente podemos deducir afirmaciones duales para categorías con suficientes proyectivos

Lema 3.27. *Supongamos que $A^\bullet \longrightarrow B^\bullet$ es un quasi-isomorfismo entre dos complejos $A^\bullet, B^\bullet \in \mathrm{K}^+(\mathcal{A})$. Entonces para cualquier complejo $I^\bullet$ de objetos inyectivos I^i con $I^i = 0$ para $i \ll 0$ el mapa inducido*

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{K}(\mathcal{A})}(B^\bullet, I^\bullet) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathrm{K}(\mathcal{A})}(A^\bullet, I^\bullet)$$

es biyectivo

Lema 3.28. *Sean $A^\bullet, I^\bullet \in \mathrm{Kom}^+(\mathcal{A})$ tales que todos los I^i son inyectivos. Entonces*

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{K}(\mathcal{A})}(A^\bullet, I^\bullet) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{D}(\mathcal{A})}(A^\bullet, I^\bullet)$$

Observación 3.29. La composición de la inclusión $\mathcal{I} \subset \mathcal{A}$ con el functor natural exacto $Q_{\mathcal{A}} : \mathrm{K}^*(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathrm{D}^*(\mathcal{A})$ da el functor natural exacto $\iota : \mathrm{K}^*(\mathcal{I}) \longrightarrow \mathrm{D}^*(\mathcal{A})$.

Proposición 3.30. *Supongamos que $\mathcal{A}$ contiene suficientes inyectivos. Entonces el functor natural*

$$\iota : \mathrm{K}^+(\mathcal{I}) \longrightarrow \mathrm{D}^+(\mathcal{A})$$

es una equivalencia

Observación 3.31. Eventualmente , estaremos interesados en la categoria derivada acotada de haces coherentes $\mathrm{D}^{\mathrm{b}}(\mathbf{Coh}(X))$. Aun así, hay razones que nos obligarán a trabajar con categorias abelianas más grandes o con categorias derivadas no acotadas.

Como en el proceso de derivar funcotres deberemos trabajar con resoluciones inyectivas, y estas casi nunca son acotadas, los functores derivadas son a menudo definidos en la categorías más grande de complejos no acotados (o solo parcialmente acotados). Solo a posteriori serán restringidos a la categoría más pequeña.

No es solo que nos gustaría quedarnos en la categoría derivada acotada, pero también trabajar con complejos no acotados, sino que tenemos que abandonar la categoria abeliana $\mathbf{Coh}(X)$ en la que estamos primordialmente interesados y trabajar en las categorías más grandes $\mathbf{Qcoh}(X)$ o incluso $\mathbf{Sh}(X)$. La razón es esencialmente la misma: queremos reemplazar haces coherentes por sus resoluciones inyectivas pero casi no hay haces coherentes inyectivos. Deberemos mantener en mente las inclusiones de categorías abelianas $\mathbf{Coh}(X) \subset \mathbf{Qcoh}(X) \subset \mathbf{Sh}(X)$.

Considere una subcategoría abeliana completa $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$ de una categoría abeliana $\mathcal{B}$. Entonces hay dos categorías derivadas $\mathrm{D}(\mathcal{A})$ y $\mathrm{D}(\mathcal{B})$ con un functor exacto obvio $\mathrm{D}(\mathcal{A}) \to \mathrm{D}(\mathcal{B})$ entre ellos.

Uno puede preguntarse si este functor define una equivalencia entre $\mathrm{D}(\mathcal{A})$ y la subcategoría completa $\mathrm{D}(\mathcal{B})$ conteniendo estos complejos cuya cohomología $\mathcal{A}$. Esto no es así, ya que en general $\mathrm{D}(\mathcal{A}) \to \mathrm{D}(\mathcal{B})$ no es completo ni fiel. Afortunadamente, en la situación geométrica, e.g. pasando de $\mathrm{D}^{\mathrm{b}}(\mathbf{Sh}(X))$ a $\mathrm{D}^{\mathrm{b}}(\mathbf{Qcoh}(X))$, las cosas se comportan mejor, como muestra la siguiente proposición. Recordar que una subcategoría gruesa $\mathcal{A}$ de una categoría abeliana $\mathcal{B}$ es una subcategoría abeliana completa tal que cualquier extensión en $\mathcal{B}$ de objetos en $\mathcal{A}$ está de nuevo en $\mathcal{A}$.

Proposición 3.32. *Sea $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$ una subcategoría gruesa y supongamos que $A \in \mathcal{A}$ puede ser incrustado en un objeto $A' \in \mathcal{A}$ el cual es inyectivo como un objeto de $\mathcal{B}$.*

Entonces el functor natural $\mathrm{D}(\mathcal{A}) \to \mathrm{D}(\mathcal{B})$ induce una equivalencia

$$\mathrm{D}^+(\mathcal{A}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{D}^+_{\mathcal{A}}(\mathcal{B})$$

de $\mathrm{D}^+(\mathcal{A})$ y la subcategoría completa triangulada $\mathrm{D}^+_{\mathcal{A}}(\mathcal{B}) \subset \mathrm{D}^+(\mathcal{B})$ de complejos con cohomología en $\mathcal{A}$. Analogamente, se tiene $\mathrm{D}^{\mathrm{b}}(\mathcal{A}) \simeq \mathrm{D}^{\mathrm{b}}_{\mathcal{A}}(\mathcal{B})$.

Sea $F : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ un functor exacto por la izquierda entre categorías abelianas. Más aún, asumamos que $\mathcal{A}$ contiene suficientes inyectivos. En particular, usaremos la equivalencia $\iota : \mathrm{K}^+(\mathcal{I}_{\mathcal{A}}) \to \mathrm{D}^+(\mathcal{A})$ naturalmente inducida por el functor $Q_{\mathcal{A}} : \mathrm{K}^+(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathrm{D}^+(\mathcal{A})$ (cf 3.29). Por ι^{-1} denotamos al quasi-inverso de ι dado por elegir un complejo de objetos inyectivos quasi-isomorfos a cualquier complejo dado que sea acotado por abajo. Así, tenemos el diagrama

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{K}(\mathcal{I}_{\mathcal{A}}) \arrow[r, hook] \arrow[dr, shift left, "\iota"] & \mathrm{K}(\mathcal{A}) \arrow[r, "\mathrm{K}(F)"] \arrow[d, "Q_{\mathcal{A}}"] & \mathrm{K}^+(B) \arrow[d, "Q_{\mathcal{B}}"] \\
 & D^+(\mathcal{A}) \arrow[ul, shift left, "\iota^{-1}"] & D^+(\mathcal{B})
\end{tikzcd}$$

Aquí, $K(F)$ es el functor que mapea $\left(\ldots \longrightarrow A^{i-1} \longrightarrow A^i \longrightarrow A^{i+1} \longrightarrow \ldots\right)$ a $\left(\ldots \to F\left(A^{i-1}\right) \longrightarrow F\left(A^i\right) \longrightarrow F\left(A^{i+1}\right) \longrightarrow \ldots\right)$ el cual está bien definido para la categoría.

Definición 3.33. El functor derivado derecho de F es el functor

$$RF := Q_{\mathcal{B}} \circ K(F) \circ \iota^{-1} : \mathrm{D}^+(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathrm{D}^+(\mathcal{B})$$

Listemos algunas propiedades principales de el functor derivado derecho

Proposición 3.34. *i) Existe un morfismo natural de functores*

$$Q_{\mathcal{B}} \circ K(F) \longrightarrow RF \circ Q_{\mathcal{A}}.$$

ii) El functor derivado derecho $RF : \mathrm{D}^+(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathrm{D}^+(\mathcal{B})$ es un functor exacto categorias trianguladas

iii) Supongamos que $G : \mathrm{D}^+(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathrm{D}^+(\mathcal{B})$ es un functor exacto. Entonces cualquier morfismo de functores $Q_{\mathcal{B}} \circ K(F) \longrightarrow G \circ Q_{\mathcal{A}}$ se factoriza por un único morfismo de functores $RF \longrightarrow G$.

Demostración. Ver [Gelfand]. □

Estas propiedades determinan el functor derivado derecho RF de un functor exacto por la izquierda, módulo un único isomorfismo

Definición 3.35. Sea $RF : \mathrm{D}^+(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathrm{D}^+(\mathcal{B})$ el functor derivado derecho de un functor exacto por la izquierda $F : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$. Entonces para cualquier complejo $A^\bullet \in \mathrm{D}^+(\mathcal{A})$ uno define:

$$R^i F\left(A^\bullet\right) := H^i\left(RF\left(A^\bullet\right)\right) \in \mathcal{B}.$$

Observación 3.36. Los functores aditivos inducidos

$$R^i F : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$$

son los functores derivados elevados de F.

Notar que $R^i F(A) = 0$ para $i < 0$ y $R^0 F(A) \simeq F(A)$ para cualquier $A \in \mathcal{A}$. Efectivamente, si

$$A \longrightarrow I^0 \longrightarrow I^1 \longrightarrow \cdots$$

es una resolución inyectiva, entonces $R^i F(A) = H^i\left(\ldots \longrightarrow F\left(I^0\right) \longrightarrow F\left(I^1\right) \longrightarrow \ldots\right)$ y, en particular,

$$R^0 F(A) = \operatorname{Ker}\left(F\left(I^0\right) \longrightarrow F\left(I^1\right)\right) = F(A)$$

ya que F es exacto por la izquierda.

Definición 3.37. Un objeto $A \in \mathcal{A}$ es llamado F-acíclico si $R^i F(A) \simeq 0$ para $i \neq 0$.

Corolario 3.38. *Bajo las hipótesis de arriba, cualquier sucesión exacta*

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$$

en la categoría abeliana $\mathcal{A}$ da como resultado una sucesión exacta larga

$$\begin{gathered} 0 \longrightarrow F(A) \longrightarrow F(B) \longrightarrow F(C) \longrightarrow R^1F(A) \longrightarrow \cdots \\ \cdots \longrightarrow R^iF(B) \longrightarrow R^iF(C) \longrightarrow R^{i+1}F(A) \longrightarrow \cdots \end{gathered}$$

Claramente $\mathrm{Hom}(A, \quad)$ es un functor izquierdo y si $\mathcal{A}$ contiene suficientes inyectivos, uno define

$$\mathrm{Ext}^i(A, \quad) := H^i \circ R\,\mathrm{Hom}(A, \quad).$$

Resulta que estos grupos Ext pueden ser interpretados puramente en términos de ciertos morfismos de grupos en la categoría derivada:

Proposición 3.39. *Supongamos que $A, B \in \mathcal{A}$ son objetos de una categoría abeliana conteniendo suficientes inyectivos. Entonces hay isomorfismos naturales*

$$\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{A}}(A, B) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathrm{D}(\mathcal{A})}(A, B[i])$$

donde A y B son considerados como complejos concentrados en 0

Definición 3.40. El soporte de un complejo $\mathcal{F}^\bullet \in \mathrm{D}^\mathrm{b}(X)$ es la unión de los soportes de todos sus haces de cohomología, i.e. es el subconjunto cerrado

$$\mathrm{supp}\left(\mathcal{F}^\bullet\right) := \bigcup \mathrm{supp}\left(\mathcal{H}^i\left(\mathcal{F}^\bullet\right)\right)$$

Teorema 3.41 (Dualidad de Serre)**.** *Sea X una variedad proyectiva suave sobre un cuerpo k. Entonces*

$$S_X : \mathrm{D}^\mathrm{b}(X) \longrightarrow \mathrm{D}^\mathrm{b}(X)$$

es un functor de Serre.

Más explicitamente, la dualidad de Serre dice que para cada par de complejos $\mathcal{E}^\bullet, \mathcal{F}^\bullet \in \mathrm{D}^\mathrm{b}(X)$ hay isomorfismos functoriales

$$\eta_{\mathcal{E}}, \mathcal{F}\bullet : \mathrm{Hom}_{\mathrm{D}(\mathcal{A})}\left(\mathcal{E}^\bullet, \mathcal{F}^\bullet\right) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathrm{D}(\mathcal{A})}\left(\mathcal{F}^\bullet, \mathcal{E}^\bullet \otimes \omega_X[n]\right)^*$$

Lo cual es más comunmente enunciado como isomorfismos para todo $i \in \mathbb{Z}$

$$\mathrm{Ext}^i\left(\mathcal{E}^\bullet, \mathcal{F}^\bullet\right) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ext}^{n-i}\left(\mathcal{F}^\bullet, \mathcal{E}^\bullet \otimes \omega_X\right)^*$$

lo cual es functorial $\mathcal{E}^\bullet$ Y $\mathcal{F}^\bullet$. Podemos usar $\mathrm{Ext}^i\left(\mathcal{E}^\bullet, \mathcal{F}^\bullet\right) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{D}(\mathcal{A})}\left(\mathcal{E}^\bullet, \mathcal{F}^\bullet[i]\right)$ para comprobar que ambas versiones son equivalentes

Demostración. Una manera de probar esto es usando la dualidad de Serre estándar en la forma $\mathrm{Ext}^i\left(\mathcal{F}, \omega_X\right) \simeq H^{n-i}(X, \mathcal{F})^*$ para un haz coherentes $\mathcal{F}$(cf. [Hartshorne, II.7]). Esto es efectivamente un caso especial de lo anterior ya que $H^{n-i}(X, \mathcal{F}) = \mathrm{Ext}^{n-i}\left(\mathcal{O}_X, \mathcal{F}\right)$. □

3.1. Clases Generadoras.

Proposición 3.42. *Sea X una variedad proyectiva suave. Entonces los objetos de la forma $k(x)$ con $x \in X$ un punto (cerrado), generan la categoría derivada $\mathrm{D}^\mathrm{b}(X)$.*

Observación 3.43. Para ver $k(x)$ como un elemento de la categoría derivada, hay que pensarlo como el haz rascacielos en x, es decir, un haz caracterizado porque su tallo en x es k y fuera tiene tallo 0.

3.2. Categorías Derivadas y Fibrado Canónico.

Proposición 3.44. *Sean X e Y variedades proyectivas suaves sobre un cuerpo k. Si existe una equivalencia exacta*

$$\mathrm{D^b}(X) \xrightarrow{\sim} \mathrm{D^b}(Y)$$

de sus categorías derivadas, entonces

$$\dim(X) = \dim(Y)$$

Más aun, sus fibrados canónicos ω_X y ω_Y son del mismo orden.

Resulta que para variedad proyectivas suaves con fibrado (anti-)canónico amplio ω_x la geometría de X está codificada por $D^b(X)$ en una manera más o menos directa.

Definición 3.45. Sea $\mathcal{D}$ una categoría triangulada k-lineal con un functor de Serre S. Un objeto $P \in \mathcal{D}$ es llamado *tipo punto* de dimensión d si
i) $S(P) \simeq P[d]$,
ii) $\mathrm{Hom}(P, P[i]) = 0$ para $i < 0$, y
iii) $k(P) := \mathrm{Hom}(P, P)$ es un cuerpo.
Un objeto P que satisface iii) es llamado *simple*. Como asumimos que todos los Hom's son finito dimensionales, el cuerpo $k(P)$ en iii) es automaticamente una extensión de cuerpo finita de k. Entonces, si k es algebraicamente cerrado, es simplemente k.

Lema 3.46. *Suponga que $\mathcal{F}^\bullet$ es un objeto simple en $\mathrm{D^b}(X)$ con soporte cero-dimensional. Si* $\mathrm{Hom}\left(\mathcal{F}^\bullet, \mathcal{F}^\bullet[i]\right) = 0$ *para $i < 0$, entonces*

$$\mathcal{F}^\bullet \simeq k(x)[m]$$

para algún punto (cerrado) $x \in X$ y algún entero m.

Proposición 3.47 (Bondal, Orlov)**.** *Sean X e Y variedades proyectivas suaves y asumamos que el fibrado (anti-)canónico de X es amplio. Si existe una equivalencia exacta $\mathrm{D^b}(X) \simeq \mathrm{D^b}(Y)$, entonces X e Y son isomorfas. En particular, el fibrado (anti)-canónico de Y también es amplio. See [15].*

Corolario 3.48. *Sea C una curva de geno $g(C) \neq 1$ y sea Y una variedad proyectivas suave. Entonces existe una equivalencia exacta $\mathrm{D^b}(C) \simeq \mathrm{D^b}(Y)$ si y solo si Y es una curva isomorfa a C.*

4. Transformada de Fourier-Mukai

Sean X e Y variedades suaves proyectivas y denotemos las dos proyecciones por:

$$q : X \times Y \longrightarrow X \quad \text{and} \quad p : X \times Y \longrightarrow Y.$$

Definición 4.1. Sea $\mathcal{P} \in \mathrm{D^b}(X \times Y)$. La transformada de Fourier-Mukai inducida es el functor

$$\Phi_{\mathcal{P}} : \mathrm{D^b}(X) \longrightarrow \mathrm{D^b}(Y), \quad \mathcal{E}^\bullet \longmapsto p_* \left(q^* \mathcal{E} \bullet \otimes \mathcal{P}\right)$$

El objeto $\mathcal{P}$ es llamado el kernel de Fourier-Mukai de la transformada de Fourier-Mukai $\Phi_{\mathcal{P}}$.

Como antes, denotamos por p_*, q^*, y $\otimes$ a los *functores derivados* entre categorías derivadas. Notemos, sin embargo, que q^* es el pullback usual, ya que q es plano (flat), y que $q^*\mathcal{E}^\bullet \otimes \mathcal{P}$ es el producto tensorial usual si $\mathcal{P}$ es un complejo de haces localmente libres.

A veces en la literatura, $\Phi_{\mathcal{P}}$ es llamado un functor integral el cual es una transformada de Fourier-Mukai solo cuando resulta ser una equivalencia de categorías. Decimos que X e Y son compañeros de Fourier-Mukai su existe una transformada $\Phi_{\mathcal{P}}$ que es una equivalencia.

La relación con la transformada de Fourier usual es meramente una analogía. Más precisamente, la transformada de Fourier usual está dada por integrar (=push-forward por la segunda componente) el producto (producto tensorial) de la función original (pullback del objeto de $\mathrm{D}^b_{\mathrm{coh}}(X)$) con un kernel (=el kernel del objeto en $\mathrm{D}_{\mathrm{coh}^b}(X \times Y)$). El truco usual para probar que la transformada de Fourier usual es una isometría es ver que mapea una base ortonormal de funciones a otra base ortonormal. Resulta que el mismo truco puede ser usado para probar cuando la transformada de Fourier-Mukai es una equivalencia.

Como el kernel $\mathcal{P}$ también puede ser usado para definir el functor exacto $\mathrm{D^b}(Y) \to \mathrm{D^b}(X)$ (en la dirección opuesta), la notación simplificada que hemos elegido es a veces ambigua. Para ser más preciso, uno puede escribir $\Phi_{\mathcal{P}}^{X\to Y}$ para indicar la dirección $\mathrm{D^b}(X) \to \mathrm{D^b}(Y)$ (la cual por supuesto solo es útil si $X \neq Y$).

Cualquier transformada de Fourier-Mukai es la composición de tres functores exactos $q^* : \mathrm{D^b}(X) \to \mathrm{D^b}(X \times Y), (\quad) \otimes \mathcal{P} : \mathrm{D^b}(X \times Y) \to \mathrm{D^b}(X \times Y)$, y $p_* : \mathrm{D^b}(X \times Y) \to \mathrm{D^b}(Y)$. Por tanto, $\Phi_{\mathcal{P}}$ es exacto.

Durante esta sección necesitaremos el siguiente resultado

Lema 4.2 (Fórmula de proyección)**.** *Sea $f : X \to Y$ un morfismo regular entre variedades algebraicas. Para todo $\mathcal{O}_X$ módulo $\mathcal{F}$ y todo haz localmente libre $\mathcal{E}$ de rango r en Y, se tiene que*

$$\mathcal{E} \otimes_{\mathcal{O}_Y} f_*\mathcal{F} \simeq f_*(f^*\mathcal{E} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{F})$$

Demostración. La afirmación es local en Y, por lo que podemos suponer que $\mathcal{E} \simeq \mathcal{O}_Y^{\oplus r}$. Además, todos los términos involucrados conmutan son la suma directa, por lo que basta considerar $\mathcal{E} \simeq \mathcal{O}_Y$. En tal caso, el resultado se obtiene al observar que $f^*\mathcal{O}_Y \simeq \mathcal{O}_X$. □

Ejemplo 4.3. Mostremos que algunas equivalencias usuales son de hecho equivalencias de transformada de Fourier-Mukai.

i) La identidad

$$\mathrm{id} \; : \mathrm{D^b}(X) \longrightarrow \mathrm{D^b}(X)$$

es naturalmente isomorfa a la transformada de Fourier-Mukai $\Phi_{\mathcal{O}_\Delta}$ con el kernel de haz $\mathcal{O}_\Delta$ de la diagonal $\Delta \subset X \times X$. Efectivamente, con $\iota : X \xrightarrow{\sim} \Delta \subset X \times X$ denotando la inclusión en la diagonal, se tiene

$$\begin{aligned}\Phi_{\mathcal{O}_\Delta}(\mathcal{E}^\bullet) &= p_*\left(q^*\mathcal{E}^\bullet \otimes \mathcal{O}_\Delta\right) = p_*\left(q^*\mathcal{E}^\bullet \otimes \iota_*\mathcal{O}_X\right)\\ &\simeq p_*\left(\iota_*\left(\iota^*q^*\mathcal{E}^\bullet \otimes \mathcal{O}_X\right)\right) \quad (\text{ fórmula de proyección })\\ &\simeq (p\circ\iota)_*(q\circ\iota)^*\mathcal{E}^\bullet \simeq \mathcal{E}^\bullet \quad (\text{ como } p\circ\iota = \mathrm{id} = q\circ\iota).\end{aligned}$$

ii) Sea $f : X \to Y$ un morfismo. Entonces

$$f_* \simeq \Phi_{\mathcal{O}_{\Gamma_f}} : \mathrm{D^b}(X) \longrightarrow \mathrm{D^b}(Y)$$

donde $\Gamma_f \subset X \times Y$ es el grafo de f.

Como caso especial, podemos considerar la cohomología $H^*(X, \quad)$ como la transformada de Fourier-Mukai $\Phi_{\mathcal{O}_X} : \mathrm{D^b}(X) \to \mathrm{D^b}\left(\mathrm{Vec}_f(k)\right)$, donde $X \subset X \times \mathrm{Spec}(k)$ es considerado como el grafo de la proyección $X \to \mathrm{Spec}(k)$.

Para $f : X \to Y$ arbitrario uno puede usar $\mathcal{O}_{\Gamma_f}$ como el kernel para la transformada de Fourier-Mukai en la dirección opuesta, lo cual no es nada sino $f^* : \mathrm{D^b}(Y) \to \mathrm{D^b}(X)$

iii) Considerar una vez más el incrustamiento diagonal $\iota : X \xrightarrow{\sim} \Delta \subset X \times X$. Entonces

$$\Phi_{\iota_*\omega_X^k} \simeq S^k[-nk]$$

donde S_X es el functor de Serre $\mathcal{F}^\bullet \longmapsto \mathcal{F}^\bullet \otimes \omega_X[n]$ con $n = \dim(X)$.

4.1. Resultados de la Transformada de Fourier Mukai.

Teorema 4.4 (Orlov)**.** *Sean X e Y dos variedades proyectivas y suaves y sea*

$$F : \mathrm{D^b}(X) \longrightarrow \mathrm{D^b}(Y)$$

un functor completamente fiel. Si F admite functores adjunto por la izquierda o la derecha, entonces existe un objeto $\mathcal{P} \in \mathrm{D^b}(X \times Y)$ único salvo isomorfismo tal que F es isomorfo a $\Phi_{\mathcal{P}}$:

$$F \simeq \Phi_{\mathcal{P}}$$

Demostración. Nos abstenemos de dar una prueba de este hecho altamente no-trivial. Hay al menos dos lugares en la literatura con su demostración, el original dado por Orlov en [Orlov2]. Y otro por Kawamata [Kawamata]. La prueba usa sistemas de Postnikov [Gelfand]. □

Corolario 4.5. *Suponga que* $\Phi : \mathrm{D^b}(X) \simeq \mathrm{D^b}(Y)$ *es una equivalencia tal que para todo* $x \in X$ *punto (cerrado) existe un punto (cerrado)* $f(x) \in Y$ *con*

$$\Phi(k(x)) \simeq k(f(x))$$

Entonces $f : X \to Y$ *define un isomorfismo y* Φ *es la composición de* f_* *con el twist por algún fibrado en rectas* $M \in \mathrm{Pic}(Y)$*, i.e.*

$$\Phi \simeq (M \otimes ()) \circ f_*.$$

El resultado 4.4 puede ser usado para dar una prueba del resultado clásico de Gabriel, que afirma que la categoría abeliana de haces coherentes de una variedad algebraica determina la variedad algebraica

Corolario 4.6. *Supongamos que* X *e* Y *son variedades suaves proyectivas. Si existe una equivalencia* $\mathbf{Coh}(X) \simeq \mathbf{Coh}(Y)$*, entonces* X *e* Y *son isomorfas.*

Proposición 4.7. *Si* $\Phi_{\mathcal{P}} : \mathrm{D^b}(X) \xrightarrow{\sim} \mathrm{D^b}(Y)$ *es una equivalencia, entonces la transformada de Fourier-Mukai inducida* $\Phi_{\mathcal{P}}^H : H^*(X, \mathbb{Q}) \longrightarrow H^*(Y, \mathbb{Q})$ *da isomorfismos*

$$\bigoplus_{p-q=i} H^{p,q}(X) \simeq \bigoplus_{p-q=i} H^{p,q}(Y)$$

para todo $i = -\dim(X), \ldots, 0, \ldots, \dim(X)$.

Corolario 4.8. *Sea* C *una curva completa, suave y proyectiva y sea* Y *una variedad suave, proyectiva y compleja. Entonces*

$$\mathrm{D^b}(C) \simeq \mathrm{D^b}(Y) \iff C \simeq Y.$$

Referencias

[ncat] https://ncatlab.org/nlab/show/subcategory
[Gelfand, Manin] S. Gelfand, Y. Manin Methods of Homological Algebra. Springer Monographs in Mathematics (1997).
[Kashiwara] M. Kashiwara, P. Schapira Sheaves on manifolds. Grundlehren 292. Springer (1990).
[Categories for the working mathematician] categories for the working mathematician
[Hatcher] Hatcher Spectral Sequences Algebraic Topology
[EH16] David Eisenbud and Joe Harris, *3264 and All That: A Second Course in Algebraic Geometry*, Cambridge University Press, 2016.
[Har13] Joe Harris, *Algebraic Geometry: A First Course*, Springer Science and Business Media. **133** (2013).
[Hartshorne] Robin Hartshorne, *Algebraic Geometry*, Springer, **52**, Graduate Texts in Mathematics, 1977. http://www.worldcat.org/oclc/2798099
[Vak17] Ravi Vakil, *The Rising Sea: Foundations of Algebraic Geometry*, Preprint (2017).
[Orlov1] D. Orlov On equivalences of derived categories and K3 surfaces. J. Math. Sci. (New York) 84 (1997), 1361-1381.
[Orlov2] D. Orlov Derived categores of coherent sheaves and equivalences between them. Russian Math. Surveys 58 (2003), 511-591.
[Gelfand] S. Gelfand, Y. Manin Methods of Homological Algebra. Springer Monographs in Mathematics (1997).
[Kawamata] Y. Kawamata Equivalences of derived categories of sheaves on smooth stacks. Amer. J. Math. 126 (2004), 1057-1083.
[Kapranov] A. Bondal, M. Kapranov Representable functors, Serre functors, and mutations. Math. USSR Izvestiya 35 (1990), 519-541.
[Huybrechts] Huybrechts, Fourier-mukai transforms in algebraic geometry.
[Pedro Montero] Pedro Montero, Apunte de Curvas Agebraicas

Departamento de Matemática, Universidad Técnica Federico Santa María, Valparaíso, Chile.
Email address: mateo.hidalgo@usm.cl