

Introducción a las Variedades Tóricas

Proyecto Final Curvas Algebraicas

Juan Andrés Fuenzalida Alarcón
Fabián Ignacio Levicán Santibáñez

Profesor Pedro Montero Silva

Universidad Técnica Federico Santa María
Casa Central

Semestre 2020-2

1. Resumen

Este artículo es una introducción a las variedades tóricas (normales) basada, principalmente, en los libros de Brasselet (Brasselet 2008) y Fulton (Fulton 1993). En primer lugar, estudiamos la construcción de geometría convexa de una variedad tórica (normal), introduciendo antes los conceptos de cono, cono dual, monoide finitamente generado asociado a un cono, álgebra asociada a un cono, variedad tórica afín y abanico. Continuamos con la caracterización de las variedades tóricas relacionada a la acción del toro. Estudiamos propiedades geométricas y topológicas (compacidad, suavidad, regularidad...) También discutimos sobre órbitas y puntos distinguidos, y sobre cómo recuperar un cono a partir de la incrustación del toro en una variedad. Finalmente comentamos acerca de la resolución de singularidades en superficies tóricas, caracterizando el blow-up en éstas.

Índice

1. Resumen	1
2. Introducción	3
3. Notación y preliminares	4
4. Variedades tóricas	5
4.1. Construcción	5
4.1.1. Plan	5
4.1.2. El cono y el cono dual	5
4.1.3. El monoide y el álgebra	6
4.1.4. La variedad tórica afín y el abanico	8
4.1.5. El toro	10
4.1.6. Abanicos finitos e infinitos	12
4.2. Propiedades geométricas y topológicas.	12
4.2.1. La acción del toro	13
4.2.2. Órbitas	13
4.2.3. Abanicos de variedades tóricas	16
4.3. Resolución de singularidades	19
4.3.1. Relación con grupos algebraicos y morfismos tóricos	21
5. Referencias	22

2. Introducción

El objetivo de este artículo es ser una introducción a las variedades tóricas (normales) afines y generales, asumiendo más o menos lo que se enseña en un curso de introducción a la geometría algebraica, como la primera mitad de (Montero 2020). Estudiaremos una construcción y enunciaremos algunas propiedades, ejemplos y aplicaciones. Omitiremos muchas demostraciones de resultados importantes en pos de la brevedad y la simplicidad: este texto es más una guía que una referencia. Por lo tanto, invitamos al lector a utilizar las referencias (**Sección 5**) y a tener papel y lápiz a mano, pues toda esta cuestión es muy gráfica, sobre todo la construcción (**Sección 4.1**).

Las variedades tóricas son importantes en varias áreas de las matemáticas, pues relacionan la geometría discreta, combinatoria, con la geometría algebraica. Además, son una fuente de ejemplos y modelos, y proveen una perspectiva desde la que estudiar ejemplos y fenómenos en geometría algebraica. Históricamente han servido para probar muchas teorías generales.

El nombre de las variedades tóricas es dado por el hecho de que éstas son las variedades algebraicas que contienen un toro algebraico como un subconjunto abierto denso de Zariski. Sin embargo, la construcción que estudiaremos será a partir de *abanicos*, que serán definidos más adelante.

3. Notación y preliminares

En este artículo haremos uso de la notación de geometría algebraica de clases (Montero 2020), y definiremos más notación en esta sección y la siguiente. Asumiremos los resultados del curso (el cual es una introducción a la geometría algebraica), sobre todo los de la primera mitad, aunque es posible que hablemos de fibrados y de divisores.

El conjunto de vectores en \mathbb{R}^n $G_\sigma = \{v_1, \dots, v_r\}$ es llamado el conjunto de **generadores** del **cono poliédrico** $\sigma = \{x \in \mathbb{R}^n : x = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_r v_r, \lambda_i \in \mathbb{R}^{\geq 0}\}$. El cono generado por \emptyset es el $\{0\}$. Un cono es llamado **racional** si $G \subset \mathbb{Z}^n$, y **fuertemente convexo** si $\sigma \cap (-\sigma) = \{0\}$ (i. e., si no contiene rectas que pasan por el origen).

Si $u \in (\mathbb{R}^n)^*$ y $v \in \mathbb{R}^n$, entonces $\langle u, v \rangle := u(v)$ es el **producto dual** de u y v . Además, $u^\perp := \{w \in \mathbb{R}^n : \langle u, w \rangle = 0\}$ es el **ortogonal dual** de u . Denotaremos por $\{e_i\}_{i \in \mathbb{Z}^{\geq 1}}$ a la base canónica de \mathbb{R}^n , y por $\{e_i^*\}_{i \in \mathbb{Z}^{\geq 1}}$ a la base canónica de $(\mathbb{R}^n)^*$.

Un **semigrupo** es un conjunto no vacío S con una operación asociativa cerrada $+$. Un **monoide** es un semigrupo conmutativo, con un elemento neutro 0 , y que satisface la *ley de simplificación* ($\forall a, b, c \in S : a + c = b + c \implies a = b$). Las definiciones de **monoide finitamente generado** y **\mathbb{C} -álgebra finitamente generada** son naturales (¡ojo! En el caso de un monoide no podemos necesariamente invertir elementos, luego consideramos escalares en $\mathbb{Z}^{\geq 0}$). En el caso de un álgebra, podemos tomar potencias y multiplicar por escalares en \mathbb{C}).

El conjunto $\mathbb{C}[Z, Z^{-1}] := \mathbb{C}[Z_1, \dots, Z_n, Z_1^{-1}, \dots, Z_n^{-1}]$ es llamado el anillo de **polinomios de Laurent**. Si $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{Z}^n$, definimos $z^a := z_1^{a_1} \cdots z_n^{a_n}$. La aplicación $a \mapsto z^a$ induce un isomorfismo entre el grupo abeliano \mathbb{Z}^n y el grupo multiplicativo de los monomios de Laurent. Notemos (¡muy importante!) que si se tiene que un monomio de Laurent es igual a 1, entonces se puede obtener un binomio (común y corriente, ya no de Laurent) igual a 0. Si $\sum_{\text{finita}} \lambda_a z^a \in \mathbb{C}[Z, Z^{-1}]$, el conjunto finito $\{a \in \mathbb{Z}^n : \lambda_a \neq 0\}$ es llamado su **soporte**.

Finalmente, \mathbb{Z}^n es el **retículo** (en inglés, *lattice*), $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}^n, \mathbb{Z})$ es el **retículo dual** (isomorfo a \mathbb{Z}^n) y $\mathbb{T} := (\mathbb{C}^*)^n$ es el **n -toro algebraico complejo**.

En este momento es relevante dar una breve explicación sobre por qué el producto $(\mathbb{C}^*)^n$ es llamado un toro. En topología algebraica, S^1 es una circunferencia (i. e., los puntos en \mathbb{R}^2 tales que $x^2 + y^2 = 1$), luego $S^1 \times S^1$ es un toro común y corriente. Más generalmente, $(S^1)^n$ es llamado un toro. Sin embargo, en \mathbb{C}^2 , $x^2 + y^2 = (x + yi)(x - yi) = 1$ y, haciendo un cambio de variables, esto es $z_1 z_2 = 1$. En otras palabras, en \mathbb{C}^2 , S^1 es una hipérbola equilátera, que sabemos es isomorfa a \mathbb{C}^* , y luego $(\mathbb{C}^*)^n$ es llamado un toro. (Borcherds 2020)

4. Variedades tóricas

4.1. Construcción

4.1.1. Plan

La construcción de una variedad tórica se lleva a cabo en una sucesión de pasos descrita en el siguiente diagrama:

$$\sigma \mapsto \hat{\sigma} \mapsto S_\sigma \mapsto A_\sigma \mapsto X_\sigma \mapsto X_\Delta$$

Donde σ es un cono (poliédrico, racional, fuertemente convexo) en \mathbb{R}^n , $\hat{\sigma}$ es su cono dual, S_σ es su monoide finitamente generado, A_σ es su \mathbb{C} -álgebra finitamente generada, X_σ es su variedad tórica afín, y X_Δ es su variedad tórica.

4.1.2. El cono y el cono dual

En adelante, todos los conos que consideraremos serán poliédricos, racionales, y fuertemente convexos.

Definición 1. El **interior relativo** de un cono σ es el interior de σ con la topología euclidiana.

Definición 2. La **dimensión** $\dim(\sigma)$ de un cono σ es la dimensión del espacio lineal más pequeño que lo contiene.

Proposición 1. Sea un cono σ generado por $v_1, \dots, v_{\dim(\sigma)}$. Entonces, un punto en el interior relativo de σ es tal que $x = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_{\dim(\sigma)} v_{\dim(\sigma)}$, para ciertos $\lambda_i > 0$, $1 \leq i \leq \dim(\sigma)$.

A continuación, definiremos el objeto que corresponde al segundo paso de la construcción.

Definición 3. Sea σ un cono. Su **cono dual** es

$$\hat{\sigma} := \{u \in (\mathbb{R}^n)^* : \langle u, v \rangle \geq 0, \quad \forall v \in \sigma\}$$

La necesidad de hacer todo el resto de la construcción con el cono dual de σ , en vez de directamente con σ , será explicada bastante más adelante, después del **Teorema 3**.

Una caracterización muy útil, en términos de semi-espacios (en inglés, *half-spaces*) es la siguiente:

Lema 1. Sea σ un cono generado por $\{v_1, \dots, v_r\}$, y definamos σ_{v_i} como el cono generado por cada uno de los $\{v_i\}$. Entonces $\hat{\sigma} = \cap \hat{\sigma}_{v_i}$.

Ejemplo.

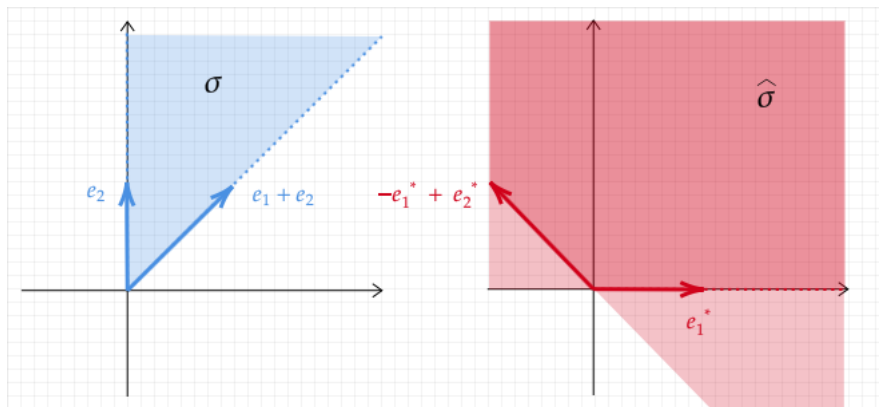


Figura 1: Un cono en \mathbb{R}^2 y su cono dual en $(\mathbb{R}^2)^*$, obtenido haciendo uso del **Lema 1**. Los semi-espacios correspondientes a e_2 y a $e_1 + e_2$ están en rojo claro, y su intersección está en rojo más oscuro.

El cono dual es un cono poliédrico, racional (de generadores en el retículo dual). También es fuertemente convexo si la dimensión del cono es maximal.

Definición 4. Sea $\lambda \in \hat{\sigma}$. Entonces, $\tau := \sigma \cap \lambda^\perp$ es llamada una **cara** de σ . Escribimos $\tau < \sigma$.

Las caras también son conos poliédricos, racionales, y fuertemente convexos. Las intersecciones de caras son caras. Las caras de caras son caras. En particular, el origen es una cara de cualquier cono, y un cono es una cara de sí mismo. Para obtener una cara no trivial de σ , es necesario escoger λ como una cara no trivial de $\hat{\sigma}$. Finalmente, si $x \in \sigma$, entonces existe una cara $\tau < \sigma$ tal que x está en el interior relativo de τ .

Corolario 1. Si $\tau < \sigma$, entonces $\hat{\sigma} \subset \hat{\tau}$.

Demostración. Véase el **Lema 1**. □

Finalmente, se tiene la siguiente propiedad sobre una cara y su cara dual:

Lema 2. Sea $\tau = \sigma \cap \lambda^\perp < \sigma$. Entonces, $\hat{\tau} = \hat{\sigma} + \mathbb{R}^{\geq 0}(-\lambda)$.

4.1.3. El monoide y el álgebra

Iniciaremos esta subsección con un lema fundamental en nuestra discusión. La demostración es corta y linda, así que no nos la ahorraremos.

Lema 3. (Lema de Gordon.) Sea L el retículo \mathbb{Z}^n . Si $\sigma \subset \mathbb{R}^n$ es un cono, entonces $\sigma \cap L$ es un monoide finitamente generado.

Demostración. Sean $G_\sigma = \{v_1, \dots, v_r\}$ los generadores del cono. Si $v \in \sigma \cap N$, entonces podemos escribir $v = \sum (n_i + r_i)v_i$ para ciertos $n_i \in \mathbb{Z}^{\geq 0}, r_i \in [0, 1]$. Es decir, $v = \sum n_i v_i + \sum r_i v_i$. Como todos nuestros conos son racionales, todos los v_i pertenecen a $\sigma \cap L$. Como además (restando $\sum n_i v_i$ a ambos lados) se tiene que $\sum r_i v_i \in \sigma \cap L$, basta demostrar que el conjunto $K = \{\sum s_i v_i, s_i \in [0, 1]\} \cap L$ es finito. Esto es fácil de ver pues la intersección entre un conjunto compacto y el retículo es finita. \square

El lema anterior es, de hecho, una consecuencia de considerar conos racionales. En efecto, si uno de los generadores tuviera alguna coordenada irracional, el monoide *no* sería finitamente generado. (Borcherds 2020)

Lema 4. *El conjunto de generadores de un monoide no es necesariamente único, y dos cualesquiera no tienen necesariamente la misma cardinalidad.*

Definición 5. Sea DL el retículo dual. Definimos **el monoide de un cono** como $S_\sigma := \hat{\sigma} \cap DL$.

Corolario 2. *Si $\tau = \sigma \cap \lambda^\perp < \sigma$ para cierto $\lambda \in S_\sigma$, entonces $S_\tau = S_\sigma + \mathbb{Z}^{\geq 0}(-\lambda)$.*

Demostración. Se sigue del **Lema 2**. \square

Definición 6. Definimos **el álgebra A_σ de un cono** como el conjunto de monomios de Laurent cuyo soporte (véase la **Sección 3**) es un subconjunto de S_σ .

Proposición 2. *A_σ no contiene elementos nilpotentes. (Borcherds 2020)*

Gracias al isomorfismo mencionado en la sección de preliminares, tenemos que esta es una \mathbb{C} -álgebra finitamente generada.

Ejemplo. *Continuación ejemplo **Figura 1**.*

Como podemos verificar gráficamente, S_σ también es generado por $a_1 = e_1^$ y $a_2 = -e_1^* + e_2^*$. Sin embargo, como sugiere el **Lema 4**, existen conos para los que la elección de generadores del monoide no es tan obvia. También es posible que los generadores del cono dual sean demasiado largos para generar el monoide (e. g., si hubiéramos escogido $2e_1^*$ y $2(-e_1^* + e_2^*)$), o que sea necesario utilizar más vectores para generar el monoide que para generar el cono dual. Queda de ejercicio para el lector pensar en ejemplos donde estas cosas pasen.*

A_σ es generado por $u_1 = x$ y $u_2 = x^{-1}y$.

Corolario 3. *A_σ es isomorfa a $\mathbb{C}[X_1, \dots, X_k]/I$ para ciertos k e I no únicos. Este ideal de polinomios está determinado por las (finitas) relaciones binomiales que se obtienen de las (finitas) relaciones entre los generadores de S_σ o de A_σ .*

Demostración. Se sigue del **Lema 4**. \square

4.1.4. La variedad tórica afín y el abanico

Definición 7. Definimos la **variedad tórica afín de un cono** como $X_\sigma := \text{Specm}(A_\sigma)$.

Esta definición es natural pues sabemos que los puntos de una variedad afín arbitraria están en biyección con los ideales maximales de su álgebra de polinomios.

Corolario 4. A_σ depende de la elección de generadores de S_σ , luego existen muchas representaciones del mismo cono en distintos espacios afines \mathbb{C}^k . Sin embargo, como usando la topología de Zariski la biyección antes mencionada induce un homeomorfismo, se tiene que todas estas representaciones son homeomorfas.

Demostración. Se sigue del **Corolario 3**. □

Teorema 1. Podemos representar X_σ como $V(I) \subset \mathbb{C}^k$ para ciertos k e I no únicos.

Demostración. Se sigue de los **Corolarios 3** y **4**. □

Ejemplo. Continuación ejemplo **Figura 1**.

Como no existen relaciones entre los generadores de S_σ o A_σ , este ejemplo no resultó ser interesante. En efecto, A_σ es isomorfa a $\mathbb{C}[x, y]$ con el cambio de variables $u_1 = x$ y $u_2 = x^{-1}y$ (i. e., es isomorfa a $\mathbb{C}[u_1, u_2]$), y luego X_σ es todo el espacio afín.

Definición 8. Un **abanico** Δ es una unión finita de conos tal que para todo cono $\sigma \in \Delta$, toda cara $\tau < \sigma$ pertenece a Δ , y para todos $\sigma, \sigma' \in \Delta$, $\sigma \cap \sigma' < \sigma$ y $\sigma \cap \sigma' < \sigma'$.

La siguiente notación será útil más adelante:

Notación. Sea Δ un abanico. Escribimos $|\Delta|$ para referirnos a la unión de los conos en Δ .

Corolario 5. Si $\tau = \sigma \cap \lambda^\perp < \sigma$ es una cara no trivial, S_τ es generado por generadores a_1, \dots, a_k de S_σ unidos a $a_{k+1} = -a_k$ (pues, por propiedades de las caras, podemos escoger $a_k = \lambda$).

Demostración. Se sigue del **Corolario 2**. □

Así, A_τ está determinado por las mismas relaciones binomiales que determinan a A_σ unidas a $u_k u_{k+1} = 1$, y luego $X_\tau \cong X_\sigma \setminus \{u_k = 0\}$ a través de $X_\tau \rightarrow X_\sigma \setminus \{u_k = 0\}$, $(u_1, \dots, u_k, u_{k+1}) \mapsto (u_1, \dots, u_k)$. Por lo tanto, es válida la siguiente construcción:

Teorema 2. Construimos la **variedad tórica de un abanico** Δ a partir de un atlas algebraico dado, en las intersecciones, por la aplicación de pegado

$$\psi_{\sigma, \sigma'} : X_\sigma \setminus \{u_k = 0\} \xrightarrow{\sim} X_\tau \xrightarrow{\sim} X_{\sigma'} \setminus \{v_l = 0\}$$

para cualesquiera dos $\sigma, \sigma' \in \Delta$.

Demostración. Se sigue del **Corolario 5**. □

Ejemplo. El espacio proyectivo \mathbb{P}^2 .

Si $[x_0, x_1, x_2] \in \mathbb{P}^2$, podemos parametrizarlo en $U_0 = \{x_0 \neq 0\}$ con las coordenadas afines $(z_1, z_2) = (x_1/x_0, x_2/x_0)$. Así, en $U_1 = \{x_1 \neq 0\}$ la parametrización es $(z_1^{-1}, z_1^{-1}z_2) = (x_0/x_1, x_2/x_1)$, y en $U_2 = \{x_2 \neq 0\}$ la parametrización es $(z_2^{-1}, z_1z_2^{-1}) = (x_0/x_2, x_1/x_2)$.

Sea el siguiente abanico Δ en \mathbb{R}^2 y su dual:

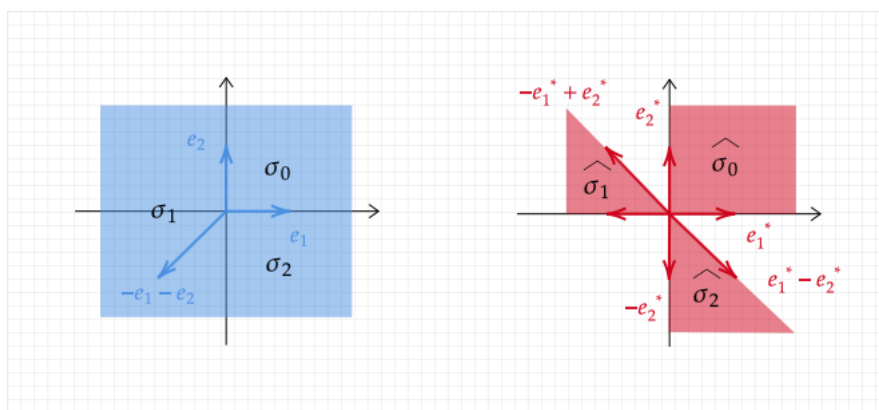


Figura 2: El abanico clásico de \mathbb{P}^2 .

S_{σ_0} es generado por $a_1 = e_1^*, a_2 = e_2^*$. No hay relaciones entre los a_i , por lo tanto $A_{\sigma_0} = \mathbb{C}[u_1 = z_1, u_2 = z_2]$ y X_{σ_0} es \mathbb{C}^2 con las coordenadas (u_1, u_2) .

S_{σ_1} es generado por $a_1 = -e_1^*, a_2 = -e_1^* + e_2^*$. No hay relaciones entre los a_i , por lo tanto $A_{\sigma_1} = \mathbb{C}[u_1 = z_1^{-1}, u_2 = z_1^{-1}z_2]$ y X_{σ_1} es \mathbb{C}^2 con las coordenadas (u_1, u_2) .

S_{σ_2} es generado por $a_1 = -e_2^*, a_2 = e_1^* - e_2^*$. No hay relaciones entre los a_i , por lo tanto $A_{\sigma_2} = \mathbb{C}[u_1 = -z_2^{-1}, u_2 = z_1z_2^{-1}]$ y X_{σ_2} es \mathbb{C}^2 con las coordenadas (u_1, u_2) .

Para la cara $\tau_{\sigma_0, \sigma_1}$ intersección entre σ_0 y σ_1 tenemos que $\lambda_0 = e_1^* \in \hat{\sigma}_0$ y $\lambda_1 = -e_1^* \in \hat{\sigma}_1$. Por lo tanto, a los generadores de S_{σ_0} debemos unir $a_3 = -e_1^*$ y a los generadores de S_{σ_1} debemos unir $a_3 = e_1^*$. En ambos casos, la nueva relación binomial es $u_1u_3 = 1$, y por lo tanto $X_\tau \cong \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$ en distintas coordenadas. La aplicación de pegado es $(z_1, z_2) \mapsto (z_1^{-1}, z_1^{-1}z_2)$.

Las otras caras se pegan de manera análoga.

Se puede pensar que cada intersección agrega un punto al infinito a la construcción, y así

la variedad tórica de Δ es \mathbb{P}^2 . Esto se puede generalizar a \mathbb{P}^n (sólo hay que extender la construcción).

4.1.5. El toro

Ejemplo. *El 2-toro algebraico complejo.*

Si partimos con el cono trivial, el cono dual es todo $(\mathbb{R}^2)^*$. El monoide es generado por $a_1 = e_1, a_2 = -e_1, a_3 = e_2, a_4 = -e_2$. Las relaciones son $a_1 + a_2 = 0$ y $a_3 + a_4 = 0$. En el álgebra, el ideal de polinomios es generado por $u_1 u_2 = 1$ y $u_3 u_4 = 1$. Estas son dos hipérbolas equiláteras, cada una isomorfa a \mathbb{C}^* (o bien a \mathbb{P}^1). Por lo tanto, la variedad algebraica que obtenemos es $(\mathbb{C}^*)^2$, el 2-toro algebraico complejo. Dividiendo por u_2 y u_4 en sus respectivas ecuaciones, obtenemos una proyección de u_2 en u_1 y de u_4 en u_3 .

En general, el n -toro algebraico complejo es isomorfo a n hipérbolas equiláteras, y luego a $(\mathbb{C}^*)^n$.

Siguiendo la línea de pensamiento del ejemplo anterior, es fácil ver que el n -toro algebraico complejo se puede incluir dentro de cualquier variedad tórica afín X_σ obtenida de un cono σ en \mathbb{R}^n como un subconjunto abierto denso de Zariski. En efecto, si a_1, \dots, a_m generan a S_σ , se puede demostrar que la aplicación

$$\begin{aligned} \mathbb{T} &\hookrightarrow X_\sigma \\ t &\rightarrow (t^{a_1}, \dots, t^{a_m}) \end{aligned}$$

donde la notación t_i^a fue introducida en la **Sección 3** (véase *polinomios de Laurent*), es un encaje. La forma de esta aplicación es importante, pues volveremos a ella cuando estudiemos la acción del toro. Sin embargo, una manera más sencilla, y más general, de demostrar esta inclusión, es haciendo uso de un cono análogo al del ejemplo anterior y del siguiente teorema:

Teorema 3. *Sean dos conos σ_0, σ_1 tales que $\sigma_0 \subset \sigma_1$. Entonces, se tienen las siguientes inclusiones:*

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_1 &\subset \hat{\sigma}_0 \\ S_{\sigma_1} &\subset S_{\sigma_0} \\ A_{\sigma_1} &\subset A_{\sigma_0} \\ X_{\sigma_0} &\hookrightarrow X_{\sigma_1} \end{aligned}$$

Demostración. Se sigue directamente de la construcción. □

El teorema anterior también nos deja ver por qué, dado un cono σ , utilizamos su cono dual $\hat{\sigma}$, en vez de σ directamente. En efecto, si no lo hiciéramos, al tener dos conos σ_0, σ_1 tales

que $\sigma_0 \subset \sigma_1$ tendríamos que $X_{\sigma_1} \hookrightarrow X_{\sigma_0}$, lo que es una propiedad no deseable. (Borcherds 2020)

Finalmente, concluimos esta subsección afirmando que la inclusión del toro en cualquier variedad tórica es el hecho que les otorga el nombre, como sugerimos en la **Sección 2**. En efecto, enunciaremos el siguiente teorema (que seguirá del análisis de secciones posteriores):

Teorema 4. (*Caracterización de las variedades tóricas.*) *Una variedad tórica es una variedad algebraica que satisface las siguientes propiedades:*

- *Incluye a un n -toro algebraico complejo \mathbb{T} como un subconjunto abierto denso de Zariski.*
- *La acción de \mathbb{T} sobre sí mismo se puede extender a toda la variedad. Discutiremos más sobre la acción del toro en la **Subsección 4.2.1**.*
- *Es normal.*

Si bien no todos los autores requieren normalidad (Wikipedia 2020), las variedades tóricas que construimos en esta sección son normales (este hecho será demostrado en la **Proposición 7**).

4.1.6. Abanicos finitos e infinitos

Es natural preguntarse qué obtenemos si un abanico tiene una cantidad finita o infinita de conos. Se tiene el siguiente resultado, que no es muy difícil de demostrar:

Teorema 5. *De un abanico con una cantidad finita de conos se obtiene, en el caso no trivial, una variedad tórica proyectiva.*

El siguiente ejemplo muestra que, si un abanico tiene una cantidad infinita de conos, podemos obtener una variedad tórica *demasiado grande* para ser proyectiva:

Ejemplo.

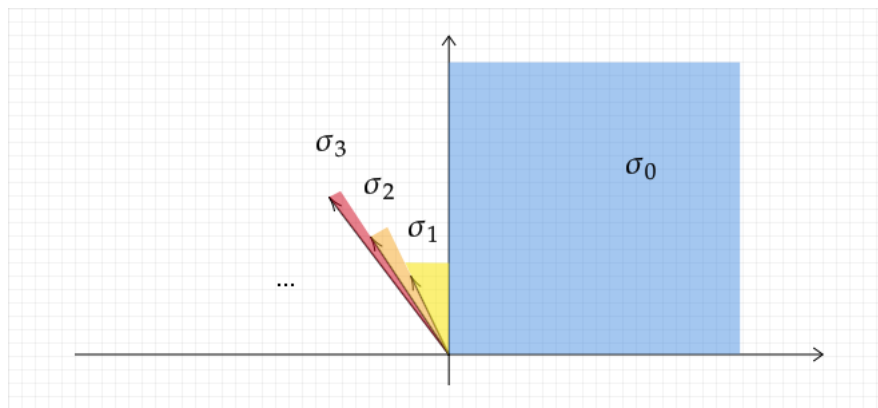


Figura 3: Una secuencia infinita de conos de la que se obtiene una variedad tórica abstracta (no proyectiva). De hecho, esta variedad no es quasi-compacta. (Borcherds 2020)

4.2. Propiedades geométricas y topológicas.

Para ver algunas propiedades útiles de las variedades tóricas, necesitamos algunas definiciones de la geometría convexa.

Definición 9.

1. Un cono definido por los vectores (v_1, \dots, v_r) se dice ser un **símplex** (o **símplice**) si los vectores v_i son todos linealmente independientes. En el mismo espíritu, un abanico se dice **símplicial** si todos los conos que lo componen son símplices.
2. Un vector $v \in \mathbb{Z}^n$ es **primitivo** si sus coordenadas son coprimas. Un cono es **regular** si los vectores $B = (v_1, \dots, v_r)$ que lo definen son primitivos y B puede ser completado en una base del retículo. Un abanico es **regular** si todos los conos que lo componen son regulares.

3. Un abanico se dice ser **completo** si la unión de sus conos cubre \mathbb{R}^n
4. Un abanico es **politopal** si existe un polítopo P que contiene al 0 y el abanico es generado por las caras de P .

Con estas definiciones podemos enunciar tres propiedades importantes que relacionan propiedades de la variedad tórica con propiedades del abanico que la determina.

Teorema 6.

1. X_Δ es compacta si y solo si Δ es completo.
2. X_Δ es suave si y solo si Δ es regular.
3. X_Δ es proyectiva si y solo si Δ es politopal.

Ahora, nos esmeraremos en probar algunas partes del teorema recién enunciado.

4.2.1. La acción del toro

Algebraicamente, el toro $\mathbb{T} = (\mathbb{C}^*)^n$ es un grupo que actúa sobre sí mismo por la multiplicación. Dado que toda variedad tórica contiene al toro como un abierto denso, el toro también actúa sobre toda variedad tórica. A continuación estudiaremos dicha acción:

Sean (a_1, \dots, a_k) los generadores del monoide S_σ , donde, según una base de \mathbb{R}^n , se pueden escribir como $a_i = (\alpha_i^1, \dots, \alpha_i^n) \in \mathbb{Z}^n$. Además, los puntos del toro pueden ser escritos como $t = (t_1, \dots, t_n) \in (\mathbb{C}^*)^n$, y los puntos de X_σ se pueden escribir como $x = (x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{C}^k$. Así, la acción de \mathbb{T} sobre X_σ está dada por

$$\begin{aligned} \mathbb{T} \times X_\sigma &\rightarrow X_\sigma \\ (t, x) &\mapsto t \cdot x = (t^{a_1} x_1, \dots, t^{a_k} x_k) \end{aligned}$$

donde $t^{a_i} = t_1^{\alpha_i^1} \dots t_n^{\alpha_i^n} \in \mathbb{C}^*$. Entonces, si Δ es un abanico y τ una cara de $\sigma \in \Delta$, la biyección $X_\tau \cong X_\sigma \setminus (u_k = 0)$ es compatible con la acción del toro. Por ende, la aplicación de pegado $\psi_{\sigma, \sigma'}$ también es compatible con la acción del toro. Enunciado de manera formal

Teorema 7. *Sea Δ un abanico. La acción del toro en las variedades X_σ para cada $\sigma \in \Delta$ resulta en una acción del toro en la variedad X_Δ .*

Como es natural dada una acción, estudiaremos las órbitas de ésta.

4.2.2. Órbitas

Del **Nullstellensatz** sabemos que existe la correspondencia

$$\mathbb{C}^k \leftrightarrow \{\mathcal{M} \subset \mathbb{C}[\xi] : \mathcal{M} \text{ ideal maximal}\} \leftrightarrow \text{Hom}_{\mathbb{C}\text{-alg}}(\mathbb{C}[\xi], \mathbb{C})$$

Y, para una variedad $V = V(I) = \{x \in \mathbb{C}^k; I \subset \mathcal{M}_x\}$ con I ideal de $\mathbb{C}[\xi]$, $I_V = I(V(I))$, y anillo de coordenadas $R_V = \mathbb{C}[\xi]/I_V$ tenemos la correspondencia

$$V \leftrightarrow \{\mathcal{M} \subset R_V : \mathcal{M} \text{ ideal maximal}\} \leftrightarrow \text{Hom}_{\mathbb{C}\text{-alg}}(R_V, \mathbb{C})$$

Con esto en cuenta, notemos que, como semi-grupo, el retículo dual M está generado por los $\pm e_i^*$ y el anillo de polinomios de Laurent $\mathbb{C}[M]$ está generado por los $z_i^{\pm 1}$, por lo que podemos identificar

$$\mathbb{T} = \text{Specm}(\mathbb{C}[M]) \cong \text{Hom}(M, \mathbb{C}^*) \cong N \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}^* \cong (\mathbb{C}^*)^n$$

donde $N \cong \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{Z})$ y $\text{Hom}(M, \mathbb{C}^*)$ son morfismos de grupo.

Así, todos los semi-grupos S_σ son semi-grupos del retículo M y $\mathbb{C}[S_\sigma]$ es un sub-álgebra de $\mathbb{C}[M]$ generada por monomios de variables u_i . Luego, denotando a los generadores de un semi-grupo S_σ por (a_1, \dots, a_k) , entonces los $u_i = z^{a_i}$ son generadores de $\mathbb{C}[S_\sigma]$ como \mathbb{C} -sub-álgebra; y la denotaremos por $\mathbb{C}[u_1, \dots, u_k]$. Así, para $a \in S_\sigma$, su elemento correspondiente es $z^a \in \mathbb{C}[S_\sigma]$, con multiplicación $z^a \cdot z^{a'} = z^{a+a'}$ y $z^0 = 1$, como uno normalmente esperaría.

Observación. Los puntos de $\text{Specm}(\mathbb{C}[S_\sigma])$ están en correspondencia con morfismos de semi-grupo de S_σ a \mathbb{C} , donde vemos a \mathbb{C} como $\mathbb{C}^* \cup \{0\}$ semigrupo con la multiplicación. Si, $\varphi \in \text{Hom}_{\text{sg}}(S_\sigma, \mathbb{C})$, el x que corresponde a φ cumple que $\varphi(a) = z^a(x)$ para todo $a \in S_\sigma$. En otras palabras, ahora podemos escribir $x = (\varphi(a_1), \dots, \varphi(a_k)) \in \mathbb{C}^k$.

Podemos pensar entonces el actuar de \mathbb{T} sobre X_σ de la siguiente manera:

1. $t : M \rightarrow \mathbb{C}^*$ morfismo de grupos
2. $x(\mapsto \varphi) : S_\sigma \rightarrow \mathbb{C}$ morfismo de semi-grupos

$$\implies t \cdot x : S_\sigma \rightarrow \mathbb{C}, u \mapsto t(u) \cdot x(u) \text{ morfismo de semi-grupos.}$$

Vista esta identificación podemos definir los **puntos distinguidos**

Definición 10. Sea σ un cono y X_σ su variedad tórica afín. A cada cara τ le asociamos un **punto distinguido** x_τ que corresponde al morfismo de semi-grupo definido como

$$\varphi_\tau(a) = \begin{cases} 1 & \text{si } a \in \tau^\perp \\ 0 & \text{e. o. c.} \end{cases}$$

Así podemos definir la órbita general

Definición 11. Con la notación anterior, la **órbita** de T en X_σ que corresponde a la cara τ es la órbita del punto distinguido x_τ y es denotada O_τ .

Así, como en (Fulton 1993), se puede probar lo siguiente

Teorema 8. Sea Δ un abanico. A cada $\sigma \in \Delta$, podemos asociar un punto distinguido $x_\sigma \in X_\sigma \subset X_\Delta$ y su órbita O_σ , los que cumplen:

1. $X_\sigma = \bigsqcup_{\tau < \sigma} O_\tau$
2. si V_τ es la cerradura de la órbita, entonces $V_\tau = \bigsqcup_{\tau < \sigma} O_\sigma$
3. $O_\tau = V_\tau \setminus \bigcup_{\tau < \sigma, \tau \neq \sigma} V_\sigma$.

Para describir éstas órbitas O_τ y sus cerraduras V_τ , fijemos τ y denotemos como N_τ el sub-retículo de N generado como grupo por $\tau \cap N$,

$$N_\tau = (\tau \cap N) + (-\tau \cap N)$$

Como τ es **saturado**, es decir, si $n \cdot u \in \tau$ para algún $n \in \mathbb{N}$, entonces $u \in \tau$, entonces N_τ también es saturado. El cociente $N(\tau) := N/N_\tau$ también es un retículo (Ejercicio: convencerse), y es llamado el **retículo cociente**. El retículo dual de éste último lo denotaremos $M(\tau) = \tau^\perp \cap M$.

Luego, $O_\tau = \mathbb{T}_{N(\tau)} = \text{Hom}(M(\tau), \mathbb{C}^*) = \text{Specm}(\mathbb{C}[M(\tau)])$ es un toro de dimensión $n - \dim(\tau)$. El toro \mathbb{T}_N actúa sobre O_τ de manera transitiva, a través de la proyección $\text{pn } \mathbb{T}_N \rightarrow \mathbb{T}_{N(\tau)}$. Si denotamos por $N_{\mathbb{R}} = N \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ al \mathbb{R} -e.v. asociado al retículo N , entonces, para cada cono $\sigma > \tau$, podemos definir el cono cociente como

$$\bar{\sigma} := (\sigma + (N_\tau)_{\mathbb{R}}) / (N_\tau)_{\mathbb{R}} \subset N_{\mathbb{R}} / (N_\tau)_{\mathbb{R}} = N(\tau)_{\mathbb{R}}$$

y

Definición 12. La **estrella** de τ se define como

$$\text{Star}(\tau) := \{\bar{\sigma} : \tau < \sigma\}$$

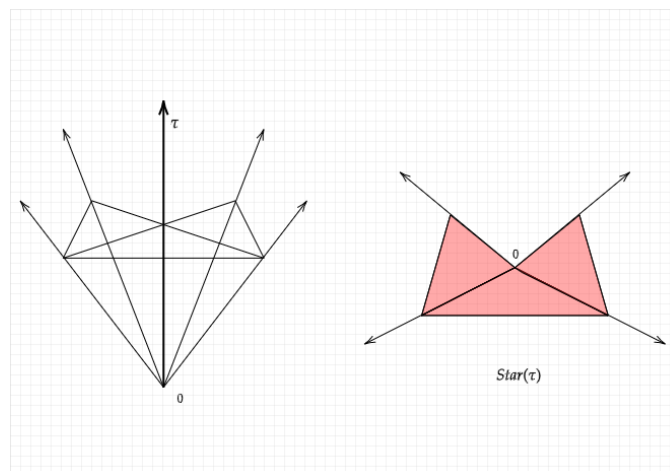


Figura 4: τ y $\text{Star}(\tau)$.

La cerradura de O_τ se identifica con $V(\tau) = X_{Star(\tau)}$. Es una variedad tórica de dimensión $n - \dim(\tau)$. La incrustación del toro O_τ en $V(\tau)$ es el cono $\{0\}$ en $N(\tau)$. Así, podemos clasificar las órbitas de la siguiente manera

Proposición 3.

1. Si $\dim_{\mathbb{R}} \sigma = n$, entonces O_σ es un punto fijo $\{x_\sigma\}$. Si podemos representar a X_σ en \mathbb{C}^k , entonces $O_\sigma = \{x_\sigma\}$ corresponde al origen.
2. Si $\dim_{\mathbb{R}} \sigma = k$, entonces $O_\sigma \cong (\mathbb{C}^*)^{n-k}$.
3. Sea τ_i una arista de Δ , entonces $O_{\tau_i} \cong (\mathbb{C}^*)^{n-1}$. Si $\dim_{\mathbb{R}} \Delta = n$ entonces $D_i := V_{\tau_i}$ es una variedad de codimensión 1 contenida en X_δ . Dichos D_i son divisores de Weil.

Para probar (parte de) el **Teorema 6**, consideremos la siguiente construcción.

4.2.3. Abanicos de variedades tóricas

Para todo $k \in \mathbb{Z}$, tenemos un morfismo de grupos algebraicos $\mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}^*$, $z \mapsto z^k$ que determina un isomorfismo $\text{Hom}_{gr. alg.}(\mathbb{C}^*, \mathbb{C}^*) = \mathbb{Z}$.

Sea N un retículo, y M su retículo dual. Tenemos que

$$\mathbb{T} = \mathbb{T}_N = \text{Hom}(M, \mathbb{C}^*)$$

y, eligiendo una base de N , se tienen isomorfismos

$$\text{Hom}(\mathbb{C}^*, \mathbb{T}) \cong \text{Hom}(\mathbb{Z}, N) \cong N$$

Por lo que cada sub-grupo de un parámetro $\lambda : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{T}$ se corresponde con un único $v \in N$; le llamaremos λ_v . Así, si $v = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{Z}^n$, $\lambda_v(z) = z^v = (z_1^{v_1}, \dots, z_n^{v_n})$.

De manera dual, $\text{Hom}(\mathbb{T}, \mathbb{C}^*) \cong \text{Hom}(N, \mathbb{Z}) \cong M$. Entonces, todo caracter $\chi : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C}^*$ se corresponde con un único $u \in M$; le llamaremos a éste χ^u . Para $t = (t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{T}$, $\chi^u(t) = t_1^{u_1} \cdots t_n^{u_n}$. Denotamos también por χ^u al polinomio correspondiente en $\mathbb{C}[M]$.

Sea $z \in \mathbb{C}^*$, entonces $\lambda_v(z) \in \mathbb{T}$ y se corresponde con un morfismo de grupos de M a \mathbb{C}^* . De manera explícita

$$\lambda_v(z)(u) = \chi^u(\lambda_v(z)) = z^{(u,v)}$$

De esta manera “recuperamos” el retículo a partir de \mathbb{T} . Pero, ¿podemos recuperar el cono a partir de la incrustación del toro en la variedad? Para esto es útil estudiar el límite de los $\lambda_v(z)$ cuando z va a 0.

Proposición 4. Sea $v \in |\Delta|$ y τ el cono de Δ que contiene a v en su interior relativo. Entonces, $\lim_{z \rightarrow 0} \lambda_v(z) = z_\tau$.

Proposición 5. *Con la misma notación anterior, si v no pertenece a ningún cono de Δ , entonces $\lim_{z \rightarrow 0} \lambda_v(z)$ no existe en X_Δ*

Proposición 6. (cf. **Teorema 6.1**) *Si X_Δ es compacta, entonces Δ es completo.*

Demostración. Si los conos de Δ no cubrieran el espacio, existiría un vector v que no pertenece a ningún cono. Entonces, $\lambda_v(z)$ no tiene límite en X_Δ cuando z va a 0; pero eso es una contradicción con la compacidad de X_Δ . \square

Proposición 7. *Las variedades tóricas son normales.*

Demostración. Recordemos que una variedad algebraica es normal si, para cada punto $O_{X,x}$ es integralmente cerrado. Como la acción del toro es (casi) transitiva, los puntos que no fija son suaves, por ende normales. Nos preocuparemos entonces de los puntos distinguidos x_σ . Para una variedad tórica, el anillo local de x_σ es R_σ . Si σ es generado por vectores v_1, \dots, v_r , el lema 1 nos dice entonces que $R_\sigma = \bigcap R_{\tau_i}$ con τ_i son los rayos generados por los v_i . Como $R_{\tau_i} \cong \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n, x_1^{-1}, \dots, x_n^{-1}]$ es integralmente cerrado y la intersección de dominios integralmente cerrados es integralmente cerrado, probamos lo requerido. \square

Habiendo probado esto, podemos obtener la “segunda definición” de variedad tórica (cf. **Teorema 4**)

Para terminar ésta sección, demostraremos la implicancia hacia la derecha del punto 2 del **Teorema 6**, y daremos al lector referencias de dónde encontrar el resto de las pruebas.

Proposición 8. (cf. **Teorema 6.2**) *Si la variedad tórica X_Δ es suave, entonces el abanico Δ es regular.*

Demostración. Nuevamente, como la acción del toro es casi transitiva, nos preocupan los puntos que ésta fija. Para el caso de un abanico generado por un cono σ de dimensión n , si el semi-grupo S_σ es generado por (a_1, \dots, a_k) , tenemos que

$$\mathbb{C}[S_\sigma] = R_\sigma = \mathbb{C}[z^{a_1}, \dots, z^{a_k}] = \mathbb{C}[\xi_1, \dots, \xi_k]/I$$

es el anillo local de x_σ . Si llamamos \mathcal{M} al ideal maximal de A_σ que corresponde al punto x_σ , entonces

$$X_\sigma \text{ es suave} \iff R_\sigma \text{ es regular} \iff \dim R_\sigma = \dim_k \mathcal{M}/\mathcal{M}^2$$

Como $\dim R_\sigma = \dim X_\sigma = \dim \mathbb{T} = n$ tenemos que

$$X_\sigma \text{ suave} \iff \dim_k \mathcal{M}/\mathcal{M}^2 = n$$

\mathcal{M} está generado por los caracteres χ^u para $0 \neq u \in S_\sigma$ y \mathcal{M}^2 está generado por todos los χ^u tal que u es la suma de dos elementos de $S_\sigma \setminus \{0\}$. Así, $\mathcal{M}/\mathcal{M}^2$ tiene como base (las imágenes

a través de la proyección de) los χ^u con los $u \in S_\sigma \setminus \{0\}$ que no son suma de dos elementos. En particular, los elementos de los rayos de $\hat{\sigma}$ en el retículo dual M son elementos de $\mathcal{M}/\mathcal{M}^2$.

Si X_σ fuere suave, $\hat{\sigma}$ no puede tener más de n rayos, y los generadores primitivos de dichos rayos deben ser exactamente los generadores de S_σ .

Como σ es fuertemente convexo, $\hat{\sigma}$ genera $M_{\mathbb{R}}$ y S_σ genera M como grupo. Los generadores primitivos de S_σ son una base de M y por dualidad σ es generado por una base de N . Por lo que $X_\sigma \cong \mathbb{C}^n$.

En el caso general, donde $p := \dim \sigma < n$, consideremos el sub-retículo N_σ , generado como sub-grupo por $\sigma \cap N$. Podemos descomponer entonces N como $N = N_\sigma \oplus N''$ tal que $\sigma = \sigma' \oplus \{0\}$ y $\sigma' \subset N_\sigma$ cumple que $\dim \sigma' = \dim \sigma = \dim n_\sigma$. De manera dual, M se descompone como $M = M' \oplus M''$, obteniendo que

$$S_\sigma = ((\sigma') \cap M')$$

y

$$X_\sigma = X_{\sigma'} \times \mathbb{T}_{N''} \cong X_{\sigma'} \times (\mathbb{C}^*)^{n-p}$$

con $X_{\sigma'}$ la variedad tórica correspondiente al cono σ' en el retículo N_σ y éste al toro \mathbb{T}_{N_σ} .

Si X_σ fuere suave, entonces $X_{\sigma'}$ debe ser suave y σ' debe ser una base de N_σ □

Las siguientes proposiciones son lo que nos resta probar del **Teorema 6**, y dónde encontrar su demostración.

Proposición 9. *Si Δ es completo, entonces X_Δ es compacto.*

Demostración. La demostración se puede encontrar en (Fulton 1993, VI, Teorema 9.1). □

Proposición 10. *Si Δ es regular, entonces X_Δ es suave.*

Demostración informal. Demostrar que si un cono p -dimensional σ está generado por parte de una base del retículo N , entonces X_σ es suave, isomorfa a $\mathbb{C}^p \times (\mathbb{C}^*)^{n-p}$.

Proposición 11. *X_Δ es proyectiva si y sólo si Δ es politopal.*

Demostración. La prueba se puede encontrar en (Fulton 1993, VII.3). □

4.3. Resolución de singularidades

En esta sección, comentaremos un poco acerca de la resolución de singularidades en *superficies* tóricas. Para esto, necesitamos introducir el concepto de **Superficie de Hirzebruch**

Definición 13. Una **superficie de Hirzebruch** \mathcal{H}_p es una variedad tórica construida a partir de un abanico en \mathbb{Z}^2 con aristas generadas por $v_0 = e_1, v_1 = e_2, v_2 = -e_1, v_3 = pe_1 - e_2$.

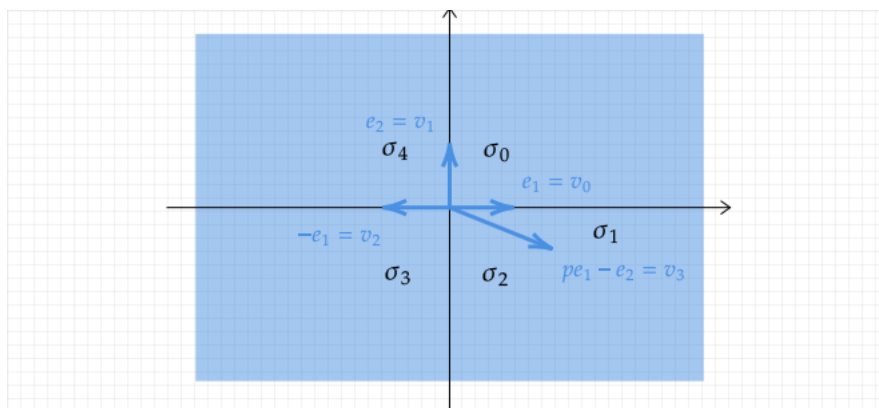


Figura 5: La superficie de Hirzebruch \mathcal{H}_p .

Observación. Se puede probar que dicha superficie es el pegado de $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-p)$ sobre \mathbb{P}^1 y $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(p)$ sobre \mathbb{P}^1 . (cf. Brasselet 2008, 6.1)

Teniendo en cuenta el **Teorema 6**, una superficie tórica suave y compacta será dada por un abanico con aristas generadas por $v_0, \dots, v_{d-1}, v_d = v_0$ en $N = \mathbb{Z}^2$, donde los pares (v_i, v_{i+1}) generan el retículo. Entonces, podemos escribir en general que $v_{i+1} = -v_{i-1} + a_i v_i$ cuidando que los a_i hagan cumplir la condición anterior.

Con esta notación, se tiene

Teorema 9. La única superficie tórica suave y compacta dada por un abanico Δ de $d = 3$ aristas es $X_\Delta = \mathbb{P}^2$. Si $d = 4$, entonces $X_\Delta = \mathcal{H}_p$. En particular si $p = 0$, $X_\Delta = \mathbb{P} \times \mathbb{P}$.

y, de manera inmediata

Teorema 10. Toda superficie tórica compacta se obtiene de \mathbb{P}^2 o una superficie de Hirzebruch mediante una secuencia de *blow-ups* en puntos fijos por la acción del toro.

Lo que significa que si $d \geq 5$, existe j tal que $v_j = v_{j-1} + v_{j+1}$, y

Lema 5. La sucesión a_i debe cumplir

$$\sum_{i=1}^d a_i = 3d - 12$$

Por lo que es natural preguntarse qué sucede si refinamos el abanico añadiendo una arista generada por $v' = v_j + v_{j+1}$ entre las generadas por v_j y v_{j+1} . Dicha acción es precisamente realizar el *blow-up* de la variedad en el punto distinguido correspondiente al cono generado por v_j y v_{j+1} . Consideremos el siguiente ejemplo

Ejemplo. Sea el siguiente abanico

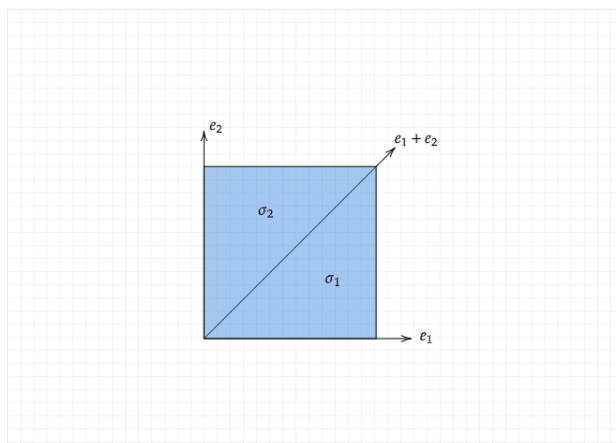


Figura 6: Abanico de aristas generadas por e_1 , e_2 y $e_1 + e_2$.

$S_{\sigma_1} = \langle e_1^* - e_2^*, e_2^* \rangle_{\text{sub-gr.}}$ y $S_{\sigma_2} = \langle e_1^*, -e_1^* + e_2^* \rangle_{\text{sub-gr.}}$. Luego $X_{\sigma_1} = \mathbb{C}_{(u_1, u_2)} = \mathbb{C}_{(z_1 z_2^{-1}, z_2)}^2$ y $X_{\sigma_2} = \mathbb{C}_{(u_3, u_4)} = \mathbb{C}_{(z_1, z_1^{-1} z_2)}^2$. Si pegamos ambas variedades a lo largo de X_τ , con S_τ generado por $(e_1^* - e_2^*, e_2^*, e_1^*, -e_1^* + e_2^*)$ y $R_\tau = \mathbb{C}[u_1, u_2, u_3, u_4]$ tal que $u_1 u_2 = u_3$ y $u_4 u_1 = 1$. Entonces X_τ se representa como

$$\begin{aligned} X_{\sigma_1} \setminus (u_1 = 0) & \quad \text{en } X_{\sigma_1} \\ X_{\sigma_2} \setminus (u_4 = 0) & \quad \text{en } X_{\sigma_2} \end{aligned}$$

Y el pegado se realiza mediante el cambio de carta $(u_1, u_2) \mapsto (u_1 u_2, u_1^{-1})$.

Descrito de otra manera, la variedad resultante es una sub-variedad de $\mathbb{C}_{(z_1, z_2)}^2 \times \mathbb{P}_{(t_0: t_1)}^1$ dada por $z_1 t_1 = z_2 t_0$ cubierta por dos variedades X_0 y X_2 con $t_0 \neq 0$ y $t_1 \neq 0$. En X_0 , tenemos coordenadas z_1 y $t_1/t_0 = z_2/z_1$, es decir X_{σ_1} . Por otro lado, en X_1 tenemos coordenadas z_2 y $t_0/t_1 = z_1/z_2$, es decir X_{σ_2} . Dicha variedad es el *blow-up* de un punto en \mathbb{C}^2 , reemplazando el origen por la recta proyectiva.

Este proceso se puede generalizar para todas las superficies singulares.

Teorema 11. Si σ es un cono cuyos generadores **no** generan el retículo N , podemos escoger generadores e_1, e_2 del retículo tales que σ es generado por $v = e_2$ y $v' = m e_1 - k e_2$ con $0 < k < m$ y k, m primos relativos.

De esta manera, el cono generado por e_1 y e_2 corresponde a un abierto suave; y el cono generado por e_1 y $me_1 - ke_2$ corresponde a una variedad con un punto “menos” singular. El proceso se puede repetir las veces que sea necesario; de hecho, existe un algoritmo para resolver singularidades de superficies. Dicho algoritmo da lugar a la fracción continua de Hirzebruch-Jung, que es una forma de expresar $\frac{m}{k}$ (cf. Brasselet 2008, 6.4)

4.3.1. Relación con grupos algebraicos y morfismos tóricos

Concluiremos con las siguientes dos definiciones que pueden ser interesantes si el lector quisiera seguir estudiando la teoría.

Definición 14. Sean G, H grupos algebraicos que actúan en variedades algebraicas X, Y , respectivamente, y sea $\varphi : G \rightarrow H$ un morfismo de grupos algebraicos. Un morfismo $f : X \rightarrow Y$ se dice **φ -equivariante** si conmuta con φ y las acciones de G y H . (McKernan s.f.)

Definición 15. Sean X, Y variedades tóricas, y sean (sugerentemente) G, H los toros que incluyen. Si $f : X \rightarrow Y$ es un morfismo equivariante, entonces f es llamado un morfismo **tórico**. (McKernan s.f.)

5. Referencias

El flujo de ideas de este artículo está basado *fuertemente* en los libros de Brasselet (Brasselet 2008) y Fulton (Fulton 1993).

Referencias

- [Bor20] Richard E. Borcherds. *Lecture 22: Toric varieties*. Jun. de 2020. URL: <https://youtu.be/Sjp-99Xyiic>.
- [Bra08] Jean-Paul Brasselet. *Introduction to Toric Varieties*. Publicações Matemáticas, 2008.
- [Ful93] William Fulton. *Introduction to Toric Varieties*. Princeton University Press, 1993.
- [McK] McKernan. *Lecture 7: Blowing up and toric varieties*. URL: http://math.mit.edu/~mckernan/Teaching/11-12/Spring/18.726/1_7.pdf.
- [Mon20] Pedro Montero. *Apuntes del curso Mat 426, Curvas Algebraicas*. 2020. URL: http://pmontero.mat.utfsm.cl/pdf_mat426/MAT426.pdf.
- [Wik20] The Free Encyclopedia Wikipedia. *Toric variety*. Nov. de 2020. URL: https://en.wikipedia.org/wiki/Toric_variety.