

# Singularidades Du Val $A_n, D_n, E_6, E_7, E_8$

CARLOS ASENCIO

## Resumen

Este trabajo tiene por finalidad adentrar al lector en el estudio de singularidades, considerando una clasificación particular de estas y dar muestra de distintos ejemplos correspondientes al estudio de las singularidades  $ADE$  estudiadas por Patrick Du Val y Felix Klein.

## Introducción

El estudio de singularidades, desde hace ya bastantes años, se ha consolidado como una de las áreas más atrapantes a la hora de la investigación por parte de los matemáticos, tanto por su mística a la hora de identificar como se comporta una función, superficie, etc. Alrededor de una singularidad, como para trascender con estos resultados mas allá de solo el campo matemático.

Uno de los puntos importantes dentro del estudio de singularidades, se podría decir que es el hallar una forma de clasificarlas, pero para esto hay que considerar el concepto que habría detras de dicha clasificación.

Este trabajo se centrara en un tipo de clasificación, que si bien es cierto no es del todo general, tiene una gran utilidad y los cálculos que se realizan, la vuelven una clasificación atrapante.

---

## Notación

Para un mayor entendimiento, así como para facilitar la lectura de este trabajo, se debe considerar el siguiente contexto: una superficie  $X \subseteq \mathbb{A}^3$  donde el punto  $P = (0, 0, 0) \in X$  corresponde a un punto singular. La finalidad es realizar un *Blow-up* en  $P$ . Al realizar esto obtendremos una variedad  $B$  junto a un morfismo  $\sigma : B \rightarrow X$ .

El *Blow-up* de  $\mathbb{A}^3$  en  $P$  se puede cubrir por 3 cartas afines, las cuales denominaremos  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ , las que estarán definidas de la siguiente forma:

$$\begin{array}{lll} \sigma_1 : \mathbb{A}^3 \longrightarrow \mathbb{A}^3 & \sigma_2 : \mathbb{A}^3 \longrightarrow \mathbb{A}^3 & \sigma_3 : \mathbb{A}^3 \longrightarrow \mathbb{A}^3 \\ (x, y_1, z_1) \longmapsto (x, xy_1, xz_1) & (x_1, y, z_1) \longmapsto (x_1y, y, yz_1) & (x_1, y_1, z) \longmapsto (x_1z, y_1z, z) \end{array}$$

# Capítulo 1

## Clasificación ADE

Antes de entrar de lleno en la clasificación *ADE*, es imperativo el detallar de donde se origina dicha clasificación. Cabe recalcar que no se profundizará en demasía en el origen puesto que nos derivará a otros temas que se alejan del objetivo de este documento, así que se extiende la invitación al lector a ver más sobre esto en [6].

**Definición 1.0.1.** Un diagrama de Dynkin, es un grafo compuesto de vértices y aristas, ya sean simples o multiples, cuya finalidad es representar la clasificación de *álgebras de Lie semisimples sobre cuerpos algebraicamente cerrados*.

*Observación 1.0.1.* Un diagrama de Dynkin puede ser dirigido o no dirigido.

**Definición 1.0.2.** Un diagrama de Dynkin se dice **simplemente entrelazado** si este no presenta aristas multiples.

**Ejemplo 1.0.1.***Diagrama de Dynkin dirigido**Diagrama de Dynkin no dirigido*

Para la clasificación *ADE*, el estudio se centra en los diagramas de Dynkin **simplemente entrelazados**.

**Definición 1.0.3.** La clasificación *ADE* relaciona objetos matemáticos que están en correspondencia con diagramas de Dynkin simplemente entrelazados.

La lista completa de los diagramas de Dynkin simplemente entrelazados corresponde a:  $A_n, D_n, E_6, E_7, E_8$

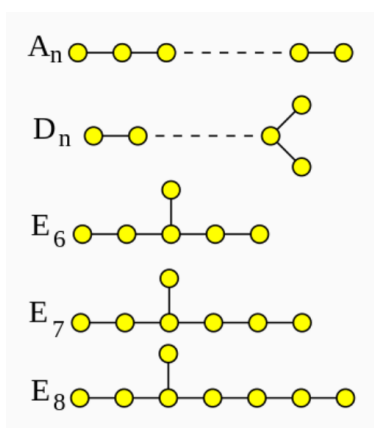


Figura 1.1: Diagramas de Dynkin de  $A_n, D_n, E_6, E_7, E_8$

*Observación 1.0.2.* esta lista contempla objetos que presentan isomorfismos entre si, como es el caso de  $A_3 \cong D_3$ , por tanto la lista sin repeticiones sería:  $A_n, D_n$  con  $n \geq 4, E_6, E_7, E_8$

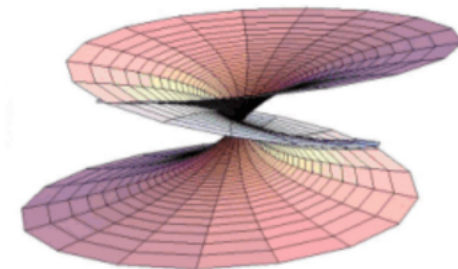
## Capítulo 2

### Singularidades ADE/DuVal

**Definición 2.0.1.** Una singularidad de Du Val es una singularidad aislada de una superficie compleja, que corresponde a una superficie doble ramificada del plano.

*Observación 2.0.1.* Las singularidades de Du Val se conocen también como *Singularidad sencilla de superficie, singularidad Kleiniana o de Klein, o doble punto racional.*

*Observación 2.0.2.* Las singularidades de Du Val son parte de las singularidades canónicas (también llamadas singularidades racionales de Gorenstein), en estricto rigor corresponden a las singularidades canónicas en dimensión 2.

**Ejemplo 2.0.1.***Superficie doble ramificada*

Un hecho importante a resaltar es que existen varias formas de caracterizar las singularidades de Du Val, de allí nace el siguiente resultado

**Teorema 2.0.1.** *Las Singularidades de Du Val estan caracterizadas por alguna de las siguientes condiciones:*

- 1 **Doble punto absolutamente aislado:**  $P \in X$  corresponde a un punto doble aislado, y este tiene una resolución  $X_n \rightarrow X_{n-1} \rightarrow \dots \rightarrow X_1 \rightarrow X$  donde cada paso de  $X_i \rightarrow X_{i-1}$  corresponde al Blow up de un doble punto aislado sobre  $P \in X$ .
- 2 **Clase canónica:** Existe una resolución de singularidades  $\phi : Y \rightarrow X$  tal que  $K_Y = \phi^* K_X$ .  
Dicho de otra manera,  $K_Y$  es trivial sobre una vecindad de un lugar geométrico excepcional.  
Más aún, la resolución  $\phi$  se conoce como Resolución crepante
- 3 **Polígono de Newton:** En un sistema de coordenadas analítico,  $f$  tiene monomios cuyos pesos son menores que 1 (Peso  $< 1$ ) con respecto a cada uno de los pesos  $\frac{1}{2}(1, 1, 0)$ ,  $\frac{1}{3}(1, 1, 1)$ ,  $\frac{1}{4}(2, 1, 1)$ ,  $\frac{1}{6}(3, 2, 1)$ .

*Observación 2.0.3.* Las singularidades de Du Val surgen en varios contextos diferentes, y como vimos con el resultado anterior, se pueden caracterizar de numerosas formas, aquí dejo un par más de caracterizaciones:

- (a) Las singularidades de Du Val corresponden al cociente de  $\mathbb{C}^2$  por subgrupos finitos de  $SL(2, \mathbb{C})$ .
- (b) Las singularidades de Du Val corresponden exactamente a las singularidades simples (esto quiere decir que, solamente se pueden obtener un número finito de otras singularidades por medio de pequeñas perturbaciones de una singularidad de Du Val).

Para el siguiente resultado se hacen necesarias un par de definiciones y un resultado previo, para así tener mas claridad al momento de ver la demostración.

**Definición 2.0.2.** Sea  $X$  una variedad algebraica proyectiva irreducible. Una **resolución de singularidades** de  $X$  es un morfismo birracional  $f : X \rightarrow Y$  tal que

- (1)  $Y$  es una variedad algebraica proyectiva **suave** e irreducible.
- (2)  $f^{-1}(X_{Reg}) \xrightarrow{\sim} X_{Reg}$  es un isomorfismo.
- (3)  $E := (X_{Sing})$  es una hipersuperficie con **cruces simples normales**, es decir, si  $E = E_1 \cup \dots \cup E_r$  son las componentes irreducibles de  $E$ , entonces cada  $E_i$  es una hipersuperficie suave de  $Y$  y cada punto  $y \in E$  posee coordenadas locales  $(u_1, \dots, u_n)$  tales que, localmente,  $E = \{u_1 \cdots u_k = 0\}$  para cierto  $k \leq n$ .

**Definición 2.0.3.** Sea  $C \subset S$  una curva suave contenida en la superficie  $S$ , la curva  $C$  se dice *curva(-1)* si  $C \cong \mathbb{P}^1$  y además tiene autointersección (-1).

**Ejemplo 2.0.2.** Sea  $S$  una superficie proyectiva suave e irreducible y  $\varepsilon : \tilde{S} := Bl_p(S) \longrightarrow S$  el Blow up de un punto  $p \in S$ , donde  $E = \varepsilon^{-1}(p) \cong \mathbb{P}^1$ . Entonces tenemos que

$$\mathcal{O}_{\tilde{S}}(E)|_E \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-1).$$

Así, podemos calcular su auto-intersección

$$E^2 := E \cdot E = \deg(\mathcal{O}_{\tilde{S}}(E)|_E) = \deg(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-1)) = -1$$

**Teorema 2.0.2.** (Teorema de Castelnuovo)

Sea  $X$  una superficie proyectiva suave e irreducible entonces existe un morfismo birracional

$f : X \longrightarrow Y$  a una superficie suave  $Y$  si y solo si  $X$  contiene una curva racional suave con auto-intersección (-1).

*Observación 2.0.4.* En pocas palabras, lo que nos dice este teorema, es que si tenemos curvas (-1), estas se pueden contraer y obtener una nueva superficie, la cual es suave.

**Definición 2.0.4.** Sea  $S$  una superficie,  $S$  se dice **superficie minimal** si no contiene curvas (-1).

Con todo esto en consideración, pasemos a ver el siguiente resultado

**Lema 2.0.1.** Sea  $P = (0, 0, 0) \in X$  una singularidad de Du Val. Entonces  $P = (0, 0, 0) \in X$  es un doble punto de incrustación de dimensión 3.



*Demostración.* Sea  $f : Y \rightarrow X$  la resolución minimal. Más adelante encontraremos explícitamente un divisor  $Z + \tilde{C}$ , el cual se convertirá en el *pull back* de una sección del hiperplano de  $P \in X$ .

Veamos los siguientes diagramas, donde  $\bullet$  corresponde a las componentes irreducibles de  $\tilde{C}$ . Además, notemos que los números que aparecen en  $\circ$  nos indican la multiplicidad de esa curva en  $Z$ .

$$\begin{array}{cc}
 A_n : \bullet - \circ - \dots - \circ - \bullet & D_n : \begin{array}{c} \circ - \circ - \dots - \circ - \circ \\ | \qquad \qquad | \\ 1 \circ \qquad \qquad \bullet \end{array} \\
 \\
 E_6 : \begin{array}{c} \circ - \circ - \circ - \circ - \circ \\ | \\ 2 \circ - \bullet \end{array} & E_7 : \begin{array}{c} \bullet - \circ - \circ - \circ - \circ - \circ - \circ \\ | \\ 2 \circ \end{array} \\
 \\
 E_8 : \begin{array}{c} \circ - \circ - \circ - \circ - \circ - \circ - \circ \\ | \\ 3 \circ \end{array}
 \end{array}$$

La elección de  $\tilde{C}$  no es única; sean  $\tilde{C}_1$  y  $\tilde{C}$  dos posibles elecciones de  $\tilde{C}$ , las cuales son disjuntas. Se verifica caso a caso, que  $(Z + \tilde{C}) \cdot E_j = 0$  para toda curva excepcional  $E_j$  y  $(Z \cdot \tilde{C}) = 2$ . Así (por lema 4.13 [2]), se tiene que  $\mathcal{O}_Y(-Z - \tilde{C}_i) \cong \mathcal{O}_Y$ . Debido a esto, la sección  $1 \in H^0(Y, \mathcal{O}_Y) \cong H^0(Y, \mathcal{O}_Y(-Z - \tilde{C}_i)) \subset H^0(Y, \mathcal{O}_Y) = H^0(X, \mathcal{O}_X)$  nos da una función  $g_i$  en  $X$  tal que  $C_i = (g_i = 0)$  es una sección de la hipersuperficie de  $P \in X$  y  $f^*C_i = Z + \tilde{C}$ .

La multiplicidad de  $X$  en el punto  $P$  divide al número de intersecciones locales de cualquier par

de secciones de hipersuperficies. Para calcular esto se usa la fomula de la proyección:

$$(C_1 \cdot C_2)_X = (Z + \widetilde{C}_1 \cdot \widetilde{C}_2)_Y = (Z \cdot \widetilde{C}_2) = 2$$

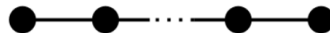
Por lo tanto  $C_i$  es una curva singular reducida de multiplicidad 2 (o 1), lo que implica directamente que es planar, y por esto  $X$  tiene una incrustación de dimensión 3. □

*Observación 2.0.5.* Este resultado corresponde a la versión 2-dimensional del lema (5.30,[2]).Otra demostración de este resultado, usando herramientas generales, sería la siguiente: Sea  $P = (0, 0, 0) \in X$  una singularidad canónica de superficie y  $P \in C \subset X$  sección general de hipersuperficie con normalización  $\pi : \widetilde{C} \rightarrow C$ . Por lema (5.30,[2]) sabemos que  $\pi_*\omega_{\widetilde{C}} \supset m_{0,C}\omega_C$ . Esto es equivalente a que  $m_{0,C}\mathcal{O}_{\widetilde{C}} \subset \mathcal{O}_C$  (aquí se hace necesario un poco de teoría de dualidad local). Finalmente se llega a que  $C$  es un nodo ordinario o una cúspide.

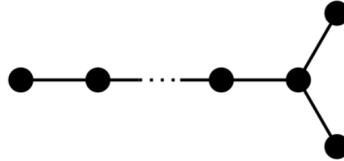
Con todo esto ya preparado, podemos proceder a ver el siguiente resultado que nos sirve para caracterizar las singularidades de Du Val con los diagramas de Dynkin.

**Teorema 2.0.3.** *Toda Singularidad de Du Val tiene una incrustación de dimensión 3. Después de un cambio analítico local de coordenadas, la siguiente corresponde a una lista completa de las singularidades de Du Val:*

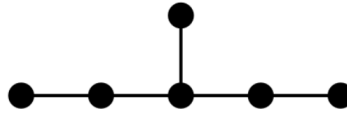
- **A.** Las singularidades  $A_n$  ( $n \geq 1$ ) con ecuación  $x^2 + y^2 + z^{n+1} = 0$  y con grafo dual con  $n$  vértices:



- **B.** Las singularidades  $D_n$  ( $n \geq 4$ ) con ecuación  $x^2 + y^2z + z^{n-1} = 0$  y con grafo dual con  $n$  vértices:



- **C.** La singularidad  $E_6$  (resp.  $E_7$ , resp.  $E_8$ ) con ecuación  $x^2 + y^3 + z^4 = 0$  (resp.  $x^2 + y^3 + yz^3 = 0$ , resp.  $x^2 + y^3 + z^5 = 0$ ) y con grafo dual con 6 (resp. 7, resp. 8) vértices:



*Demostración.* Sea  $P = (0, 0, 0) \in X$  una singularidad de Du Val con resolución minimal  $f : X \rightarrow Y$ . Sea  $E = \cup E_i$  las curvas excepcionales y  $\Gamma$  su grafo dual asociado. Lo primero es establecer que  $\Gamma$  corresponde a uno de los grafos enlistados arriba.

Se tiene, por el teorema (4.7,[2]), que  $\Gamma$  es una cadena (tipo  $A$ ) o corresponde a una horquilla de 3 ramas de largo  $n_i - 1$  tal que

$$\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} > 1$$

Los únicos conjuntos de enteros que satisfacen esta condición son  $(2,2,m)$  (Tipo  $D$ ) y  $(2,3,3)$ ,  $(2,3,4)$ ,  $(2,3,5)$  (tipo  $E$ ).

Para obtener las ecuaciones que identifican las singularidades del listado, procederemos en dos pasos. Primero identificamos una sección de hipersuperficie  $P = (0, 0, 0) \in X$ . Esto nos da cierta clase de ecuaciones, las cuales satisfacen más propiedades si  $P = (0, 0, 0) \in X$  es canónica. Luego

de esto, aún tenemos que hacer el cambio de coordenadas apropiado para así obtener las ecuaciones en la forma requerida.

Sabemos que  $P = (0, 0, 0) \in X$  está definido en  $\mathbb{C}^3$  por medio de una ecuación de la forma  $F = x^2 + zf(x, y, z)$ . La clasificación de ecuaciones por medio de cambio de coordenadas analítico está visto en detalle en [5]. Aquí veremos una versión más simplificada del cálculo completo, pero que permite entender a plenitud la demostración. Para esto haremos uso reiterado de estos cuatro métodos:

- (1) El teorema de preparación de Weierstrass.
- (2) La eliminación de los  $y^{n-1}$  del polinomio  $a_n y^n + a_{n-1} y^{n-1} + \dots$  por medio del cambio de coordenadas  $y \mapsto y - a_{n-1}/na_n$  cuando  $a_n$  es invertible.
- (3) El lema de Hensel en la siguiente versión: *Sea  $f(y, z)$  una serie de potencias con término principal  $f_d(y, z)$ . Se asume que  $f_d = gh$  con  $g$  y  $h$  son primos relativos. Entonces  $f = GH$  donde  $g$  (resp.  $h$ ) corresponde al término principal de  $G$  (resp.  $H$ ).*
- (4) Sean  $M_1, M_2, M_3$  monomios multiplicativamente independientes en las variables  $x, y, z$ . Entonces cualquier serie de potencias de la forma  $M_1(\text{unidad}) + M_2(\text{unidad}) + M_3(\text{unidad})$  es equivalente a  $M_1 + M_2 + M_3$  por medio del cambio de coordenadas  $x \mapsto x(\text{unidad})$ ,  $y \mapsto y(\text{unidad})$ ,  $z \mapsto z(\text{unidad})$ .

Sea  $f_d$  el grado  $d$  de la parte homogénea de una serie de potencias  $f$ . La demostración se dividirá en varios pasos, para mayor claridad e ir simplificando el trabajo:

**Paso 1:** Si  $\text{mult}_0 F = 1$  entonces tenemos un punto suave, por tanto asumimos que  $\text{mult}_0 F = 2$ .

**Paso 2:** Aplicando (1) y después (2) a  $x^2$ , así se reduce la ecuación a la forma

$$F = (\text{unidad})(x^2 + f(y, z)).$$

**Paso 3:** Si  $\text{mult}_0 f < 2$  entonces aplicamos (1) y (2) a  $f$  para así obtener la ecuación de la forma:

$$F = (\text{unidad})(x^2 + (\text{unidad})(y^2 + z^m(\text{unidad}))) \text{ para algún } m \geq 2.$$

Finalmente, aplicando (4) a esto se obtiene que  $F = x^2 + y^2 + z^m$ , lo cual corresponde al caso **A**.

A continuación, asumimos que  $\text{mult}_0 f = 3$ , lo que es equivalente a que  $f_3 \neq 0$ .

**Paso 4:** Se asume que  $f_3$  no es un cubo. Entonces  $f_3 = lq$  donde  $l$  es lineal y no divide a  $q$ . Por

(3) se tiene que  $f = LQ$  y podemos escoger  $L$  como nuestra coordenada  $z$ . Así  $f = z(ay^2 + \dots)$  y

$a \neq 0$  ya que  $l$  no divide a  $q$ . Aplicando (1) y luego (2) a  $y^2$  obtenemos la forma:

$$(\text{unidad}) \cdot (x^2 + (\text{unidad}) \cdot z(y^2 + z^m \cdot (\text{unidad}))) \text{ para algún } m \geq 2.$$

Así, usando (4) se obtiene la ecuación correspondiente al caso **B** :

$$x^2 + z(y^2 + z^m) \text{ para algún } m \geq 2.$$

**Paso 5:** Solo nos quedan los casos cuando  $f_3$  es un cubo. Aplicando (1) y (2) se obtiene que:

$$f = y^3 \cdot u + yz^a \cdot u_a + z^b \cdot u_b,$$

donde  $a \geq 3, b \geq 4, u$  es una unidad y  $u_a, u_b$  son unidades o cero.

**Paso 6:** Afirmamos que la singularidad  $X := (x^2 + y^3 \cdot u + yz^a \cdot u_a + z^b \cdot u_b = 0)$  donde  $u(0) \neq 0$

es una singularidad de Du Val si y solo si  $a \leq 3$  y  $u_a(0) \neq 0$  o  $b \leq 5$  y  $u_b(0) \neq 0$ .

**Demostración:** Se asume que  $a \geq 4$  y  $b \geq 6$ . Sea  $Y$  definido como:

$$(p^2 + q^3 \cdot u(pr^3, qr^2, r) + qr^{a-4} \cdot u_a(pr^3, qr^2, r) + r^{b-6} \cdot u_b(pr^3, qr^2, r) = 0).$$

Entonces  $\pi : (p, q, r) \mapsto (x = p \cdot r^3, y = q \cdot r^2, z = r)$  nos entrega un morfismo biracional

$\pi : Y \rightarrow X$  con divisor excepcional irreducible  $(r = 0) \subset Y$ .  $Y$  es suave, en general, en los puntos de  $(r = 0)$ . Un generador de  $\omega_X$  esta dado por  $(1/x)(dy \wedge dz)$ .

$$\pi^* \frac{dy \wedge dz}{x} = \frac{1}{r} \frac{dy \wedge dz}{p},$$

así, tiene un polo a lo largo de  $(r = 0)$  y  $X$  no es canónico.

La otra implicancia se puede ver examinando tres casos. Dos de ellos se pueden trabajar juntos:

**Paso 7:**  $a \geq b - 1, b = 4, 5$  y

$$f = y^3 \cdot (\text{unidad}) + yz^a \cdot v_1 + z^b \cdot (\text{unidad}).$$

si  $a \geq b$  entonces  $yz^a \cdot v_1$  puede ser absorbido dentro del ultimo termino y así, haciendo uso de (4), tendríamos el resultado. Por tanto, se asume que  $a = b - 1$ . Aplicando (2) a  $z^b$  y moviendo múltiplos de  $y^i z^{b-i} (i \geq 3)$  dentro de  $y^3(\text{unidad})$ , se obtiene que:

$$f = y^3 \cdot (\text{unidad}) + y^2 z^{b-2} \cdot v_2 + z^b \cdot (\text{unidad}).$$

Usando (2) de forma similar en  $y^3$  obtenemos,

$$f = y^3 \cdot (\text{unidad}) + z^b \cdot (\text{unidad}),$$

porque  $2(b-2) \geq b$ . Usando (4) se obtiene la ecuación para  $E_6$  o  $E_8$ .

**Paso 8:**  $b \geq 5$  y

$$f = y^3 \cdot (\text{unidad}) + yz^3 \cdot (\text{unidad}) + z^b \cdot v_3.$$

Haciendo *Blow up* en el punto  $P$  por medio de la sustitución  $y = y_1z_1$  y  $z = z_1$  se obtiene

$$\bar{f} = y^3 \cdot (\text{unidad}) + y_1z_1 \cdot (\text{unidad}) + z_1^{b-3} \cdot v_3$$

Notemos que  $\text{mult}_0 \bar{f} = 2$  y  $\bar{f}_2$  no es un cuadrado. Entonces por (3)  $\bar{f}$  es reducible, y por tanto lo es  $f$ . Desde que  $f_3 = y^3 \cdot (\text{constante})$ , uno de los factores de  $f$  es de la forma  $y + (\text{terminos mas grandes})$ .

Escogiendo esto como nuestra nueva coordenada  $y$ , transformamos  $f$  a la forma:

$$f = y(y^2 \cdot (\text{unidad}) + yz^2 \cdot v_4 + z^3 \cdot (\text{unidad})).$$

Aplicando (2) a  $z^3$  se obtiene

$$f = y(y^2 \cdot (\text{unidad}) + z^3 \cdot (\text{unidad})).$$

Finalmente, (4) nos entrega  $f = y^3 + yz^3$  el cual corresponde a  $E_7$ .

**Paso 9:**  $\text{mult}_0 f \geq 4$ . Mostraremos que esto no corresponde a una singularidad de Du Val. Como en el paso 6, se define  $Y := (p^2 + r^{-4} \cdot f(qr, r))$ . Entonces:

$$\pi : (p, q, r) \mapsto (x = p \cdot r^2, y = q \cdot r, z = r)$$

mapea  $Y$  a  $X$ . Como en el paso 6 se obtiene que  $X$  no es de Du Val. Finalmente, la conclusión viene de la proposición (4.10,[2]). □

# Capítulo 3

## Ejemplos

En este capítulo, abordaremos unos cuantos ejemplos respecto a algunas singularidades  $ADE$ .

### **Ejemplo 3.0.1.** $A_1$

Sea  $X = V(x^2 + y^2 + z^2) \subseteq \mathbb{A}^3$  una variedad. Notemos que el punto  $P = (0, 0, 0)$  es la única singularidad de la variedad  $X$ , a este punto se le conoce como punto ordinario doble. Notemos que nuestra variedad  $X$  corresponde a un cono cuadrático, el cual se puede ver graficado de la siguiente forma (Esto se hace mas evidente al hacer el cambio de  $z \rightarrow iz$ )

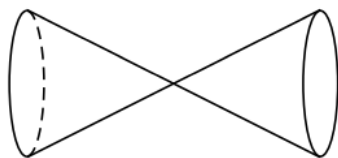


Figura 3.1: Variedad  $X$



Nos enfocamos en la carta  $\sigma_1$ , y veamos que le ocurre a la ecuación que define a nuestra variedad  $X : x^2 + y^2 + z^2 = x^2 + (xy_1)^2 + (xz_1)^2 = x^2 + x^2y_1^2 + x^2z_1^2 = x^2(1 + y_1^2 + z_1^2)$ .

Aquí se obtiene la variedad  $B_1 = V(1 + y_1^2 + z_1^2, x)$  y  $\sigma_1 : B_1 \rightarrow X$  corresponde a la restricción del Blow-up.

Además notemos que  $\sigma_1^{-1}(P) = \Gamma$  que es una curva que se obtiene al intersectar  $x = 0$  con  $B_1$ .

Veamos ahora que ocurre con la carta  $\sigma_2$  :

$$x^2 + y^2 + z^2 = (x_1y)^2 + y^2 + (yz_1)^2 = x_1^2y^2 + y^2 + y^2z_1^2 = y^2(1 + x_1^2 + z_1^2).$$

Aquí se obtiene la variedad  $B_2 = V(1 + x_1^2 + z_1^2, y)$  y  $\sigma_2 : B_2 \rightarrow X$  corresponde a la restricción del Blow-up, además notemos que  $\sigma_2^{-1}(P) = \Gamma$  que es una curva que se obtiene al intersectar  $y = 0$  con  $B_2$ .

Finalmente, veamos la carta  $\sigma_3$  :

$$x^2 + y^2 + z^2 = (x_1z)^2 + (y_1z)^2 + z^2 = x_1^2z^2 + y_1^2z^2 + z^2 = z^2(1 + x_1^2 + y_1^2).$$

Aquí se obtiene la variedad  $B_3 = V(1 + x_1^2 + y_1^2, z)$  y  $\sigma_3 : B_3 \rightarrow X$  corresponde a la restricción del Blow-up, además notemos que  $\sigma_3^{-1}(P) = \Gamma$  que es una curva que se obtiene al intersectar  $z = 0$  con  $B_3$ .

Por otra parte, si consideramos la carta  $\sigma_1$ , para que las derivadas parciales den cero, se debe cumplir que  $y_1 = z_1 = 0$ , esto es análogo para  $\sigma_2$  y  $\sigma_3$ . Por tanto al pegar las 3 cartas, lo cual nos entregará el Blow-up completo, se obtiene la superficie  $B$ , la cual es suave.

Graficamente, lo que está ocurriendo es que el punto  $P$  de nuestra variedad  $X$  se puede ver como la intersección de infinitas rectas, las cuales, al momento de hacer el Blow-up, se “despegan y

alinean", paralelas entre si.

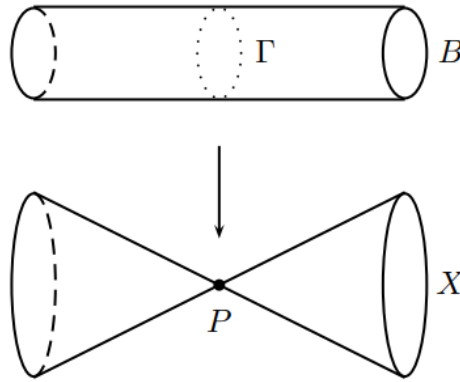


Figura 3.2: El *blow up* de  $X$  en  $P$

Finalmente, la curva  $\Gamma$  satisface que  $\Gamma^2 = -2$ , esto pues  $\Gamma$  corresponde a la curva excepcional del punto  $P$ . Además, se tiene que  $\Gamma \cong \mathbb{P}^1$ , y  $B \rightarrow X$  corresponde a la resolución de  $X$ .

### Ejemplo 3.0.2. $A_2$

Sea  $X = V(x^2 + y^2 + z^3) \subseteq \mathbb{A}^3$  una variedad. Notemos que este contexto es similar al expuesto en el ejemplo anterior, ya que nuestra variedad presenta una singularidad en  $P = (0, 0, 0)$ , así que consideraremos hacer el Blow up en  $P$ . Para esto nos enfocaremos en dos de las tres cartas, ya que la simetría nos permite identificar lo que ocurre con la carta restante.

Para la carta  $\sigma_1$  se tiene que:  $x^2 + (y_1x)^2 + (xz_1)^3 = x^2(1 + y_1^2 + xz_1^3)$

Mientras que para la carta  $\sigma_3$  se tiene que:  $(x_1z)^2 + (y_1z)^2 + z^3 = z^2(x_1^2 + y_1^2 + z)$

De aquí se obtienen dos variedades  $B_1 = V(1 + y_1^2 + xz_1^3)$ ,  $B_3 = V(x_1^2 + y_1^2 + z)$  en conjunto a sus respectivos morfismos  $\sigma_i : B_i \rightarrow X$ . Además, notemos que tanto  $B_1$  como  $B_3$  son suaves:

$B_1$ :  $\nabla(1+y_1^2+xz_1^3) = (z_1^3, 2y_1, 3xz_1^2) = (z_1^3, 2y_1, 0)$  pues estamos intersectando con  $x=0$  entonces  $z_1 = 0$  y  $y_1 = 0$ .

$B_3$ : recordemos que estamos intersectando con  $z=0$  entonces  $\nabla(x_1^2+y_1^2) = (2x_1, 2y_1, 0)$  y por tanto  $x_1 = 0$  y  $y_1 = 0$ .

Así entonces, se tiene que  $\sigma : B \rightarrow X$  es reolución de singularidades. Notemos que a diferencia de en  $A_1$ , el lugar excepcional del Blow up al mirar la carta  $\sigma_3$  esta dado por:

$$\sigma_3^{-1}(0, 0, 0) = V(x_1^2 + y_1^2 + z, z) = V(x_1^2 + y_1^2, z) = V(x_1 + iy_1, z) \cup V(x_1 - iy_1, z).$$

Esto nos indica que existen dos curvas al hacer el Blow up,  $\Gamma_0 := V(x_1 + iy_1, z)$  y

$$\Gamma_1 := V(x_1 - iy_1, z)$$

Finalmente, notemos que  $\Gamma_i^2 = -2$  pues son las curvas excepcionales del punto  $P$ , y así:

$$-2 = (\Gamma_0 + \Gamma_1)^2 = \Gamma_0^2 + \Gamma_1^2 + 2\Gamma_0\Gamma_1 = -4 + 2\Gamma_0\Gamma_1 \rightarrow 2 = 2\Gamma_0\Gamma_1 \rightarrow \Gamma_0\Gamma_1 = 1$$

Esto se interpreta como que  $\Gamma_0$  y  $\Gamma_1$  se intersectan una sola vez, y esto ocurre en el punto  $P$ .

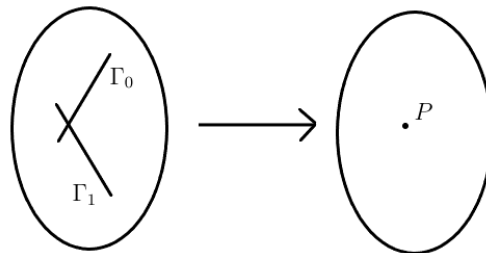


Figura 3.3: El blow up de  $X$  en  $P$

**Ejemplo 3.0.3.**  $D_4$ 

Sea  $X = V(x^2 + y^3 + z^3) \subseteq \mathbb{A}^3$  una variedad, notemos que  $P = (0, 0, 0) \in X$  es una singularidad de  $X$ . El Blow up su puede cubrir por las 3 cartas que hemos visto con anterioridad:

$$\underline{\sigma_1} : x^2 + (xy_1)^3 + (xz_1)^3 = x^2 + x^3y_1^3 + x^3z_1^3$$

como la componente  $x^2$  no nos interesa al estar enfocados en el plano  $(y_1, z_1)$ , entonces nos queda que  $x^3y_1^3 + x^3z_1^3 = 0 \rightarrow x^3(y_1^3 + z_1^3) = 0 \rightarrow y_1^3 = -z_1^3 \rightarrow y_1 = -z_1$

$$\underline{\sigma_2} : (x_1y)^2 + y^3 + (yz_1)^3 = x_1^2y^2 + y^3 + y^3z_1^3 = y^2(x_1^2 + y + yz_1^3) = y^2(x_1^2 + y(1 + z_1^3))$$

como la componente  $y^2$  no nos interesa al estar enfocados en el plano  $(x_1, z_1)$ , entonces nos queda que  $x_1^2 + y(1 + z_1^3) = 0 \rightarrow x_1 = y = 0$  y  $(1 + z_1^3) = 0$ , lo que corresponden a 3 puntos dobles ordinarios.

$$\underline{\sigma_3} : (x_1z)^2 + (y_1z)^3 + z^3 = x_1^2z^2 + y_1^3z^3 + z^3 = z^2(x_1^2 + y_1^3z + z)$$

notemos que el cálculo aquí es analogo al anterior, lo que implica que nos entregará 3 puntos dobles ordinarios. Gracias a esto se puede afirmar que la resolución  $Y \rightarrow X$  se obtiene haciendo Blow up en estos 3 puntos. Se afirma que el Blow up corresponde a cuatro curvas  $\Gamma_0, \Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$  (curvas -2), que interactuan de la siguiente forma:

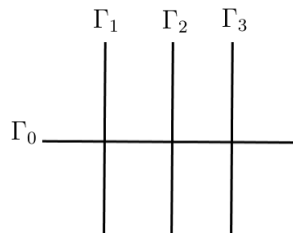


Figura 3.4: El blow up de  $X$  en  $P$

Si miramos su grafo dual, veremos que esta en correspondencia con el siguiente diagrama de Dynkin:

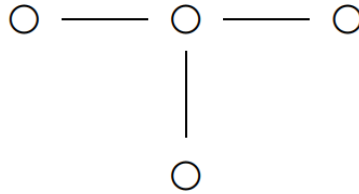


Figura 3.5: Diagrama de Dynkin  $D_4$

Esto se prueba, considerando que  $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$  son curvas  $-2$ , ya que vienen de un Blow up de puntos dobles ordinarios. Así también el hecho de que  $\Gamma_0 \cong \mathbb{P}^1$ , además que  $\Gamma_0$  intersecta a cada  $\Gamma_i$  de forma transversal en un solo punto, como se verifica en la descripción de las coordenadas de  $Y$ . Finalmente para verificar que  $\Gamma_0^2 = -2$  notemos que  $y$  es una función regular en  $Y$  cuyo divisor es  $\text{div}(y) = 2\Gamma_0 + \Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3 + C$ , donde  $C$  corresponde a la curva  $y_1 = 0$  en  $Y$ , la cual también intersecta a la curva  $\Gamma_0$  en un punto, lo cual significa que  $\Gamma_0 C = \Gamma_0 \Gamma_1 = \Gamma_0 \Gamma_2 = \Gamma_0 \Gamma_3 = 1$ , entonces:

$$0 = \text{div}(y)\Gamma_0 = 2\Gamma_0^2 + \Gamma_0(\Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3 + C) = 2\Gamma_0^2 + 4 \longrightarrow \Gamma_0^2 = -2.$$

#### Ejemplo 3.0.4. $E_6$

Sea  $X = V(x^2 + y^3 + z^4) \subseteq \mathbb{A}^3$  una variedad, notemos que  $P = (0, 0, 0) \in X$  es una singularidad de  $X$ . Sea  $\tilde{X} \xrightarrow{\pi} X$  una resolución minimal con  $E = \cup E_i = \pi^{-1}(0)$  el divisor excepcional. Para calcular el número de autointersecciones  $E_i^2$  debemos considerar la función  $\pi^* : \mathbb{C}(X) \longrightarrow \mathbb{C}(\tilde{X})$ . Sea  $f \in m_X \subset \mathcal{O}_X$ , entonces las igualdades  $(f \circ \pi)E_i = 0$  nos entregará el número de autointer-

secciones de  $E_i$ .

**Paso 1:** Sea  $X = V(x^2 + y^3 + z^4) \subset \mathbb{A}^3$ ,  $f = x$ . Consideramos el Blow up de  $\mathbb{A}^3$ :

$$\widetilde{\mathbb{A}}^3 = \{((x, y, z), (u : v : w)) \in \mathbb{A}^3 \times \mathbb{P}^2 \mid xv = yu, xw = zu, yw = zu\}.$$

Primero consideramos la tabla con  $v \neq 0$  (i.e.  $v = 1$ ). Se tiene que

$$\begin{cases} x = yu \\ y = y \\ z = yw \end{cases}$$

Para obtener la ecuación de la transformación estricta de  $\widetilde{X}_1$ , asumimos que  $y \neq 0$  y

$$y^2u^2 + y^3 + y^4w^4 = 0 \quad \text{o} \quad u^2 + y + y^2w^4 = 0.$$

En esta tabla  $\widetilde{X}_1$  es suave: El criterio de Jacobiano implica que:

$$\begin{cases} u = 0 \\ 1 + 2yw^4 = 0 \\ w^3y^2 = 0 \end{cases}$$

Aquí es claro que el sistema no tiene solución. Ahora considerando la tabla  $u = 1$  la transformación estricta de  $\widetilde{X}_1$  vuelve a ser suave.

Finalmente, considerando la tabla  $w = 1$  se tiene que

$$\begin{cases} x = zu \\ y = zv \\ z = z \end{cases}$$

Así, la transformación estricta es

$$z^2u^2 + z^3v^3 + z^4 = 0 \text{ o } u^2 + zv^3 + z^2 = 0.$$

Notemos que el criterio del Jacobiano implica que esta superficie tiene una singularidad en

$u = 0, v = 0, z = 0$ , o visto en coordenadas globales corresponde a  $((0, 0, 0), (0 : 0 : 1))$ . Vemos que este punto, de hecho, aparece solamente en una de las tres tablas afines de  $\widetilde{X}_1$ .

Ahora, necesitamos una ecuación de fibra excepcional. Una fibra excepcional, por definición, corresponde a la intersección  $\widetilde{X}_1 \cap \{((0, 0, 0), (u : v : w))\}$ . Para conseguir su ecuación local en la tabla  $w = 1$  solo necesitamos considerar  $z = 0$  en la ecuación de  $\widetilde{X}_1$ . Es claro que  $z = 0$  implica que  $u = 0$ . De qué se obtiene

$$E_0 = \{((0, 0, 0), (0 : v : 1))\} \cong \mathbb{A}^1.$$

Viendo las otras tablas se muestra que  $E_0 \cong \mathbb{P}^1$ . Finalmente, la función de  $f$  en esta tabla obtiene la forma  $f = zu$ .

**Acuerdo:** Como el número de índices depende exponencialmente del número de Blow ups, denotaremos las coordenadas locales de todas las tablas de todos los Blow ups  $\widetilde{X}_1$  con la tripla  $(x, y, z)$ .

**Paso 2:** Tenemos la siguiente situación:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{superficie} & x^2 + zy^3 + z^2 = 0 \\ \text{función} & f = xz \\ \text{divisor excepcional } E_0 & x = 0, z = 0. \end{array} \right.$$

Volvemos a considerar el Blow up de esta superficie. Es claro que la única tabla de interés es

$$\begin{cases} x = yu \\ y = y \\ z = yv \end{cases}$$

Aquí conseguimos la transformación estricta

$$y^2u^2 + yvy^3 + y^2v^2 = 0, \quad y \neq 0, \quad \text{o} \quad u^2 + y^2v + v^2 = 0.$$

Nuevamente,  $y = 0, u = 0, v = 0$  es la única singularidad del Blow up de la superficie. La fibra excepcional de este Blow up tiene dos componentes irreducibles:  $y = 0$  que implica  $u \pm iv = 0$  (llamaremos a estas componentes  $E'_1, E''_1$ ).

La preimagen de  $E_0$  bajo la transformación estricta nos indica que  $x = 0, z = 0$  lo que implica que  $u = 0, v = 0$ . Con la función  $f = xz$  en esta tabla se obtiene la forma  $f = y^2uv$ .

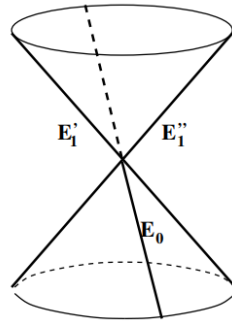
**Paso 3:** Ahora, tenemos la siguiente situación:

$$\begin{cases} \text{superficie} & x^2 + zy^2 + z^2 = 0 \\ \text{función} & f = xy^2z \\ \text{divisor excepcional } E_0 & x = 0, z = 0. \\ \text{divisor excepcional } E_1 & y = 0, x \pm iz = 0. \end{cases}$$

Vamos a considerar el siguiente Blow up

$$\begin{cases} x = yu \\ y = y \\ z = yv \end{cases}$$





La transformación estricta es:  $y^2u^2 + y^2yv + y^2v^2 = 0$ ,  $y \neq 0$  o  $u^2 + yv + v^2 = 0$

Esta es una ecuación del estilo singularidad  $A_1$ . La fibra excepcional nuevamente consiste en dos componentes irreducibles  $E'_2, E''_2$ . Sus ecuaciones locales son  $y = 0$ ,  $u \pm iv = 0$ . La función  $f = uy^4v$ . Es claro que la preimagen de  $E_0$  es  $u_0, v = 0$ .

Ahora, para la preimagen de  $E_1$ , debemos de notar que nuestra superficie yace en el plano afín  $\mathbb{A}^3$  el cual está incrustado en  $\mathbb{A}^3 \times \mathbb{P}^2$  por medio del mapa  $(y, u, v) \mapsto ((yu, y, yv), (u : 1 : v))$ . Pero entonces la condición  $y = 0$  puede implicar que la preimagen de  $E_1$  cae en el plano excepcional  $((0, 0, 0), (u : 1 : v))$  lo que no puede ser, por tanto para ver la preimagen de  $E_1$  se debe de considerar lo siguiente:

$$\begin{cases} x = x \\ y = xu \\ z = xv \end{cases}$$

La transformación estricta sería  $x^2 + x^2u^2xv + x^2v^2 = 0$ ,  $x \neq 0$  o  $1 + xu^2v + v^2 = 0$

La ecuación de la fibra excepcional  $E_2$  en este plano es  $x = 0$ , lo que implica que  $v = \pm i$ . La

preimagen de  $E_1$

$$\begin{cases} x \pm iz = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

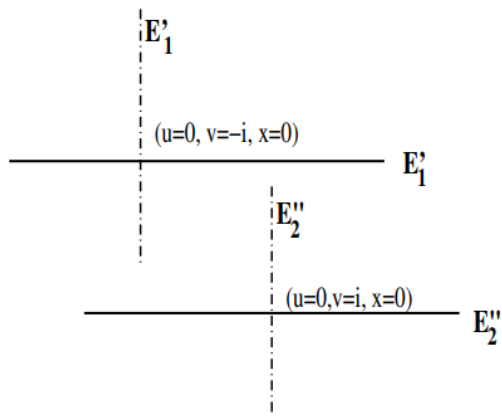
esta dada por

$$\begin{cases} x \pm ixv = 0 \\ xu = 0, x \neq 0 \end{cases}$$

Y por esto

$$\begin{cases} v = \pm i \\ u = 0 \\ x \text{ arbitrario} \end{cases}$$

En la siguiente imagen se puede ver lo que ocurre, donde claramente se puede que todas las intersecciones son transversales



**Paso 4:** Tenemos la siguiente situación, con dos planos coordenados:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{superficie} & x^2 + zy + z^2 = 0 \\ \text{función} & f = xy^4z \\ \text{divisor excepcional } E_0 & x = 0, z = 0. \\ \text{divisor excepcional } E_2 & y = 0, x \pm iz = 0. \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{ll} \text{superficie} & 1 + xy^2z + z^2 = 0 \\ \text{función} & f = x^4y^2z \\ \text{divisor excepcional } E_1 & y = 0, z = \pm i. \\ \text{divisor excepcional } E_2 & x = 0, z = \pm i. \end{array} \right.$$

Nuestro siguiente paso es hacer Blow up en el punto  $P = (0, 0, 0)$  en el primer plano coordenado.

Nuevamente, para obtener las ecuaciones de  $E_0, E_2$  tenemos que considerar 2 tablas coordenadas:

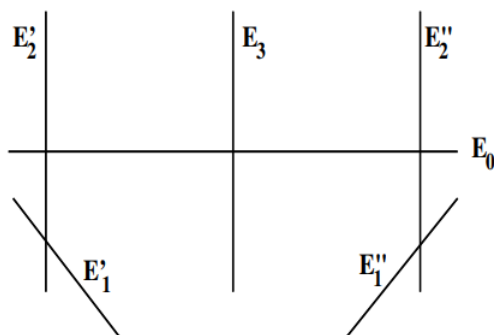
$$\left\{ \begin{array}{l} x = yu \\ y = y \\ z = yw \end{array} \right.$$

La transformación estricta corresponde a un cilindro  $u^2 + v + v^2 = 0$ . La preimagen de  $E_0$  esta dada por las ecuaciones  $u = 0, v = 0$ , la fibra excepcional  $E_3$  esta dada por  $u^2 + v + v^2 = 0, y = 0$ , nuestra función  $f = uy^6v$ . En la otra tabla de coordenadas tenemos

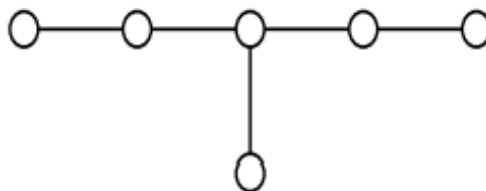
$$\left\{ \begin{array}{l} x = x \\ y = xu \\ z = xv \end{array} \right.$$

La transformación estricta esta dada por  $x^2 + x^2uv + x^2v^2 = 0, x \neq 0$  o  $1 + uv + v^2 = 0$ .

La fibra excepcional  $E_3$  esta dada por  $1 + uv + v^2 = 0, x = 0$ , las preimagenes de  $E'_2, E''_2$  vienen dadas por  $u = 0, v = \pm i, f = x^6u^4v$ . Por esto, nuestra fibra excepcional  $E$  está dada por la siguiente configuración de líneas proyectivas:



y notemos que su grafo dual estaría en correspondencia con el dragrama de Dynkin



**Paso 5:** Tomaremos en consideración estas 3 tablas de coordenadas de la resolución minimal

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{X} : x^2 + z + z^2 = 0 \\ f : xy^4z \\ E_0 : x = 0, z = 0. \\ E_3 : y = 0, x^2 + yz + z^2 = 0. \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \tilde{X} : 1 + yz + z^2 = 0 \\ f : x^6y^4z \\ E_3 : x = 0, x^2 + yz + z^2 = 0 \\ E_2 : y = 0, z = \pm i. \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \tilde{X} : 1 + xy^2z + z^2 = 0 \\ f : x^6y^2z \\ E_1 : y = 0, z = \pm i. \\ E_2 : x = 0, z = \pm i. \end{array} \right.$$

Ahora Calcularemos el divisor  $(f)$ .

Sea  $X \subset \mathbb{A}^3$  una superficie normal,  $Y \subset X$  es una curva cerrada,  $f \in \mathbb{C}(X)$  una función racional.

Suponemos que  $I_p \subset \mathbb{C}(X)$  es el ideal primo correspondiente a  $Y$ . Entonces  $\mathbb{C}[X]_{I_p}$  es un anillo

de valores discretos y  $\text{mult}_Y(f) = \text{val}_{\mathbb{C}[X]_{I_p}}(f)$ .

1) Consideremos la primera tabla. sea  $f = xy^6z$ .  $x = 0$  implica que  $z = 0$  o que  $z = -1$ .

$x = 0$ ,  $z = 0$  es una ecuación de  $E_0$ ,  $x = 0$ ,  $z = -1$  es la transformación estricta  $C$  de la curva  $x = 0$  en  $V(x^2 + y^3 + z^4) \subset \mathbb{A}^3$ .

Notemos que el generador del ideal maximal del anillo  $(\mathbb{C}[x, y, z]/(x^2 + z + z^2))_{I_p}$  es  $\bar{x}$  y  $\bar{x}^2 \sim \bar{z}$ .

Por tanto  $\text{mult}_{E_0}(f) = 3$ .  $y = 0$  nos da la ecuación de  $E_3$ , es sencillo de ver que  $\text{mult}_{E_3}(f) = 6$ .

Notemos además que la curva  $C$  tiene una intersección transversal con  $E_3$  en el punto  $(0, 0, -1)$ .

2) Consideremos ahora la segunda tabla. aquí se mantiene que  $f = x^6y^4z = 0$ .  $z = 0$  es imposible,  $x = 0$  nos separa la ecuación de  $E_3$  y  $y = 0$  en las ecuaciones de  $E'_2, E''_2$ . El mismo cálculo del punto anterior nos dice que  $\text{mult}_{E_3}(f) = 6$  y  $\text{mult}_{E'_2}(f) = \text{mult}_{E''_2}(f) = 4$ .

3) De la misma forma se obtiene que  $\text{mult}_{E'_1}(f) = \text{mult}_{E''_1}(f) = 2$ . Por tanto se tiene lo siguiente

$$(f) = 6E_3 + 4(E'_2 + E''_2) + 2(E'_1 + E''_1) + 3E_0 + C.$$

Tenemos  $C \cdot E_3 = 1$ , todos los otros números de intersecciones de  $C$  con componentes irreducibles  $E$  son cero. El número de intersecciones de componentes irreducibles esta graficado en el diagrama de Dynkin de más arriba. Ahora, todo este trabajo se hizo con la finalidad de calcular las autointersecciones.

$$(f) \cdot E_0 = 6 + 3E_0^2 = 0 \longrightarrow E_0^2 = -2$$

Se concluye de la misma forma que los otros números de autointersecciones son  $-2$ .

# Bibliografía

- [1] Miles Ried, *Chapters on Algebraic Surfaces*, **arXiv**
- [2] János Kollár, Shigefumi Mori *Birational Geometry of Algebraic Varieties*, **Cambridge University Press**, 1998.
- [3] Igor Burban *Du Val Singularities*
- [4] Umberto Martínez Peñas, *Una introducción a la Teoría de las Sicigias* Tesis de Grado, Departamento de Matemáticas, Universidad de Valladolid, España, 2013.
- [5] V. I. Arnold, S. M. Gusein-Zade, A. N. Varchenko *Singularities of Differentiable Maps I-II*. Birkhäuser, 1985.
- [6] Tohsuke Urabe, *Dynkin Graphs and Quadrilateral Singularities*, **Springer**, 1993.
- [7] Arnaud Beauville, *Complex algebraic surfaces* Vol. 34 de *London Mathematical Society Student Text*, **Cambridge University Press**, Segunda Edición , 1996.