

Variedades Grassmanianas y Cálculo de Schubert

Curvas Algebraicas (MAT-426)

Emilio Oyanedel, Felipe Labra, Gustavo Arcaya

CURVAS ALGEBRAICAS (MAT-426)
UNIVERSIDAD TÉCNICA FEDERICO SANTA MARÍA

Estas notas corresponden a la recopilación de resultados relativos a Variedades Grassmanianas y su teoría de intersección, denominada cálculo de Schubert. Esperamos dar contexto histórico y matemático a estos resultados, con un espíritu divulgativo y buscando dejar una motivación a futuros trabajos e investigaciones.

Fecha de escritura, Noviembre 2020

Índice general

| | | |
|----------|---|-----------|
| 1 | Introducción y Preliminares | 5 |
| 1.1 | Motivación | 5 |
| 1.2 | Preliminares | 6 |
| 2 | Variedades Grassmannianas | 9 |
| 2.1 | Grassmanniana de un espacio vectorial | 9 |
| 2.2 | Observaciones topológicas sobre una Grassmanniana | 10 |
| 2.3 | Referencias del capítulo | 12 |
| 3 | Teoría de Intersecciones | 13 |
| 3.1 | Condición de Schubert | 13 |
| 3.2 | El anillo de Cohomología de $\mathbb{G}(d, n)$ | 15 |
| 3.3 | El Cálculo de Schubert | 17 |
| 3.4 | Conclusiones y Ejemplos | 20 |
| 3.5 | Referencias del capítulo | 22 |



1. Introducción y Preliminares

1.1 Motivación

Consideremos para $n \in \mathbb{N}$, el \mathbb{R} -espacio vectorial $V \cong \mathbb{R}^n$ dado un sistema de ecuaciones, cada cual describiendo una recta vectorial, podemos pensar la solución de este (en caso de existir) como la intersección de las rectas descritas por las ecuaciones del sistema. Este análisis puede llevarse al contexto de sistemas de ecuaciones no lineales, describiendo curvas en V y más aún, nos interesa estudiar esto en el caso de variedades algebraicas sobre un cuerpo general k .

Este trabajo está, en particular, dedicado al desarrollo inicial del cálculo de la teoría de intersecciones sobre variedades Grassmanianas, denominada cálculo de Schubert. Con este objetivo en mente, presentamos en los capítulos de este documento los siguientes contenidos, en el capítulo I abordamos resultados de álgebra lineal y multilineal así como de topología que serán útiles para el desarrollo y conclusión de resultados importantes más adelante.

En el capítulo II se discutirán la definición, construcciones y resultados sobre las variedades Grassmannianas como variedades proyectivas.

Concluimos este documento con el capítulo III dedicado a la discusión en cohomología que da lugar a la teoría de intersección denominada calculo de Schubert.

1.2 Preliminares

En esta sección se recopilan definiciones y resultados que son utilizados de forma recurrente en este texto. Además de estas, se utilizarán diversos resultados de álgebra lineal y topología. Se detallan referencias útiles tanto para estos tópicos como para lo que se aborda en este apunte en las referencias del capítulo que se encuentran al final del mismo.

Definición 1.2.1 — Aplicación Alternante. Sean V, W dos k -espacios vectoriales y sea $n \in \mathbb{N}$. Una aplicación n -multilineal $f : V^n \rightarrow W$ es llamada **alternante** si $f(v_1, \dots, v_n) = 0$ para todos $v_1, \dots, v_k \in V$ tales que $v_i = v_j$ para algún $i \neq j$

Observación. Considerando $v_i + v_j$ en las i -ésima y j -ésima entradas de f , obtenemos que para una permutación σ de los índices $i \in \{1, \dots, n\}$

$$f(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(n)}) = \text{sign}(\sigma) \cdot f(v_1, \dots, v_n).$$

Definición 1.2.2 — Álgebra Tensorial. Sean V, W dos k -espacios vectoriales. El *producto tensorial* de V y W es un par $(V \otimes W, T)$, donde $V \otimes W$ es un k -espacio vectorial y $T : V \times W \rightarrow V \otimes W$ es una aplicación bilineal, tal que para toda aplicación bilineal $\varphi : V \times W \rightarrow P$, existe una aplicación lineal $\psi : V \otimes W \rightarrow P$ tal que $\varphi = \psi \circ T$. El *álgebra tensorial* (TV, \otimes) es la suma directa

$$TV := \bigoplus_{d \geq 0} V^{\otimes d}$$

donde $V^{\otimes 0} := k$, $V^{\otimes 1} = V$ y $V^{\otimes d+1} = V^{\otimes d} \times V$ y el producto \otimes definido para $v \in V^{\otimes i}$, $w \in V^{\otimes j}$, $v \otimes w \in V^{\otimes i+j}$ es la imagen universal de (v, w) en $V^{\otimes i+j}$, que se extiende por su bilinealidad a todo TV .

Definición 1.2.3 — Álgebra exterior. Sea V un k -espacio vectorial. El *álgebra exterior* de V es la k -álgebra cociente

$$\bigwedge V = TV/I$$

donde I es el ideal $\{v \otimes v : v \in V\}$. Si denotamos $\pi : TV \rightarrow \bigwedge V$ la proyección canónica, entonces definimos el *producto exterior* como $v \wedge w := \pi(v \otimes w)$. Finalmente, denotamos la d -ésima potencia exterior de V como

$$\bigwedge^d V := \pi(V^{\otimes d})$$

y de esta forma tenemos que

$$\bigwedge V = \bigoplus_{d \geq 0} \bigwedge^d V$$

donde $\wedge^0 V = k$ y $\wedge^1 V = V$.

Observación. El producto exterior (o producto cuña) es una forma multilineal alternante.

Definición 1.2.4 — Menores. Sea A una matriz de tamaño $m \times n$, y sea $k \in \mathbb{N}$ con $k \leq \min\{m, n\}$. Denominamos *menor de orden $k \times k$* al determinante de una matriz de tamaño $k \times k$ obtenida mediante la eliminación de $m - k$ filas y $n - k$ columnas desde A

Observación. Considerando la forma de obtener k filas de entre m en total, y luego k columnas de entre n en total, se tiene que la cantidad de menores de tamaño $k \times k$ es $\binom{m}{k} \binom{n}{k}$

Definición 1.2.5 — \cup -producto. Sea X un espacio topológico y A, B grupos abelianos. Sean $\phi \in C^k(X; A)$ y $\psi \in C^l(X; B)$, luego ϕ es una función del conjunto de k -símplex desde X a A y ψ es una función del conjunto de l -símplex desde X a B . Si $\sigma : \Delta^{k+l} \rightarrow X$ es un $(k+l)$ -símplex en X , sus restricciones $\sigma|_{[v_0, \dots, v_k]}$ y $\sigma|_{[v_k, \dots, v_{k+l}]}$ son respectivamente k y l símplex en X . Esto nos permite definir la aplicación $\phi \smile \psi \in C^{k+l}(X; A \otimes B)$ en términos de ϕ y ψ :

$$(\phi \smile \psi)(\sigma) = \phi(\sigma|_{[v_0, \dots, v_k]}) \otimes \psi(\sigma|_{[v_k, \dots, v_{k+l}]})$$

Y por la propiedad universal del producto tensorial, definimos una única aplicación \cup -producto:

$$\smile : C^k(X; A) \otimes C^l(X; B) \rightarrow C^{k+l}(X; A \otimes B)$$



2. Variedades Grassmannianas

2.1 Grassmanniana de un espacio vectorial

Iniciamos esta sección presentando la *variedad Grassmaniana* y como esta puede verse como una generalización de la variedad algebraica dada por la proyectivización de un espacio vectorial V .

Definición 2.1.1 Para un k -espacio vectorial V , definimos su *proyectivización* $\mathbb{P}(V)$ como el conjunto de rectas en V , es decir $\mathbb{P}(V) = V / \sim$. Para la relación de equivalencia \sim dada por ser colineales, es decir, $x, y \in V$ satisfacen $x \sim y$ si existe $\lambda \in k^*$ tal que $x = \lambda y$

Definición 2.1.2 Sea V un k -espacio vectorial y $d \in \mathbb{N}$. Definimos la *Grassmaniana* $Gr(d, V)$ como el conjunto de todos los subespacios vectoriales de V de dimensión d , es decir

$$Gr(d, V) := \{W \subseteq V : W \text{ subespacio vectorial y } \dim_k(W) = d\}$$

Escribimos además $Gr(d, n) := Gr(d, k^n)$, la Grassmanniana del espacio vectorial k^n .

Observaciones.

1. Para $d = 1$ tenemos que $Gr(1, V) = \mathbb{P}(V)$. Más aún $Gr(1, n+1) = \mathbb{P}^n$. Esto nos permite confirmar la intuición de que la variedad Grassmaniana puede verse como una generalización del espacio proyectivo.
2. Si $V = k^{n+1}$, sabemos que los subespacios lineales de \mathbb{P}^n están dados por $\mathbb{P}(W) \subseteq \mathbb{P}^n$, donde $W \subseteq V$ es un subespacio vectorial. De esta forma, denotamos

$$\mathbb{G}(d, n) = \{W \subseteq \mathbb{P}^n : W \text{ es un } d\text{-plano}\}$$

Con esta notación, $\mathbb{G}(0, n) = \mathbb{P}^n$.

Proposición 2.1.1 Para $n, m \in \mathbb{N}$ tales que $n \leq m$. Sean $v_1, \dots, v_n \in k^m$. Entonces $v_1 \wedge \dots \wedge v_n = 0$ si y solo si, el conjunto de vectores $\{v_1, \dots, v_n\}$ es linealmente dependiente.

Proposición 2.1.2 Sean $v_1, \dots, v_n \in k^m$ y $w_1, \dots, w_n \in k^m$ linealmente independientes. Entonces, los productos tensoriales alternantes de ambos conjuntos $v_1 \wedge \dots \wedge v_n$ y $w_1 \wedge \dots \wedge w_n$ son linealmente dependientes, como elementos de $\wedge^n k^m$ si y solo si, los espacios generados por los elementos iniciales coinciden, es decir, $\text{Vect}_k(v_1, \dots, v_n) = \text{Vect}_k(w_1, \dots, w_n)$.

Teorema 2.1.3 Sea $0 \leq n \leq m$, y consideremos la aplicación $Pl : G(n, m) \rightarrow \mathbb{P}^{\binom{m}{n}-1}(k)$ que mapea subespacios lineales $\text{Vect}_k(v_1, \dots, v_n) \in Gr(n, m)$ en la clase del tensor alternante de la forma $v_1 \wedge \dots \wedge v_n \in \wedge^n k^m \cong k^{\binom{m}{n}}$, es decir, $[v_1 \wedge \dots \wedge v_n]$ en $\mathbb{P}^{\binom{m}{n}-1}(k)$.

Observación. La aplicación anterior corresponde a una incrustación, esta se denomina **incrustación de Plücker** de $Gr(n, m)$. Para un subespacio n -dimensional, $L \in Gr(n, m)$ las coordenadas homogéneas de $Pl(L) \in \mathbb{P}^{\binom{m}{n}-1}$ se llaman **coordenadas de Plucker** de L .

Corolario 2.1.4 La Grassmanniana $Gr(d, V)$ admite un atlas algebraico, dotándolo de estructura de variedad algebraica proyectiva.

Demostración. Como $Gr(m, m)$ corresponde a un único punto (que corresponde a una variedad), podemos asumir que $n < m$. Luego, por la construcción anterior un elemento $\omega \in \mathbb{P}^{\binom{m}{n}-1}$ tiene preimagen vía **Plucker** no vacía, que corresponde a un tensor de la forma $v_1 \wedge \dots \wedge v_n$. Ahora bien, esto se tiene si y solo si el mapeo $f : k^n \rightarrow \wedge^{m+1} k^n$, dado por $v \mapsto v \wedge \omega$ tiene rango $m - n$. Podemos ver que este mapeo siempre tiene rango a lo menos $m - n$, verificando que todos los $(m - n + 1) \times (m - n + 1)$ menores (como se definen en 1.2.4) de la matriz correspondiente a f son nulos. Estos nos dice que la condición para ω de estar en $Gr(m, n)$ es cerrada, por lo que se concluye el resultado. □

Ejemplo: Utilizaremos la demostración de 2.1.4 para ver que la Grassmanniana $Gr(2, 4)$ es dada por la condición de anulación de los dieciséis 3×3 -menores de una matriz de tamaño 4×4 correspondientes a la aplicación lineal $k^4 \rightarrow \wedge^3 k^4$. Es decir, $Gr(2, 4)$ corresponde a un subconjunto de \mathbb{P}^5 dado por 16 ecuaciones cúbicas.

2.2 Observaciones topológicas sobre una Grassmanniana

En la siguiente sección presentaremos características topológicas de la Grassmanniana, como su irreductibilidad y estudiaremos propiedades dadas por su complemento ortogonal.

Sea $U_0 \subset G(n, m) \subset \mathbb{P}^{\binom{m}{n}-1}$ el abierto afín dado por el lugar donde la coordenada $e_1 \wedge \dots \wedge e_n$ es no-nula. Entonces por 2.1.1 un subespacio vectorial $L \in Gr(n, m)$ esta contenido en U_0 si y solo si corresponde al espacio generado por las filas de una matriz de tamaño $m \times n$ de

la forma $(A|B)$ para una matriz A de tamaño $m \times m$ invertible y B de tamaño $m \times (m - n)$ cualquiera. Notar que al multiplicar por izquierda por A^{-1} , obtenemos que U_0 es la imagen de la aplicación

$$f : \mathbb{A}^{m(m-n)} \cong k^{m \times (m-n)} \rightarrow U_0$$

$$A^{-1}B =: C \mapsto \text{Generado por las filas de } (E_m|C)$$

No es difícil notar que cambiando la matriz C , se obtiene espacio diferente desde las filas de $(E_m|C)$, de lo que se puede concluir la biyectividad de f . Más aún, como los menores maximales de $(E_m|C)$ son funciones polinomiales en las entradas de C , vemos que f es en efecto un morfismo. Recíprocamente, la entrada (i, j) de C puede obtenerse desde $f(C)$, salvo cambio de signo del menor maximal de $(E_m|C)$, donde tomamos todas las columnas de E_m salvo la i -ésima, junto con la j -ésima columna de C . Así, f^{-1} es también un morfismo, lo que confirma nuestra afirmación.

Esto nos permite formular la siguiente proposición.

Teorema 2.2.1 Sea $U_0 \subseteq G(n, m) \subset \mathbb{P}^{\binom{m}{n}-1}$ el abierto afín dado por el lugar donde la coordenada $e_1 \wedge \dots \wedge e_k$ es no-nula. Entonces

1. $U_0 \cong \mathbb{A}^{m(m-n)}$ es una variedad afín. Más aún, por lo discutido anteriormente, es precisamente el espacio afín.
2. La Grassmanniana $Gr(n, m)$ puede cubrirse por los espacios afines de la forma dada en 1.

Del segundo punto del resultado anterior, concluimos el siguiente corolario respecto a la reductibilidad de la Grassmanniana.

Corolario 2.2.2 $G(n, m)$ es una variedad irreducible de dimensión $m(m - n)$

Observación. La construcción detallada al principio de esta sección nos permite describir la Grassmanniana como el espacio de las matrices de tamaño $m \times n$ de rango máximo (módulo operaciones fila). Luego, como cada matriz de la forma anterior es equivalente a una matriz escalonada, podemos pensar la Grassmanniana $Gr(n, m)$ como las matrices escalonadas de rango maximal.

La última observación, junto con la construcción al inicio nos permiten formular el siguiente isomorfismo.

Teorema 2.2.3 Para cada $0 \leq n \leq m$ se tiene el isomorfismo $Gr(n, m) \cong Gr(m - n, m)$

Demostración. Consideremos la biyección entre conjuntos $f : Gr(n, m) \rightarrow Gr(m - n, m)$, que envía un subespacio vectorial n -dimensional $L \subset k^m$ en su complemento ortogonal

$$L^\perp := \{x \in k^m \mid \langle x, y \rangle = 0, \forall y \in L\}$$

Donde, $\langle x, y \rangle$ es de forma estándar dada la forma bilineal dada por el producto punto de k^m . Probaremos ahora que f es en efecto un morfismo. Para esto, veremos qué se tiene para las coordenadas afines de la construcción inicial. Sea $L \in Gr(n, m)$ el espacio generado

por las filas de la matriz $(E_m|C)$, con las entradas de la matriz $C \in k^{m \times (m-n)^m}$ siendo las coordenadas afines de L . Computando la igualdad,

$$(E_m|C) \begin{pmatrix} -C \\ E_{m-n} \end{pmatrix} = 0, \text{ podemos ver que } L^\perp \text{ es el generado por las filas de la matriz } (-C^\perp|E_{m-n})$$

Concluimos notando que los menores maximales, es decir, las coordenadas de Plucker de L^\perp corresponden a polinomios en las entradas de la matriz C , de lo que sigue que f es un morfismo, y dada la biyección del comienzo de la prueba, se tiene el isomorfismo buscado. \square

Observación. Tenemos que $\mathbb{G}(d, n) \cong Gr(d+1, n+1)$, ya que cada d -plano en \mathbb{P}^n está dado por $\mathbb{P}(W)$, donde $k^{d+1} \cong W \subseteq k^{n+1}$. De esta forma, tenemos que $\dim(\mathbb{G}(d, n)) = (d+1)(n-d)$.

2.3 Referencias del capítulo

- Phillip A. Griffiths & J. Harris, "Principles of algebraic geometry"
- Gathmann. Andreas, Notas de clases "[Algebraic Geometry](#)"



3. Teoría de Intersecciones

Comenzamos este capítulo, presentando los conceptos sobre Grassmannianas necesarios para enfocarnos posteriormente a nuestro objetivo final: la teoría de intersecciones en $Gr(n, m)$.

3.1 Condición de Schubert

Buscaremos una condición necesaria y suficiente para que un d -plano en \mathbb{P}^n (es decir $\mathbb{G}(d, n)$) tenga intersección no vacía con una sucesión de subespacios vectoriales en \mathbb{P}^n .

Definición 3.1.1 — Condición de Schubert. Sea $A_0 \subsetneq A_1 \subsetneq \dots \subsetneq A_d$ una sucesión creciente de $(d + 1)$ subespacios vectoriales en \mathbb{P}^n (también llamada Bandera),

- Decimos que un d -plano $L \subset \mathbb{P}^n$ satisface la **condición de Schubert** definida por esta bandera si $\dim(A_i \cap L) \geq i$, para cada $i = 1, \dots, d$.
- El conjunto de todos aquellos d -planos L corresponde a un subconjunto de $\mathbb{G}(d, n)$ al que denotamos por $\Omega(A_0 \cdots A_d)$

Ejemplo. Si fijamos una línea A_0 en \mathbb{P}^3 y tomamos $A_1 = \mathbb{P}^3$. Entonces, el subconjunto $\Omega(A_0 A_1)$ de $\mathbb{G}(1, 3)$ representa el conjunto de líneas $L \subset \mathbb{P}^3$ que satisfacen $\dim(L \cap A_0) \geq 0$ y $\dim(L \cap A_1) \geq 1$. Ahora bien, la última condición se verifica claramente, lo que nos permite afirmar que $\Omega(A_0 A_1)$ representa el conjunto de líneas L que intersectan A_0 .

En adelante, escribimos las coordenadas de Plucker $[v_{j_0} \wedge \dots \wedge v_{j_d}]$ en el proyectivo como $p(j_0 \dots j_d)$.

Escribimos los siguientes resultados para concluir la sección.

Proposición 3.1.1 Sea $0 \leq a_0 < \dots < a_d \leq n$ una sucesión de enteros y para $i = 1, \dots, d$ sean A_i los subespacios vectoriales a_i -dimensionales en \mathbb{P}^n cuyos elementos son de la forma

$[p(0), \dots, p(a_i), 0, \dots, 0]$. Entonces, $\Omega(A_0 \cdots A_d)$ consiste precisamente de los puntos de la forma $(\cdots, p(j_0 \cdots j_d), \cdots)$ en $\mathbb{G}(d, n)$ satisfaciendo $p(j_0 \cdots j_d) = 0$ siempre que $j_i > a_i$ para algún i .

Demostración. Consideremos un d -plano $L \subseteq \mathbb{P}^n$ que satisface la condición de Schubert $\dim(A_i \cap L) \geq i$ para $i = 0, \dots, d$. Si tomamos un punto $P_i = [p_i(0), \dots, p_i(n)] \in A_i \cap L$ tal que P_0, \dots, P_i son linealmente independientes. Entonces, P_0, \dots, P_d forma una base de L . Luego, podemos representar L como un punto en $\mathbb{G}(d, n)$ mediante la incrustación de Plucker como $p(j_0 \cdots j_d) = [P_{j_0} \wedge \cdots \wedge P_{j_d}]$. Si $j_\lambda > a_\lambda$ para cierto λ , como $P_i \in A_i$, tenemos que $p_i(j) = 0$ para $j = (a_i + 1), \dots, n$ y por tanto la matriz $(p_i(j_\beta))$ toma la forma

$$(p_i(j_\beta)) = \begin{pmatrix} * & 0 \\ * & * \end{pmatrix}$$

donde el bloque nulo es de tamaño $\lambda \times (d - \lambda + 1)$. Así, por la expansión del determinante sobre las $d - \lambda + 1$ se tiene que el menor formado por $(p_i(j_\beta))_{i, \beta \leq d}$ es cero, luego P_{j_0}, \dots, P_{j_d} son linealmente dependientes, por tanto $p(j_0 \cdots j_d) = [P_{j_0} \wedge \cdots \wedge P_{j_d}] = 0$.

Recíprocamente, si consideramos un punto $(\cdots, p(j_0 \cdots j_d), \cdots)$ en $\mathbb{G}(d, n)$ satisfaciendo $p(j_0 \cdots j_d) = 0$ cada vez que $j_i > a_i$ para algún i , escogemos una coordenada no nula $p(k_0 \cdots k_d)$ tal que maximiza la suma $\sum_{c=0}^d k_c$. Reemplazando cada $p(j_0 \cdots j_d)$ por $p(j_0 \cdots j_d) / p(k_0 \cdots k_d)$ podemos asumir que $p(k_0 \cdots k_d) = 1$. Ahora, sabemos que $(\cdots, p(j_0 \cdots j_d), \cdots)$ representa el d -plano L generado por los puntos $P_i = [p_i(0), \dots, p_i(n)]$, con $p_i(j) = p(\cdots k_{i-1} j k_{i+1} \cdots)$ para $j = 0, \dots, n$ y para $i = 0, \dots, d$. Fijando $j > a_i$, debemos mostrar que $p_i(j) = 0$. Como $p(k_0 \cdots k_d) \neq 0$, tenemos que $k \leq a_i$ y por tanto $k_j < j$. De esta forma, la suma $\sum_{c=0}^d k_c$ es estrictamente menor que $j + \sum_{c \neq i} k_c$, luego $p_i(j) = p(\cdots k_{i-1} j k_{i+1} \cdots) = 0$ por la maximalidad de $\sum_{c=0}^d k_c$. Entonces, tenemos que $P_i \in A_i$ y luego $P_0, \dots, P_i \in A_i \cap L$ son $(i + 1)$ puntos linealmente independientes. Así, L satisface la condición de Schubert $\dim(A_i \cap L) \geq i$ para $i = 0, \dots, d$. Es decir, $(\cdots, p(j_0 \cdots j_d), \cdots)$ está en $\Omega(A_0 \cdots A_d)$. □

Proposición 3.1.2 Sean $A_0 \subsetneq \dots \subsetneq A_d$ y $B_0 \subsetneq \dots \subsetneq B_d$ dos sucesiones estrictamente crecientes (respecto a la inclusión) de espacios vectoriales en \mathbb{P}^n tales que $\dim(A_i) = \dim(B_i)$ para $i = 0, \dots, d$. Entonces, existe un automorfismo lineal de \mathbb{P}^n que deja invariante $\mathbb{G}(d, n)$ y que mapea $\Omega(B_0 \cdots B_d)$ en $\Omega(A_0 \cdots A_d)$

Demostración. Como tenemos $\dim(A_i) = \dim(B_i)$ para cada i , existe una matriz invertible $(n + 1) \times (n + 1)$ $(a_{ij}) \in GL_{n+1}(k)$ tal que la transformación lineal T en \mathbb{P}^n en sí mismo definida por la fórmula

$$T([p(0), \dots, p(n)]) = \left[\sum_{i=0}^n p(i) a_{i0}, \dots, \sum_{i=0}^n p(i) a_{in} \right]$$

cumple que $T(B_i) = A_i$ para todo $i = 0, \dots, d$. Además, T la imagen de un d -plano $L \subseteq \mathbb{P}^n$ es otro d -plano $T(L) \subseteq \mathbb{P}^n$ y si L satisface la condición de Schubert $\dim(B_i \cap L) \geq i$ para

todo i , entonces $T(L)$ satisface la condición de Schubert $\dim(A_i \cap T(L)) \geq i$ para todo i porque $T(B_i) = A_i$.

Sean $(d+1)$ puntos $P_i = [p_i(0), \dots, p_i(n)]$ para $i = 0, \dots, d$ tales que generen L . Entonces, los $(d+1)$ puntos $T(P_i)$ generan $T(L)$. Ahora, $T(P_i)$ es de la forma $[q_i(0), \dots, q_i(n)]$ con

$$q_i(j) = \sum_{c=0}^n a_{cj} p(c), \quad \forall j = 0, \dots, n.$$

Se sigue de un cálculo directo que las coordenadas de Plücker $q(j_0 \cdots j_d) = \det(q_i(j_\beta))$ en $T(L)$ son una combinación lineal de las coordenadas de Plücker $p(j_0 \cdots j_d) = \det(p_i(j_\beta))$ en L .

En otras palabras, existe una transformación lineal $\Lambda[a_{ij}]$ de \mathbb{P}^n en si mismo que lleva $\mathbb{G}(d, n)$ es si mismo y $\Omega(B_0 \cdots B_d)$ en $\Omega(A_0 \cdots A_d)$. Como (a_{ij}) es no singular, es evidente que $\Lambda[a_{ij}]$ es invertible y su inversa es $\Lambda([a_{ij}]^{-1})$. □

Corolario 3.1.3 Sea $B_0 \subsetneq \dots \subsetneq B_d$ una sucesión estrictamente creciente (respecto a la inclusión) de espacios vectoriales en \mathbb{P}^n . Entonces, $\Omega(B_0 \cdots B_d)$ consiste de los elementos en $\mathbb{G}(d, n)$ para los que las coordenadas $q(j_0 \cdots j_d)$ satisfacen ciertas ecuaciones lineales, es decir, $\Omega(B_0 \cdots B_d)$ es la intersección de $\mathbb{G}(d, n)$ con un cierto subespacio vectorial en \mathbb{P}^N . Mas aun, el espacio vectorial corresponde a un hiperplano si y solo si se tiene que $\dim(B_0) = (n - d - 1)$ y $\dim(B_i) = (n - d + i)$ para $i = 1, \dots, d$.

Demostración. Para $i = 0, \dots, d$ sea $a_i = \dim(B_i)$ y sea A_i el subespacio vectorial a_i -dimensional en \mathbb{P}^n cuyos puntos son de la forma $(p(0), \dots, p(a_i), 0, \dots, 0)$. Por 3.1.2, existe un endomorfismo lineal S de \mathbb{P}^N , tal que un punto P de $\mathbb{G}(d, n)$ se encuentra en $\Omega(B_0 \cdots B_d)$ si y solo si $S(P)$ se encuentra en $\Omega(A_0 \cdots A_d)$. Ahora bien, por 3.1.1 sabemos que $S(P)$ se encuentra en $\Omega(A_0 \cdots A_d)$ si y solo si cada coordenada $q(j_0 \cdots j_d)$ es nula siempre que $j_i > a_i$ se tenga para algún i .

Como cada $q(j_0 \cdots j_d)$ es una combinación lineal dada de coordenadas $p(j_0 \cdots j_d)$ de P , concluimos que P se encuentra en $\Omega(B_0 \cdots B_d)$ si y solo si las coordenadas $q(j_0 \cdots j_d)$ satisfacen ciertas ecuaciones lineales. Mas aun, el numero de ecuaciones linealmente independientes es el numero de sucesiones $j_0 \cdots j_d$ tales que $j_i > a_i$ se tiene para algún $i = 1, \dots, d$. Pero esto ultimo claramente solo se satisface para una sucesión si y solo si tenemos $a_0 = (n - d - 1)$ y $a_i = (n - d + i)$ para $i = 1, \dots, d$. Lo que prueba el corolario. □

3.2 El anillo de Cohomología de $\mathbb{G}(d, n)$

Definición 3.2.1 — Variedad Bandera. Una **Bandera** F_\bullet en un espacio vectorial de dimensión finita V sobre un cuerpo k , es una sucesión estrictamente creciente (respecto a

la inclusión de subespacio) de subespacios vectoriales:

$$F_{\bullet} : \{0\} = V_0 \subsetneq V_1 \subsetneq V_2 \subsetneq \dots \subsetneq V_n = V$$

Si definimos $d_i = \dim V_i$, entonces, las dimensiones se ordenan en una sucesión estrictamente creciente.

$$0 = d_0 < d_1 < d_2 < \dots < d_k = m$$

Donde $m = \dim V$.

Una bandera es llamada **completa** si $d_i = i$ para cada i , en caso contrario es llamada **bandera parcial**.

Observación. Para una *bandera* se tiene que $n \leq m$, por otro lado, una *bandera parcial* siempre puede obtenerse de una *bandera completa* quitando determinados subespacios. Recíprocamente, agregando los espacios adecuados, una *bandera parcial* siempre puede extenderse a una *bandera completa*.

Fijando una bandera

$$F_{\bullet} : \{0\} = F_0 \subsetneq F_1 \subsetneq \dots \subsetneq F_n = V$$

Donde cada F_i es un k -subespacio vectorial i -dimensional de V . Sea λ una partición con m partes satisfaciendo

$$n - m \geq \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_m \geq 0$$

Llamaremos a estas particiones *admisibles*. Dada una bandera F_{\bullet} y una partición admisible podemos formular la siguiente definición.

Definición 3.2.2 — Variedad de Schubert. Definimos *variedad de Schubert de tipo λ respecto a la bandera F_{\bullet}* $\Sigma_{\lambda_1, \dots, \lambda_m}(F_{\bullet})$ como la subvariedad de la Grassmanniana

$$\Sigma_{\lambda_1, \dots, \lambda_m}(F_{\bullet}) = \{[\Omega] \in G(n, m) \mid \dim(\Omega \cap F_{m-n+i-\lambda_i}) \geq i\}$$

Comentario. Las clases de homología y cohomología de una variedad de Schubert dependen solo de la partición λ . Para cada partición λ , obtenemos una clase de homología, y una clase de cohomología (dual a la clase de homología por dualidad de Poincaré). **Notación:** En general, se omiten de la partición los términos que se anulan. Seguiremos esta notación, por ejemplo escribiendo $\Sigma_{1,0}$ en vez de Σ_0 .

Nuestro siguiente objetivo es demostrar que las clases de Schubert forman una base aditiva para el anillo de cohomología de la Grassmanniana. Empezamos presentando la siguiente definición.

Definición 3.2.3 — Células de Schubert. Sea $\{e_1, \dots, e_n\}$ una base ordenada de V y sea F_\bullet la bandera dada por los $F_i := \text{Vect}_k(e_1, \dots, e_i)$. Definimos la *Célula de Schubert* $\Sigma_{\lambda_1, \dots, \lambda_m}^c(F_\bullet)$ como

$$\left\{ [\Omega] \in \mathbb{G}(n, m) \mid \dim(\Omega \cap F_j) = \begin{cases} 0 & , \text{ para } j < m - n + 1 - \lambda_1 \\ i & , \text{ para } m - n + i - \lambda_i \leq j < m - n + 1 - \lambda_{i+1} \\ m & , \text{ para } m - \lambda_n \leq j \end{cases} \right\}$$

Definición 3.2.4 Dada una partición λ , definimos el *peso* de la partición como

$$|\lambda| := \sum_{i=1}^m \lambda_i$$

Observación. La célula de Schubert $\Sigma_{\lambda_1, \dots, \lambda_m}^c(F_\bullet)$ es isomorfa a $\mathbb{A}^{m(n-m)-|\lambda|}$. Podemos luego, expresar la Grassmanniana como la unión disjunta de las células de Schubert

$$\mathbb{G}(n, m) = \bigsqcup_{\lambda \text{ admisibles}} \Sigma_{\lambda}^c(F_\bullet)$$

Consideremos $\sigma_{\lambda_1, \dots, \lambda_m}$ las clase de cohomología dual (por Poincaré) a la clase fundamental de la variedad de Schubert $\Sigma_{\lambda_1, \dots, \lambda_m}$.

Teorema 3.2.1 El anillo de cohomología $H^*(\mathbb{G}(n, m), \mathbb{Z})$ es libre de torsión. Las clases de cohomología de variedades de Schubert σ_{λ} generan una base aditiva de $H^*(\mathbb{G}(n, m), \mathbb{Z})$, tomando λ en el conjunto de particiones admisibles.

3.3 El Cálculo de Schubert

Concluimos en esta sección, presentando el formalismo simbólico, denominado cálculo de Schubert, usado para resolver problemas de conteo y corresponde a la denominada teoría de intersecciones de la Grassmanniana.

En general, dado que los tópicos abordados en esta sección son de mayor complejidad, esta será particularmente expositiva en cuanto a resultados y consideraremos principalmente el caso de la Grassmanniana Compleja, es decir $k = \mathbb{C}$. Finalmente, se detallarán referencias al final del capítulo.

Iniciaremos nuestro desarrollo desde la topología algebraica. En la sección anterior, vimos que $\mathbb{G}(n, m)$ es una variedad (en particular compleja) de dimensión $(n+1)(m-n)$. Desde la topología algebraica, tenemos que el grupo de cohomología con coeficientes enteros $H^i(\mathbb{G}(n, m), \mathbb{Z})$ se anula cuando $i \notin [0, 2(n+1)(m-n)]$ y además, la suma directa,

$$H^*(\mathbb{G}(n, m), \mathbb{Z}) = \bigoplus_i H^i(\mathbb{G}(n, m), \mathbb{Z})$$

es un anillo graduado bajo el \cup -producto. Mas aun, $\mathbb{G}(n, m)$ es orientable, de modo que existe un isomorfismo natural de el $2(n+1)(m-n)$ -ésimo grupo de cohomología con \mathbb{Z} , la imagen en \mathbb{Z} de un elemento u es llamado el **grado** de u y se denota por $\text{deg}(u)$.

Teorema 3.3.1 Cuando varias subvariedades intersectan propiamente a un conjunto finito de puntos, el número de puntos, contando multiplicidad, corresponde al grado del producto de las clases de cohomología correspondientes.

Idea. En términos generales, el teorema se tiene del hecho que estudiar las clases de cohomología "convierte" la intersección en \cup -producto.

Presentamos ahora, el teorema principal del cálculo de Schubert. Que afirma que las células de Schubert determinan completamente la cohomología de $\mathbb{G}(n, m)$.

Teorema 3.3.2 — El teorema de la Base. Visto aditivamente $H^*(\mathbb{G}(n, m), \mathbb{Z})$ es un grupo abeliano libre y los ciclos $\Omega(a_0 \cdots a_d)$ forman una base.

Por construcción, la clase de cohomología de una subvariedad X de $\mathbb{G}(n, m)$ se encuentra $H^{2p}(\mathbb{G}(n, m), \mathbb{Z})$ cuando X es irreducible y de dimensión $[(n+1)(m-n)-p]$.

Observación Ahora probaremos que $\Omega(A_0 \cdots A_d)$ es irreducible de dimensión $\sum_{i=0}^d (a_i - i)$ con $a_i = \dim(A_i)$. Para esto suponga que A_i consiste de los puntos $(p(0), \dots, p(n))$ y el espacio S de las $(d+1) \times (n+1)$ -matrices $[p_i(j)]$ con $p(j) = 0 = p_i(j)$ cuando $j > a_i$ para $i = 0, \dots, d$. Sea S_0 un subconjunto abierto de S de matrices donde sus menores maximales $p(j_0 \cdots j_d) = \det[p_\alpha(j_\beta)]$ no son todas cero. Dado que S es un espacio afín, se sigue que S_0 es irreducible y en consecuencia, $\Omega(A - 0 \cdots A_d)$ es irreducible. Por otro lado, sea S_1 el subconjunto de S de matrices $[p_i(j)]$ donde su submatriz $[p_i(a_j)]$ es la $(d+1) \times (d+1)$ -identidad. Entonces S_1 se encuentra en S_0 y $\pi(S_1)$ es el subconjunto abierto de $\Omega(A_0 \cdots A_d)$ de puntos $(\dots, p(j_0 \cdots j_d), \dots)$ con $p(a_0 \cdots a_d) \neq 0$, por esto la aplicación π induce un isomorfismo analítico de S_1 con $\pi(S_1)$ y como S_1 es un espacio afín de dimensión $\sum_{i=0}^d (a_i - i)$, la dimensión de $\Omega(A_0 \cdots A_d)$ es la misma.

Podemos entonces reformular el teorema de la base como sigue

Teorema 3.3.3 — El teorema de la Base 2.0. Cada grupo de cohomología de dimensión par $H^{2p}(\mathbb{G}(n, m), \mathbb{Z})$ es un grupo abeliano y los ciclos de Schubert $\Omega(a_0 \cdots a_n)$ con $p = [(n+1)(m-n) - \sum_{i=0}^n (a_i - i)]$ forman una base. Además, cada grupo de dimensión impar se anula.

Ejemplo. Considerar la variedad de Grassmann $\mathbb{G}(0, m)$ de elementos de \mathbb{P}^m , de modo que, las coordenadas de Plucker coinciden con sus coordenadas usuales. Así, tenemos $\mathbb{G}(0, m) = \mathbb{P}^m$ y $\Omega(A_0) = A_0$.

Ahora bien, el teorema de la base nos dice que $H^{2p}(\mathbb{P}^m, \mathbb{Z})$ para $0 \leq p \leq m$ es un grupo cíclico libre generado por la clase $\Omega(m-p)$ de un espacio vectorial $(m-p)$ -dimensional, y todos los otros grupos se anulan.

Proposición 3.3.4 La base $\{\dots, \Omega(a_0 \cdots a_d), \dots\}$ del grupo $H^{2p}(\mathbb{G}(d, n), \mathbb{Z})$ y la base $\{\dots, \Omega(n - a_d, \dots, n - a_0), \dots\}$ del grupo $H^{2[(d+1)(n-d)-p]}(\mathbb{G}(d, n), \mathbb{Z})$ son duales bajo el emparejamiento $v, w \mapsto \deg(v \cdot w)$ de la dualidad de Poincaré.

Observación. Esta proposición nos dice que un elemento cualquiera $v \in H^{2p}(Gr(n, m), \mathbb{Z})$ se escribe de forma única como sigue

$$v = \sum \delta(m - a_d, \dots, m - a_0) \Omega(a_0 \cdots a_d)$$

donde los enteros $\delta(m - a_d, \dots, m - a_0)$ están dados por

$$\delta(m - a_d, \dots, m - a_0) = \deg(v \cdot \Omega(m - a_d, \dots, m - a_0))$$

En particular, si v es la clase de cohomología de una subvariedad irreducible $X \subset \mathbb{G}(n, m)$. Entonces cada entero $\delta(m - a_d, \dots, m - a_0)$ es no-negativo pues corresponde a la cantidad de puntos con multiplicidad en la intersección de X y $\Omega(B_0 \cdots B_d)$ para espacios vectoriales B_i adecuados. Estos números fueron llamados originalmente *Gradzahlen* o grados de X . Sea Y una subvariedad irreducible de $\mathbb{G}(n, m)$ de dimensión p y sean los enteros $\varepsilon(a_0 \cdots a_d)$ sus grados. Si la intersección $X \cap Y$ es un conjunto finito de puntos, entonces, el número $\#(X \cap Y)$ de puntos contados con multiplicidad es el grado del producto entre

$$\sum \delta(m - a_d, \dots, m - a_0) \Omega(a_0 \cdots a_d) \quad , \quad \varepsilon(a_0, \dots, a_d) \Omega(m - a_d, \dots, m - a_0)$$

Aplicando la proposición anterior, tenemos

$$\#(X \cap Y) = \sum \delta(m - a_d, \dots, m - a_0) \varepsilon(a_0, \dots, a_d)$$

Teorema 3.3.5 — La fórmula determinante. Para toda sucesión de enteros $0 \leq a_0 \leq \dots \leq a_d \leq n$ se tiene la siguiente fórmula en el anillo de cohomología $H(\mathbb{G}(d, n), \mathbb{Z})$

$$\Omega(a_0 \cdots a_d) = \begin{vmatrix} \sigma(a_0) & \cdots & \sigma(a_0 - d) \\ \vdots & & \vdots \\ \sigma(a_d) & \cdots & \sigma(a_d - d) \end{vmatrix}$$

donde por convención, escribimos $\sigma(h) = 0$ para $h \notin [0, (n - d)]$.

Este teorema, junto con el teorema de la base, implica que los ciclos especiales de Schubert generan el anillo de cohomología como \mathbb{Z} -álgebra. Más aun, reduce el problema de determinar el producto de dos ciclos de Schubert arbitrarios en el caso donde uno (o en este caso, cada uno) es un ciclo especial de Schubert. Este caso nos lleva al tercer teorema principal, que es el que sigue.

Teorema 3.3.6 — Fórmula de Pieri. Para cualquier sucesión de enteros $0 \leq a_0 \leq \dots \leq a_d \leq n$ y para $h = 0, \dots, (n - d)$ se tiene la siguiente fórmula en el anillo de cohomología $H^*(\mathbb{G}(n, m), \mathbb{Z})$:

$$\Omega(a_0 \cdots a_d) \cdot \sigma(h) = \sum \Omega(b_0 \cdots b_d)$$

donde la suma recorre las sucesiones de enteros $b_0 < \dots < b_d$ que satisfacen $0 \leq b_0 \leq a_0 < b_1 \leq a_1 < \dots < b_d \leq a_d$ y $\sum_{i=0}^d b_i = \sum_{i=0}^d a_i - (n - d - h)$.

Ejemplo. Usemos este resultado para determinar L en \mathbb{P}^3 que interseccionan simultáneamente a cuatro líneas L_1, L_2, L_3 y L_4 . En la sección anterior, vimos que tales líneas L son representadas por los puntos de la intersección

$$Q = \bigcap_{i=1}^4 \Omega(L_i, \mathbb{P}^3).$$

Buscamos entonces, calcular el grado de $\Omega(1,3)^4$. Notemos que, por definición se cumple que $\Omega(1,3) = \sigma(1)$ y la fórmula de Pieri de 3.3.6 nos dice que $\Omega(1,3)\sigma(1) = \Sigma\Omega(b_0 \cdot b_1)$, con $0 \leq b_0 \leq 1 \leq b_1 \leq 3$ y $b_0 + b_1 = 3$.

Obtenemos de los cálculos anteriores lo siguiente, $\Omega(1,3)^2 = \Omega(0,3) + \Omega(1,2)$. Luego, la última proposición nos da

$$\Omega(0,3)^2 = 0, \Omega(1,2)^2 = 0, \text{ y } \deg(\Omega(0,3) \cdot \Omega(1,2)) = 1.$$

Así encontramos el grado $\deg(\Omega(1,3)^4) = 2$. Alternativamente, usando nuevamente la fórmula de Pieri obtenemos $\Omega(1,3)^3 = 2\Omega(0,2)$ y una tercera vez nos da $\Omega(1,3)^4 = 2\Omega(0,1)$. Ahora bien, como $\Omega(0,1)$ es la clase de un único punto, su grado es 1.

3.4 Conclusiones y Ejemplos

Ejercicio 3.1 Calculemos el número de líneas L en \mathbb{P}^3 que interseccionan simultáneamente a cuatro curvas dadas C_1, C_2, C_3 y C_4 .

Considere $c_i \in H^4(\mathbb{P}^3, \mathbb{Z})$ las clases de cohomología de cada C_i y ℓ la clase de cohomología de una línea en L . Tenemos que $c_i = \delta_i \ell$, donde δ_i es el grado de C_i . Luego, las líneas intersecando una curva C_i dada son representadas por los puntos de una subvariedad X_i de $Gr(1,3)$ y como la clase de cohomología x_i de X_i es de la forma $x_i = \delta_i \Omega(1,3)$ concluimos

$$x_1 x_2 x_3 x_4 = 2\delta_1 \delta_2 \delta_3 \delta_4 \Omega(0,1)$$

y por ende, cuando el número de líneas intersecando C_1, C_2, C_3, C_4 es finito y se toma en cuenta multiplicidad de soluciones, entonces el número de líneas es dado por $2\delta_1 \delta_2 \delta_3 \delta_4$.

Para analizar los X_i más detalladamente, necesitamos considerar el subconjunto Z del producto $\mathbb{P}^3 \times \mathbb{G}(1,3)$ consistente de los pares (P, Q) tales que el punto $P \in \mathbb{P}^3$ se encuentra en la línea representada por Q . Realizando cálculos no demasiado complejos, como aquellos de las secciones anteriores, podemos probar que Z es una variedad compleja de dimensión 5 que se puede describir como un sistema de ecuaciones polinomiales (de hecho, cuadráticas bihomogéneas). Sea entonces $p : \mathbb{P}^3 \times \mathbb{G}(1,3) \rightarrow \mathbb{P}^3$ y $q : \mathbb{P}^3 \times \mathbb{G}(1,3) \rightarrow \mathbb{G}(1,3)$ las

proyecciones usuales. Entonces, claramente tenemos $X_i = q(Z \cap p^{-1}(C_i))$ en un sentido conjuntista, y se puede ver que, $x_i = q_*(z \cdot p^*c_i)$, donde z es la clase de cohomología de Z , donde p^* es la operación inducida en los grupos de cohomología inducida por p y donde q_* es dual por Poincaré de q^* . Similarmente tenemos $\Omega(1,3) = q_*(z \cdot p^*\ell)$, y consecuentemente, la relación $c_i = \delta_i \ell$ implica la igualdad $x_i = \delta_i q_*(z \cdot p^*\ell) = \delta_i \Omega(1,3)$, corroborando la igualdad.

Ejercicio 3.2 Veamos que dos ecuaciones cuádricas en \mathbb{P}^4 tienen, en general, dieciséis líneas en común.

Una forma cuádrica Q en \mathbb{P}^n está definida como el conjunto de ceros de un polinomio homogéneo F de grado 2 y podemos usar sus $m = \binom{n+2}{2}$ coeficientes para representar Q en un punto $q \in \mathbb{P}^{m-1}$. Primero, observemos que las rectas en una cuádrica en \mathbb{P}^4 , son representadas por puntos ℓ en la variedad 3-dimensional irreducible $\mathbb{G}(1,4)$. Consideremos $W \subseteq \mathbb{P}^{14} \times \mathbb{G}(1,4)$ el conjunto de los pares (q, ℓ) tales que q representa una cuádrica Q en \mathbb{P}^4 y ℓ representa una recta en Q . Sea $pr_1 : W \rightarrow \mathbb{P}^{14}$ y $pr_2 : W \rightarrow \mathbb{G}(1,4)$ las proyecciones. Una fibra de pr_2 representa las cuádricas Q tales que contiene una recta dada L . Sean F_1, F_2, F_3 polinomios homogéneos lineales independientes definiendo L . Entonces, el polinomio F definiendo Q es de la forma

$$F = G_1 F_1 + G_2 F_2 + F_3 G_3 \quad (3.1)$$

donde G_i son polinomios lineales homogéneos adecuadas. De esta forma, los polinomios de la forma 3.1 forman un espacio vectorial de dimensión $(4 + 4 + 4) = 12$, por tanto la fibra de pr_2 es \mathbb{P}^{11} . Tenemos entonces que W es una variedad irreducible de dimensión $11 + \dim(\mathbb{G}(1,4)) = 17$. Una fibra general de pr_1 , que representa rectas en una cuadrática general Q es por tanto irreducible de dimensión $(17 - 14) = 3$.

Sea Q una cuádrica en \mathbb{P}^4 , sea $X = \mathbb{G}(1,4)$ representando las rectas en Q y sea x la clase de cohomología de X . Por el teorema de la base, tenemos que $x = \lambda \Omega(0,4) + \mu \Omega(1,3)$ y por la proposición, tenemos que $\lambda = \deg(x\Omega(0,4))$ y $\mu = \deg(x\Omega(1,3))$. Ahora, ninguna recta en Q puede pasar por un punto $P \in \mathbb{P}^4$ que no esté en Q , por tanto $X \cap \Omega(1,3) = \emptyset$, luego $\lambda = 0$. Por otro lado, un subespacio lineal A_1 intersecta Q en una cuádrica Q_1 en esta copia de \mathbb{P}^3 y exactamente 4 rectas en Q_1 intersectan una recta A_0 en A_1 , ya que A_0 intersecta Q_1 en dos puntos distintos, por tanto intersecta una recta a cada recta en cada punto. Así, $X \cap \Omega(A_0 A_1)$ consiste en los 4 puntos, luego tenemos que $\mu = 4$. Sea Q' otra cuádrica en \mathbb{P}^4 , entonces el número de rectas comunes de Q y Q' , contando multiplicidades, es igual a $\deg(x^2) = 4^2 \deg(\Omega(1,3)^2) = 16$.

3.5 Referencias del capítulo

- S.L Kleiman & Dan Laksov, "**Schubert Calculus**", Fuente: "The American Mathematical Monthly".
- Coskun, Izzet, Notas: "**Lectures in Poland on homogeneous varieties**", Fuente: Pagina personal.
- Hatcher, Allen. "Algebraic Topology", ISBN: 7-302-10588-X

