① Categorías, haces y espacios anillados

$F: \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ "functor"

$\mathcal{F}: \mathcal{U} \mapsto \mathcal{F}(\mathcal{U})$

$\mathcal{U}_i \; \mathcal{U}_j$ $\; s_i \in \mathcal{F}(\mathcal{U}_i),\ s_j \in \mathcal{F}(\mathcal{U}_j)$

si $s_i|_{\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j} = s_j|_{\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j}$ ⇝ se pegan de manera única!

Pensar variedades como $(X, \mathcal{O}_X)$

② Variedades afines y proyectivas. Var algebraicas y separación.

$\mathbb{A}^n(k) = \{(x_1,\dots,x_n)$ tq $x_i \in k\}$

$\cup |$

$X = \{p_1 = \dots = p_r = 0\}$ polinomios (Cerrado Zariski)

$\mathbb{P}^n(k) = \{$rectas vectoriales en $k^{n+1}\}$

"Pegar" variedades afines

Todos los abiertos son densos! ¿Reemplazo de Hausdorff?

③ Componentes irreducibles, dimensión y morfismos finitos

$X = \{xy = 0\} = X_1 \cup X_2$

X_2, X_1 (cf. números primos!)

dim 0, dim 1, dim 2, etc

$f^{-1}(y_b) = \{x_1, \dots, x_d\}$

$f^{-1}(y_m)$

$\downarrow f$ (grado d)

$y_{\text{"malo"}}$, bueno, Y, X

④ Puntos lisos, Teorema de Bertini y Teorema principal de Zariski

suave, singular

(cf Teo de Sard)

(una de las tantas versiones)

$X \supseteq \mathcal{U} \xrightarrow{f} V \subseteq Y$, $\mathcal{U} \cong V$ abiertos

$\Rightarrow f^{-1}(y) =$ ~~conexa~~ conexa

⑤ Fibrados vectoriales y $\mathcal{O}_X$-módulos localmente libres

$E_p \cong k^n$, E, π, X (cf. espacio tangente $T_pM \cong \mathbb{R}^{\dim M}$, M)

$\mathcal{E}|_{\mathcal{U}} \cong \mathcal{O}_{\mathcal{U}}^{\oplus r}$

$s(p) = (s_1(p), \dots, s_r(p))$, $\in \mathcal{O}_{\mathcal{U}}$

$s(p) \in E_p$, s, π, $p \in \mathcal{U} \subseteq X$

⑥ Divisores, grupo de Picard, sistemas lineales

$D = \sum_{\text{finita}} n_i H_i$

$H_i \subseteq X$ hipersuperficie

Fibrados $L \to X$ de rango $r = 1$ (Obs, $L \otimes L'$ de rg $= 1$)

$\varphi: X \dashrightarrow \mathbb{P}^N$ quizás no definida en todo X

⑦ Haces coherentes y Cohomología de Čech

$\mathcal{F}|_{\mathcal{U}}$ finitamente generado por $s_1, \dots, s_r$ y finitas relaciones entre los s_j

Motivación: $F: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ campo vectorial tq $\nabla \times F = \mathrm{rot}(F) = \vec{0}$ ⇝ ∃? φ tq $F = \nabla \varphi$?

Alg. Homológica y Funct Derivados

si $0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{G} \to \mathcal{H} \to 0$ sucesión exacta de haces

$\Rightarrow 0 \to H^0(\mathcal{F}) \to H^0(\mathcal{G}) \to H^0(\mathcal{H})$ es exacta … ¿Cómo continuar?

⑧ Teoremas de anulación y finitud de cohomología. Dualidad de Serre-Groth.

$H^i(X, \mathcal{F}) = 0$ si $i > \dim X$

$\dim_k H^i(X, \mathcal{F}) < +\infty$ (proyectiva, coherente)

$H^p(X, \mathcal{F}) \cong H^q(X, \mathcal{F}^* \otimes \omega_X)^\vee$

$p + q = \dim X$, $\omega_X = \det(\Omega_X^1)$ "$dz_1 \wedge \dots \wedge dz_n$" loc

⑨ Teorema de Riemann-Roch para curvas algebraicas.

$\mathcal{L} \to C$ fibrado en rectas

$\mathcal{L}$ "=" $\sum_{\text{finita}} n_p\, p \overset{gr}{\rightsquigarrow} \sum n_p$

$\Rightarrow \chi(\mathcal{L}) := \dim_k H^0(\mathcal{L}) - \dim_k H^1(\mathcal{L}) = \mathrm{gr}(\mathcal{L}) + 1 - g(C)$