§38. Aplicaciones del Teorema de Riemann-Roch

En esta sección estudiaremos algunas aplicaciones geométricas del Teorema de Riemann-Roch.

Recuerdo (ver §23, p. 84): Sea C una curva alg. proyectiva suave e irreducible, entonces el morfismo de grupos $\deg : \mathrm{Pic}(C) \twoheadrightarrow \mathbb{Z}$, $L \cong \mathcal{O}_C(\sum_{i=1}^{r} n_i \cdot p_i) \mapsto \deg(L) = \sum_{i=1}^{r} n_i$ está bien definido y es sobreyectivo. Más aún,
$\deg$ inyectivo $\overset{\text{def}}{\iff} \forall p,q \in C$ distintos, $\deg \mathcal{O}_C(p-q) = 0$ implica que $p \sim q \iff C \cong \mathbb{P}^1$.

Prop: Sea C una curva alg. proyectiva suave e irreducible, entonces $g(C) = 0 \iff C \cong \mathbb{P}^1$.

Dem: Si $C \cong \mathbb{P}^1$ entonces $\omega_{\mathbb{P}^1} \simeq \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-2)$ y luego $h^0(\mathbb{P}^1, \omega_{\mathbb{P}^1}) = h^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-2)) = 0$ ✓
Sup. que $g(C) = h^0(C, \omega_C) = 0$, entonces RR se reduce a $\ell(D) - \ell(K_C - D) = \deg(D) + 1 - \overset{0}{\cancel{g}}$.
Si $p, q \in C$ son puntos distintos, entonces $D = p - q$ tiene $\deg(D) = 0$ y $\deg(K_C - D) = -2$ pues $\deg(K_C) = 2g - 2$, y luego $\ell(K_C - D) = 0$. Así, $\ell(D) = 1$ y por lo tanto
$|D| = \{E \geq 0$ efectivo tq $E \sim D\} \cong \mathbb{P}^{\ell(D)-1} = \{pt\} \Rightarrow E = 0 \sim D = p - q \iff p \sim q \Rightarrow C \cong \mathbb{P}^1$ ■

Nuestro siguiente objetivo será obtener criterios numéricos que nos aseguren que un fibrado en rectas en una curva algebraica sea globalmente generado, o mejor aún: <u>muy amplio</u>.

<u>Notación y Terminología</u>: Sea X una variedad alg. proyectiva suave e irreducible, y sea $D = \sum_{i=1}^{r} n_i Y_i$ un divisor (de Weil) en X. Definimos el <u>soporte de D</u> como

$$\mathrm{Supp}(D) = \bigcup_{i=1}^{r} Y_i \subseteq X.$$

Por otro lado, dada $Y \subseteq X$ hipersuperficie irreducible, definimos la <u>multiplicidad de Y en D</u> por

$$\mathrm{mult}_Y(D) := \begin{cases} n_i & \text{si } Y = Y_i \text{ para cierto } i = 1, \ldots, r \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

Finalmente, recordemos que el <u>sistema lineal</u> asociado a D está dado por

$$|D| := \mathbb{P}H^0(X, \mathcal{O}_X(D)) \cong \{E \geq 0 \text{ efectivo tq } E \sim D\}$$

Así, definimos el <u>lugar de base</u> de D como el lugar de base de $\mathcal{O}_X(D) \in \mathrm{Pic}(X)$ (ver §22, p. 75):

$$\mathrm{Bs}(D) := \{x \in X \text{ tq } s(x) = 0 \ \forall s \in H^0(X, \mathcal{O}_X(D))\} = \{x \in X \text{ tq } x \in \mathrm{Supp}(E) \ \forall E \geq 0 \text{ efectivo tq } E \sim D\}$$
$$= \bigcap_{E \in |D|} \mathrm{Supp}(E).$$

Luego, $L = \mathcal{O}_X(D)$ es globalmente generado (i.e., $\varphi_L : X \to |D| \cong \mathbb{P}^{h^0(D)-1}$ es un morfismo regular) si y solo si $\mathrm{Bs}(D) = \emptyset$.

Recuerdo (ver §22, p. 76): Sea X una var. alg. proyectiva irreducible y sea $L \in \mathrm{Pic}(X)$ un fibrado en rectas. Entonces L es <u>muy amplio</u> (i.e., $\varphi_L : X \hookrightarrow \mathbb{P}H^0(X,L)^\vee$ encajamiento cerrado) si y sólo si:
① L <u>separa puntos</u>, i.e., $\forall x, y \in X$ distintos existe $s \in H^0(X, L)$ tq $s(x) = 0$ y $s(y) \neq 0$.
② L <u>separa tangentes</u>, i.e., $\forall x \in X$ y todo $v \in T_x X$ existe $s \in H^0(X, L)$ tq $s(x) = 0$ y $(d_x s)(v) \neq 0$.

Prop: Sea C una curva alg. proyectiva suave e irreducible, y sea $L \cong \mathcal{O}_C(D)$ un fibrado en rectas. Entonces:
① L es globalmente generado (i.e., "sin puntos de base") $\iff \ell(D - p) = \ell(D) - 1 \ \forall p \in C$.
② L es muy amplio $\iff \ell(D - p - q) = \ell(D) - 2 \ \forall p, q \in C$ (incluyendo el caso $p = q$!).

Dem: Para ①, consideramos $p \in C$ y tensorizamos $0 \to \mathcal{O}_C(-p) \to \mathcal{O}_C \to \mathcal{O}_p \to 0$ por $\mathcal{O}_C(D)$, de donde obtenemos la sucesión exacta $0 \to \mathcal{O}_C(D-p) \to \mathcal{O}_C(D) \to k_p \to 0$ y luego

$$0 \to H^0(C,\mathcal{O}_C(D-p)) \xrightarrow{\alpha} H^0(C,\mathcal{O}_C(D)) \xrightarrow{\beta} k .$$

Así, $\ell(D) \overset{\text{def}}{=} h^0(C,\mathcal{O}_C(D)) = \dim_k \ker(\beta) + \operatorname{rg}(\beta) = \ell(D-p) + b$, con $b = \operatorname{rg}(\beta) \in \{0,1\}$.
$\Rightarrow \ell(D-p) = \ell(D)$ ó $\ell(D)-1$ (★). Por otro lado, la aplicación

$$\psi_p : |D-p| \cong \mathbb{P}^{\ell(D-p)-1} \hookrightarrow |D| \cong \mathbb{P}^{\ell(D)-1}, \quad E \mapsto E+p .$$

es inyectiva $\forall p \in C$. Así, $\ell(D-p) = \ell(D)$ si y sólo si ψ_p es sobreyectiva, y esto último (por definición) equivale a que $\forall E \geq 0$ efectivo tq $E \sim D$ se tiene $p \in \operatorname{Supp}(E)$, ie, $p \in Bs(D)$ ✓

Para probar ②, primero notamos que podemos asumir que ① se cumple. En efecto, si L es muy amplio entonces es globalmente generado, y si $\ell(D-p-q) = \ell(D)-2$ $\forall p,q \in C$ el mismo cálculo (★) prueba por otro lado que $\ell(D)-2 = \ell(D-p-q) = \ell(D-p)$ ó $\ell(D-p)-1$, por lo que necesariamente se tiene $\ell(D-p) = \ell(D)-1$ $\forall p \in C$. En part, $L \cong \mathcal{O}_C(D)$ define

$$\varphi_L : C \longrightarrow |D| \cong \mathbb{P}^{\ell(D)-1} \text{ morfismo regular, con } \ell(D) = \ell(D-p-q)+2 \geq 2 .$$

que no es constante (pues $\ell(D) \geq 2$). Para probar que φ_L es un encajamiento cerrado (ie, que L es muy amplio) basta probar que:

a) L separa puntos $\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ $\forall p,q \in C$ distintos, $\exists E \geq 0$ efectivo tq $E \sim D$ y $p \in \operatorname{Supp}(E)$ pero $q \notin \operatorname{Supp}(E)$
$\Leftrightarrow$ q no es punto de base de $|D-p|$ $\overset{①}{\Leftrightarrow}$ $\ell((D-p)-q) = (\ell(D)-1)-1 = \ell(D)-2$ ✓

b) L separa tangentes $\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ $\forall p \in C$, $\exists E \geq 0$ efectivo tq $E \sim D$ y $p \in \operatorname{Supp}(E)$ pero $\operatorname{mult}_p(E) = 1$
$\Leftrightarrow$ p no es punto de base de $|D-p|$ $\overset{①}{\Leftrightarrow}$ $\ell(D-2p) = \ell(D)-2$ ✓ ■

Def: Sea C una curva alg. proyectiva suave e irreducible, y sea $L \cong \mathcal{O}_C(D)$ fibrado en rectas. Decimos que D (o que L) es especial si

$$\ell(K_C - D) > 0 \overset{\text{Serre}}{\Longleftrightarrow} h^1(C,\mathcal{O}_C(D)) > 0 .$$

En caso contrario, decimos que D no es especial y en particular $\ell(D) = \deg(D) + 1 - g(C)$ en este último caso.

Ejemplo (ver §37, p.126): si $\deg(D) \geq 2g(C)-1$ entonces D no es especial.

Corolario: Sea C una curva alg. proyectiva suave e irreducible de género $g(C) = g$, y sea $L \cong \mathcal{O}_C(D)$ un fibrado en rectas. Entonces,
① si $\deg(D) \geq 2g$, entonces L es globalmente generado.
② si $\deg(D) \geq 2g+1$, entonces L es muy amplio.

Dem: Sean $p,q \in C$. En ①, tanto D como $D-p$ no son especiales, y luego

$$\ell(D) \overset{RR}{=} \deg(D)+1-g \quad \text{y} \quad \ell(D-p) \overset{RR}{=} \deg(D-p)+1-g = (\deg(D)+1-g)-1 ,$$

ie, $\ell(D-p) = \ell(D)-1$ $\forall p \in C$ y luego L es globalmente generado. En ②, los divisores D, $D-p$ y $D-p-q$ no son especiales, y el mismo cálculo muestra que en este caso $\ell(D-p-q) = \ell(D)-2$ $\forall p,q \in C$ y luego L es muy amplio. ■

Ejemplo: si $g(C) = 0$, entonces L es amplio $\Leftrightarrow$ L es muy amplio $\Leftrightarrow$ $\deg(L) > 0$. Dado que $g(C) = 0 \Leftrightarrow C \cong \mathbb{P}^1$, esto se condice con el hecho que $L \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(d)$ para $d \in \mathbb{Z}$ y que este último es muy amplio si y sólo si $d > 0$ (encajamiento de Veronese ?!).

Antes de dar más ejemplos en curvas de género ≥ 1, necesitamos definir la noción de grado de una variedad proyectiva X, la cual depende (!) del encajamiento $X \overset{i}{\hookrightarrow} \mathbb{P}^n$.

Recuerdo (ver §29, p.100): sea $X \overset{j}{\hookrightarrow} \mathbb{P}^n$ var. proyectiva y $m \in \mathbb{Z}$. Entonces, $\mathcal{O}_X(m)$ es el fibrado en rectas en X dado por $\mathcal{O}_X(m) := j^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(m) = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(m)|_X$. Más generalmente, si $\mathcal{F}$ es un haz coherente en X entonces escribimos $\mathcal{F}(m) := \mathcal{F} \otimes \mathcal{O}_X(m)$. En particular, el Teorema de anulación de Serre implica que la función

$$h_{\mathcal{F}} : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, \quad m \mapsto \chi(X, \mathcal{F}(m)) \overset{\text{def}}{=} \sum_{i \geq 0} (-1)^i h^i(X, \mathcal{F}(m))$$

verifica que $h_{\mathcal{F}}(m) = h^0(X, \mathcal{F}(m))$ para todo $m \gg 0$. Decimos que $h_{\mathcal{F}}$ es la función de Hilbert de $\mathcal{F}$ (respecto al encajamiento $j : X \hookrightarrow \mathbb{P}^n$).

Lema: Sea $X \overset{j}{\hookrightarrow} \mathbb{P}^n$ var. proyectiva y $\mathcal{F}$ un haz coherente en X. Entonces, $h_{\mathcal{F}} \in \mathbb{Q}[m]$ es una función polinomial con coeficientes racionales.

Dem: Dado que $H^i(X, \mathcal{F}(m)) \cong H^i(\mathbb{P}^n, (j_* \mathcal{F}) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(m))$ $\forall i \geq 0$, basta suponer $X = \mathbb{P}^n$ y probar el resultado por inducción en $n \in \mathbb{N}$: si $n = 0$ entonces $\mathcal{F}(m) = \mathcal{F}$ $\forall m \in \mathbb{Z}$ y luego $h_{\mathcal{F}}$ es constante ✓ Para simplificar cálculos, supongamos $\mathcal{F}$ localmente libre (que es el caso que nos interesará después: el caso general es similar):

La sucesión exacta asociada a un hiperplano $i : H \cong \mathbb{P}^{n-1} \hookrightarrow \mathbb{P}^n$ es:

$$0 \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-1) \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n} \to \mathcal{O}_H \to 0$$

Tensorizando por el haz localmente libre $\mathcal{F}(m)$, obtenemos la sucesión exacta

$$0 \to \mathcal{F}(m-1) \to \mathcal{F}(m) \to \mathcal{F}_H(m) \to 0,$$

donde $\mathcal{F}_H := \mathcal{F}|_H$ haz coherente en $H \cong \mathbb{P}^{n-1}$. Luego, $\chi(\mathbb{P}^n, \mathcal{F}(m)) = \chi(\mathbb{P}^n, \mathcal{F}(m-1)) + \chi(H, \mathcal{F}_H(m))$ i.e., $h_{\mathcal{F}}(m) - h_{\mathcal{F}}(m-1) = h_{\mathcal{F}_H}(m)$ y el lado derecho es un polinomio en m con coef. en $\mathbb{Q}$. Luego de limpiar denominadores, nos reducimos a probar que si $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ es una función tq $g(m) := f(m) - f(m-1)$ es un polinomio, entonces f también (Ejercicio). ■

Def: Sea $X \overset{j}{\hookrightarrow} \mathbb{P}^N$ una variedad proyectiva de $\dim(X) = n$. El polinomio de Hilbert de X (resp. al encajamiento $j : X \hookrightarrow \mathbb{P}^N$) es $h_X(m) := h_{\mathcal{O}_X(1)}(m) = \chi(X, \mathcal{O}_X(m))$. El grado de X, denotado $\deg(X)$, es $n!$ veces el coeficiente principal de $h_X(m)$.

Ejemplos: ① Usando los cálculos de $h^i(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(m))$ en §29 (pág 99) se verifica directamente que $h_{\mathbb{P}^n}(m) = \chi(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(m)) = \binom{n+m}{n} = \frac{m^n}{n!} + \ldots$ y luego $\deg(\mathbb{P}^n) = 1$.

② $\boxed{\text{Ejercicio}}$ Sea $X = V(f) \subseteq \mathbb{P}^n$ hipersuperficie definida por un polinomio homogéneo no-nulo de grado d. Probar que $h_X(m) = \binom{n+m}{n} - \binom{n+m-d}{n} = \frac{d\, m^{n-1}}{(n-1)!} + \ldots$ y luego $\deg(X) = d$.

[Indicación: considerar la sucesión exacta $0 \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-d) \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n} \to \mathcal{O}_X \to 0$ (cf. Lema anterior)]

Ejemplo principal: Sea C una curva alg. proyectiva suave e irreducible de género $g(C) = g$, y sea $L \cong \mathcal{O}_C(D)$ fibrado en rectas muy amplio, i.e., $\varphi_L : C \hookrightarrow \mathbb{P}^n$ encajamiento cerrado (donde $n = \ell(D) - 1$). Entonces, $\mathcal{O}_C(1) \overset{\text{def}}{=} \varphi_L^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1) \cong L$ y luego:

$$h_C(m) = \chi(C, \mathcal{O}_C(m)) = \chi(C, L^{\otimes m}) = \chi(C, \mathcal{O}_C(mD)) \overset{\text{RR}}{=} \deg(mD) + 1 - g$$
$$= \deg(D) \cdot m + 1 - g \quad (\text{polinomio de Hilbert de } C \text{ respecto a } L)$$

En otras palabras, $\deg_L(C) := \deg(\varphi_L(C)) = \deg(D)$.

Obs: El teorema de Bertini (ver §18, p. 64) implica que $\deg(\varphi_L(C))$ coincide con la cantidad de puntos en $\varphi_L(C) \cap H$, donde $H \cong \mathbb{P}^{n-1}$ es un hiperplano general en $\mathbb{P}^n$.

Caso particular importante (curvas elípticas): Sup. que C es una curva elíptica, i.e., $g(C)=1$ ($\Leftrightarrow \omega_C \cong \mathcal{O}_C$) y sea $L \simeq \mathcal{O}_C(D)$ fibrado en rectas. Si $\deg(D)=3$ (eg. $D=p+q+r$) entonces L es muy amplio. En efecto, $\deg(D)=3 \geq 2g+1$ en este caso. Además, D no es especial y luego $\ell(D) \overset{RR}{=} \deg(D)=3$. Así, L define un encajamiento cerrado

$$\varphi_L : C \hookrightarrow \mathbb{P}^2$$

donde $\deg(\varphi_L(C)) = \deg(D)=3$. Así, toda curva elíptica es isomorfa a una cúbica en $\mathbb{P}^2$!

Notar además que en una curva elíptica C, un fibrado en rectas $L \cong \mathcal{O}_C(D)$ es muy amplio si y sólo si $\deg(D) \geq 3$. En efecto, si $\deg(D)=1$ entonces $\ell(D) \overset{RR}{=} 1$ y $\mathbb{P}^{\ell(D)-1} = \{pt\}$, y si $\deg(D)=2$ entonces $\ell(D) \overset{RR}{=} 2$ y $\varphi_L : C \to \mathbb{P}^1$ no puede ser un encajamiento cerrado, pues $g(C)=1 \neq 0 = g(\mathbb{P}^1)$.

Más ejemplos: ① Si $g(C)=2$, todo fibrado en rectas $L \simeq \mathcal{O}_C(D)$ de $\deg(D) \geq 5 = 2g+1$ es muy amplio. Además, si $\deg(D)=5$ entonces $\ell(D) \overset{RR}{=} 5+1-2=4$ y luego, toda curva de género 2 es isomorfa a una curva de grado 5 en $\mathbb{P}^3$.

② En general, el criterio "$\deg(D) \geq 2g+1$" no es óptimo: si $C \subseteq \mathbb{P}^2$ es una curva plana de grado 4, entonces $\mathcal{O}_C(1)$ es muy amplio de $\deg(\mathcal{O}_C(1))=4$. Sin embargo, la fórmula $g(C_d) = \frac{(d-1)(d-2)}{2}$ (ver §26, p.92) implica para $d=4$ que $g(C)=3$ (y luego $2g+1=7>4$).

Aplicación (morfismo canónico): Sea C una curva alg. proyectiva suave e irreducible de género $g(C)=g$. Si $g=0$, entonces $|K_C| = \emptyset$, y si $g=1$ entonces $|K_C|$ es un punto (y luego $\varphi_{\omega_C} : C \to \mathbb{P}H^0(C,\omega_C)^\vee$ es constante).

[Lema: Sup. que $g \geq 2$, entonces $\omega_C \cong \mathcal{O}_C(K_C)$ es globalmente generado.

Dem: Basta verificar que $\ell(K_C - p) = \ell(K_C) - 1$ $\forall p \in C$. Sabemos que $\ell(K_C-p) = \ell(K_C)$ ó $\ell(K_C)-1$, por lo que si suponemos por contradicción que $\ell(K_C-p) = \ell(K_C) \overset{def}{=} g$ entonces, aplicando Riemann-Roch a $D=p$ obtenemos

$$\ell(D) - \underbrace{\ell(K_C-p)}_{=g} \overset{RR}{=} \underbrace{\deg(D)}_{=1} + 1 - g = 2-g \Rightarrow \ell(D)=2 .$$

Por otro lado, $\forall q,r \in C$ tenemos $\deg(D-q-r) = -1$ y luego $\ell(D-q-r) = 0 = \ell(D)-2$ $\overset{Prop}{\Rightarrow}$ $L = \mathcal{O}_C(D)$ es muy amplio $\Rightarrow \varphi_L : C \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}^1$ isomorfismo, contradicción! (pues $g \geq 2$) ∎

Terminología (Max Noether, 1883): Sea C una curva alg. proyectiva suave e irreducible. Un g^r_d en C es un par (L, M) donde $L \simeq \mathcal{O}_C(D) \in \mathrm{Pic}(C)$ es un fibrado en rectas de $\deg(L)=d$ y $M \subseteq H^0(C,L)$ es un sistema lineal de $\dim_{\mathbb{K}}(M) = r+1$, que define

$$\varphi_M : C \longrightarrow |M| \cong \mathbb{P}^r$$

y donde (gracias al "Hecho" en §23, p.84) si $r \geq 1$ entonces $\deg(\varphi_M) = d$. Decimos que C es una curva hiperelíptica si posee un g^1_2, i.e., si $\exists f : C \to \mathbb{P}^1$ de $\deg(f)=2$:

Ejemplo: Si $g(C)=2$ entonces $\deg(\omega_C) = 2g-2 = 2$ y $\dim_{\mathbb{K}} H^0(C,\omega_C) \overset{def}{=} 2 = 1+1$, i.e., toda curva de género 2 es hiperelíptica y $\varphi = \varphi_{\omega_C} : C \to \mathbb{P}^1$ es de $\deg(\varphi)=2$.

[Teorema: Sea C una curva alg. proyectiva suave e irreducible de género $g(C) = g \geq 2$. Entonces, $\omega_C \simeq \mathcal{O}_C(K_C)$ es muy amplio si y sólo si C no es hiperelíptica.]

Dem: Sabemos que ω_C es muy amplio si y sólo si $\forall p,q\in C$ se tiene que $\ell(K_C-p-q)=\ell(K_C)-2$, y sabemos que $\ell(K_C-p-q)=\ell(K_C)-2$ ó $\ell(K_C)-1$, donde $\ell(K_C)=g$ por definición. Aplicando Riemann-Roch a $D=p+q$ tenemos

$$\ell(D)-\ell(K_C-p-q)=\underbrace{\deg(D)}_{=2}+1-g=3-g \quad , \text{ ie, } \ell(D)=1 \text{ ó } 2. \quad (*)$$

Luego, nos reducimos a determinar si existe o no $D=p+q$ tal que $\ell(D)=2$ (es el único caso donde ω_C no es muy amplio):

Si C posee un g^1_2 (ie, es hiperelíptica) dado por $(L, M\subseteq H^0(C,L))$, entonces cualquier sección $s\in M\setminus\{0\}$ determina $E=\mathrm{div}(s)\geq 0$ divisor efectivo de $\deg(E)=\deg(L)\overset{\text{def}}{=}2$, ie, $E=p_0+q_0$ para ciertos $p_0,q_0\in C$ y $\ell(E)\overset{\text{def}}{\geq}2 \overset{(*)}{\Rightarrow} \omega_C$ no es muy amplio.

Recíprocamente, si $\exists D=p+q$ tal que $\ell(D)=2$ entonces $(\mathcal{O}_C(D), H^0(C,\mathcal{O}_C(D)))$ es un g^1_2 en C (pues $\deg(D)=2$ y $|D|\cong\mathbb{P}^1$), ie, C es hiperelíptica. ■

Def: Sea C una curva alg. proyectiva suave e irreducible de género $g(C)=g\geq 3$ tal que C no es hiperelíptica (ie, ω_C es muy amplio). Entonces, el incrustamiento cerrado

$$\varphi_{\omega_C}:=\varphi_C: C\hookrightarrow |K_C|\cong\mathbb{P}^{g-1}$$

es llamado el incrustamiento canónico de C (único módulo $\mathrm{Aut}(\mathbb{P}^{g-1})\cong PGL_g(k)$), y su imagen $\varphi_C(C)\subseteq\mathbb{P}^{g-1}$, de $\deg(\varphi_C(C))=2g-2$, es llamada una curva canónica en $\mathbb{P}^{g-1}$.

Observación/Cultura general: Sup. que $g(C)=g\geq 2$, entonces $\deg(3K_C)=6g-6\geq 2g+1$ y luego $L=\omega_C^{\otimes 3}$ es muy amplio. Dado que $\ell(3K_C)\overset{RR}{=}(6g-6)+1-g=5g-5$, tenemos que L determina un incrustamiento cerrado $\varphi_L: C\hookrightarrow\mathbb{P}^{5g-6}$, cuya imagen $C_{tri}=\varphi_L(C)$ es una curva de grado $6g-6$ en $\mathbb{P}^{5g-6}$, llamada una curva tricanónica. Notar que:
$P(m):=h_{C_{tri}}(m)\overset{\text{def}}{=}\chi(C_{tri},\mathcal{O}_{C_{tri}}(m))=\chi(C,\mathcal{O}_C(3mK_C))\overset{RR}{=}3m(2g-2)+1-g=(6m-1)(g-1)$.
Esto es muy importante para construir el espacio de moduli $\mathcal{M}_g$, que es una variedad singular (en realidad, un "stack") cuyos puntos parametrizan clases de isomorfismo de curvas proy. suaves irred de género g (fijo): La idea es que existe (Grothendieck, 1961) un esquema de Hilbert $H:=\mathrm{Hilb}^P(X)$ que parametriza subvariedades Y de $X=\mathbb{P}^{5g-6}$ con $h_Y=P$ (fijo!), y un abierto $\mathcal{U}\subseteq H$ parametriza las curvas suaves. Finalmente, usando "Teoría Geométrica de Invariantes" (o "GIT", Mumford 1965) se construye $\mathcal{M}_g=\mathcal{U}/PGL_{5g-5}$.
Usando estas ideas, Deligne y Mumford construyen en 1969 una compactificación proyectiva e irreducible (!) $\overline{\mathcal{M}}_g$ de $\mathcal{M}_g$, y estudian sus propiedades. Por ejemplo, usando "Teoría de deformación" se prueba que $\dim_{[C]}(\mathcal{M}_g)=h^1(C,T_C)\overset{\text{Serre}}{=}h^0(C,\omega_C^{\otimes 2})\overset{RR}{=}3g-3$ (¡ esto último fue descubierto, con otros términos, por el mismo Riemann !).

Comentario final: Algunas referencias para leer sobre tópicos adicionales (eg. "Teorema de Riemann-Hurwitz", muy útil también!) sobre curvas algebraicas son:

① Geometría Algebraica: Hartshorne, "Algebraic Geometry", Capítulo IV.

② Geometría Analítica: Miranda, "Algebraic curves and Riemann Surfaces".

③ Geometría Aritmética: Liu, "Algebraic geometry and Arithmetic curves".