§37. Teorema de Riemann-Roch para curvas algebraicas

Recuerdo: Sea X una variedad alg. proyectiva suave e irreducible. Entonces (ver §23, p. 81), todo fibrado en rectas $L \in \operatorname{Pic}(X)$ es de la forma $L \cong \mathcal{O}_X(D)$ para cierto divisor de Cartier $D \in \operatorname{Div}(X)$ que es único módulo equivalencia lineal, i.e., si $L \cong \mathcal{O}_X(D')$ entonces $D \sim D'$ ($\overset{def}{\Leftrightarrow} \exists f \in k(X)^*$ tq $D - D' = \operatorname{div}(f)$). Más aún, dado que X es suave podemos identificar divisores de Cartier y divisores de Weil en X, i.e., podemos pensar a D como una suma finita formal

$$D = \sum_{\text{finita}} n_i \cdot Y_i \quad , \text{ con } n_i \in \mathbb{Z} \text{ e } Y_i \subseteq X \text{ hipersuperficie irreducible.}$$

En part, si $n_i \geq 0 \ \forall i$ decimos que D es un divisor efectivo, y escribimos $D \geq 0$ en tal caso.

El k-ev $H^0(X, L) \cong H^0(X, \mathcal{O}_X(D))$ es llamado el espacio de Riemann-Roch de D el cual, por el Teorema de finitud (ver §29, p. 100), es de dimensión finita. Usualmente, la dimensión de $H^0(X, \mathcal{O}_X(D))$ se denota $h^0(X, \mathcal{O}_X(D))$ o $h^0(X, D)$ (o simplemente $h^0(D)$), o más clásicamente $\ell(D)$. Explícitamente (ver §23, p. 82), tenemos que:

$$H^0(X, \mathcal{O}_X(D)) \cong \{f \in k(X)^* \text{ tq } \operatorname{div}(f) + D \geq 0\} \cup \{0\} \quad \text{y} \quad |D| := \mathbb{P} H^0(X, \mathcal{O}_X(D)) \cong \{E \geq 0 \text{ efectivo tq } E \sim D\}.$$

En 1857, Riemann estudia sistemas lineales de divisores en curvas algebraicas proyectivas suaves e irreducibles (en realidad, en "superficies de Riemann compactas"). En tal caso, un divisor en una curva C es una suma formal de la forma $D = \sum_{i=1}^{r} n_i \cdot p_i$ con $n_i \in \mathbb{Z}$ y $p_i \in C$ punto, y así podemos considerar la función grado (ver §23, p. 89) dada por:

$$\deg : \operatorname{Pic}(C) \twoheadrightarrow \mathbb{Z} \quad , \quad L \cong \mathcal{O}_C\left(\sum_{i=1}^{r} n_i \cdot p_i\right) \longmapsto \deg(L) := \sum_{i=1}^{n} n_i \quad \text{(bien definido)}.$$

En este contexto, Riemann prueba (para $k = \mathbb{C}$) que para todo $L \cong \mathcal{O}_C(D) \in \operatorname{Pic}(C)$:

$$\ell(D) \geq \deg(D) - g(C) + 1 \quad \text{("desigualdad de Riemann")},$$

donde $g(C) = \dim_k H^0(C, \omega_C)$ es el género de C (ver §26, p. 91), con $\Omega^1_C \cong \omega_C \cong \mathcal{O}_C(K_C)$ el fibrado en rectas canónico ($\dim(C) = 1$!). En 1865, Gustav Roch (estudiante de Riemann) prueba que la igualdad se alcanza al considerar un "término de corrección":

$$\ell(D) - \ell(K_C - D) = \deg(D) - g(C) + 1$$

obteniendo así el "Teorema de Riemann-Roch" (para $k = \mathbb{C}$).

Objetivo: En esta sección probaremos el Teorema de Riemann-Roch para todo $k = \bar{k}$ alg. cerrado. Para ello, usaremos métodos cohomológicos que además servirán para generalizar el resultado a fibrados vectoriales de rango ≥ 2 (un caso particular de Teo. de Hirzebruch-Riemann-Roch !).

Comencemos por reinterpretar el enunciado del Teorema de Riemann-Roch usando dualidad de Serre:

Recuerdo (ver §36, p. 120): Sea X var. alg. proyectiva suave e irreducible de $\dim(X) = n$. Entonces, para todo fibrado vectorial $E \to X$ tenemos que:

$$H^i(X, E) \cong H^{n-i}(X, E^\vee \otimes \omega_X)^\vee \text{ para todo } i \in \{0, 1, \ldots, n\}.$$

donde $\omega_X = \det(\Omega^1_X) \cong \mathcal{O}_X(K_X) \cong \Lambda^n \Omega^1_X$.

En particular, tenemos las siguientes consecuencias:

① Fibrados en rectas: Si $L \cong \mathcal{O}_X(D)$ es un fibrado en rectas en X, entonces $L^\vee \cong \mathcal{O}_X(-D)$ y la dualidad de Serre se reduce a $H^i(X, L) \cong H^{n-i}(X, L^\vee \otimes \omega_X)^\vee \Leftrightarrow H^i(X, \mathcal{O}_X(D)) \cong H^{n-i}(X, \mathcal{O}_X(K_X - D))^\vee$ y en particular $h^i(X, \mathcal{O}_X(D)) = h^{n-i}(X, \mathcal{O}_X(K_X - D))$.

② Números de Hodge: Si $E = \mathcal{O}_X$, entonces $H^i(X, \mathcal{O}_X) \cong H^{n-i}(X, \omega_X)^\vee$. Más generalmente, dado que $\omega_X \otimes (\Omega^{n-p}_X)^\vee \cong \Omega^p_X$ (ver §4, p. 17), con $\Omega^p_X := \Lambda^p \Omega^1_X$, tenemos que para $p + q = n$:

$$H^q(X, \Omega^p_X) \cong H^q(X, (\Omega^q_X)^\vee \otimes \omega_X) \cong H^p(X, \Omega^q_X)^\vee.$$

Así, si definimos el número de Hodge $h^{p,q}(X) := \dim_k H^q(X, \Omega^p_X)$, entonces $h^{p,q}(X) = h^{q,p}(X)$ para todos $p, q \geq 0$ tales que $p + q = n$.

<u>Caso particular importante</u>: En el caso de una <u>curva</u> (proy. suave vared.) C, tenemos:

① $h^1(C, \mathcal{O}_C(D)) \overset{\text{Serre}}{=} h^0(C, \mathcal{O}_C(K_C - D)) \overset{\text{dy}}{=} \ell(K_C - D)$.

② $g(C) \overset{\text{dy}}{=} h^0(C, \omega_C) \overset{\text{Serre}}{=} h^1(C, \mathcal{O}_C)$.

<u>Obs</u>: si C es una curva proy. irreducible (no necesariamente suave!), se define su <u>género aritmético</u> de C como $p_a(C) := h^1(C, \mathcal{O}_C)$, que está bien definido y coincide con $g(C)$ si C es suave.

Así, $\ell(D) - \ell(K_C - D)$ se reescribe como $h^0(C, \mathcal{O}_C(D)) - h^1(C, \mathcal{O}_C(D))$ y de manera similar $1 - g(C) = 1 - h^1(C, \mathcal{O}_C) = h^0(C, \mathcal{O}_C) - h^1(C, \mathcal{O}_C)$, pues C es proy. irreducible!

<u>Def</u>: sea X una variedad alg. proyectiva de $\dim(X) = n$, y sea $\mathcal{F}$ un haz coherente en X. Definimos la <u>característica de Euler-Poincaré</u> de $\mathcal{F}$ como:

$$\chi(X, \mathcal{F}) := \sum_{i \geq 0} (-1)^i h^i(X, \mathcal{F}) = h^0(X, \mathcal{F}) - h^1(X, \mathcal{F}) + \ldots + (-1)^n h^n(X, \mathcal{F}),$$

donde $h^i(X, \mathcal{F}) < +\infty \ \forall i \geq 0$ y $h^i(X, \mathcal{F}) = 0 \ \forall i > \dim(X)$ gracias a los teoremas de finitud y anulación de Grothendieck, respectivamente.

<u>Importante</u>: con esta notación, el Teorema de Riemann-Roch se reduce a probar que para todo $L \cong \mathcal{O}_C(D) \in \mathrm{Pic}(C)$ se tiene que $\chi(C, \mathcal{O}_C(D)) = \chi(C, \mathcal{O}_C) + \deg(D)$.

<u>Lema</u>: Sea $0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{G} \to \mathcal{H} \to 0$ una sucesión exacta de haces coherentes en una variedad alg. proyectiva X. Entonces, $\chi(X, \mathcal{G}) = \chi(X, \mathcal{F}) + \chi(X, \mathcal{H})$.

<u>Dem</u>: La sucesión exacta larga en cohomología $0 \to H^0(X, \mathcal{F}) \to H^0(X, \mathcal{G}) \to H^0(X, \mathcal{H}) \to H^1(X, \mathcal{F}) \to \ldots$ nos da una sucesión exacta $0 \to V_1 \xhookrightarrow{f_1} V_2 \xrightarrow{f_2} V_3 \to \ldots \to V_m \xrightarrow{f_m} 0 \xrightarrow{f_{m+1}} 0$ de k-ev de dimensión finita. Si denotamos $d_i := \dim_k(V_i)$ y $k_i := \dim_k \ker(f_i)$, entonces la exactitud y el Teorema del rango implican que $d_i = k_i + \mathrm{rg}(f_i) = k_i + k_{i+1}$. Luego,

$$\sum_{i=1}^{m} (-1)^i d_i = \sum_{i=1}^{m} (-1)^i (k_i + k_{i+1}) = \sum_{i=1}^{m} \left[(-1)^i k_i - (-1)^{i+1} k_{i+1} \right] = -k_1 - (-1)^{m+1} k_{m+1} = 0.$$

Así, $0 = h^0(X, \mathcal{F}) - h^0(X, \mathcal{G}) + h^0(X, \mathcal{H}) - h^1(X, \mathcal{F}) + \ldots$, i.e., $\chi(X, \mathcal{F}) - \chi(X, \mathcal{G}) + \chi(X, \mathcal{H}) = 0$ ■

En virtud del Lema anterior, necesitamos relacionar $\mathcal{O}_C(D)$ y $\mathcal{O}_C$.

<u>Recuerdo</u> (ver §23, p.82): Si $D = Y$ es una hipersuperficie irreducible en X var. alg. proyectiva suave e irreducible, entonces $\mathcal{I}_D \cong \mathcal{O}_X(-D)$ y luego tenemos una sucesión exacta de $\mathcal{O}_X$-módulos

$$0 \to \mathcal{O}_X(-D) \to \mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_D \to 0,$$

donde $j: D \hookrightarrow X$ encajamiento cerrado y $\mathcal{O}_D := j_* \mathcal{O}_D$ en X (que cumple $H^i(X, j_* \mathcal{O}_D) \cong H^i(D, \mathcal{O}_D) \ \forall i \geq 0$). Más generalmente, si $D = \sum_{i=1}^{r} n_i Y_i$ es un divisor <u>efectivo</u> (i.e., $n_i \geq 0$) entonces se tiene la <u>misma</u> sucesión exacta, pero $\mathcal{O}_D$ es el cociente de $\mathcal{O}_X$ por el ideal de funciones regulares que se anulan en Y_i con multiplicidad $\geq n_i$.

<u>Caso particular importante</u>: En el caso de una <u>curva</u> (proy. suave vared) C, si $D = \sum_{i=1}^{r} n_i p_i$ es un divisor efectivo, donde <u>sólo</u> escribimos los términos con $n_i \geq 1$, entonces

$$H^0(D, \mathcal{O}_D) \cong \bigoplus_{i=1}^{r} \mathcal{O}_{C, p_i} / \mathfrak{m}_{p_i}^{n_i}$$

y luego, dado que $\dim(D) = 0$, tenemos $\chi(D, \mathcal{O}_D) = h^0(D, \mathcal{O}_D) = n_1 + \ldots + n_r \overset{\text{dy}}{=} \deg(D)$.

Además, notamos que si $L \in \mathrm{Pic}(C)$ fibrado en rectas y $D = p$ es un punto, entonces (escogiendo una vecindad $\mathcal{U}$ de $p \in C$ tq $L|_{\mathcal{U}} \cong \mathcal{O}_{\mathcal{U}}$ trivial) tenemos por la fórmula de proyección (ver §29, p.100) que $L \otimes \mathcal{O}_D \overset{\text{dy}}{=} L \otimes j_* \mathcal{O}_D \cong j_*(j^* L \otimes \mathcal{O}_D) \cong j_* \mathcal{O}_D \overset{\text{dy}}{=} \mathcal{O}_D$: todo fibrado en rectas en un punto es trivial! Del mismo modo, $L \otimes \mathcal{O}_D \cong \mathcal{O}_D$ para todo D divisor <u>efectivo</u> en C.

Teorema de Riemann-Roch: Sea C una curva alg. proyectiva suave e irreducible, de género $g(C) = h^0(C, \omega_C) = h^1(C, \mathcal{O}_C)$. Entonces, para todo $L \cong \mathcal{O}_C(D) \in \mathrm{Pic}(C)$ se tiene que:
$$\chi(C, \mathcal{O}_C(D)) = \chi(C, \mathcal{O}_C) + \deg(D) \ , \text{ie} \ , \ \ell(D) - \ell(K_C - D) = \deg(D) - g(C) + 1 .$$

Dem: Escribimos el divisor D como diferencia de divisores efectivos $D = E - F$. Considerando E y F como subvariedades de dimensión 0 (en realidad, subesquemas) obtenemos las sucesiones exactas
$$0 \to \mathcal{O}_C(-E) \to \mathcal{O}_C \to \mathcal{O}_E \to 0 \quad \text{y} \quad 0 \to \mathcal{O}_C(-F) \to \mathcal{O}_C \to \mathcal{O}_F \to 0 \quad \text{en } C.$$
Tensorizando ambas por el fibrado en rectas $L = \mathcal{O}_C(E)$ y recordando que $L \otimes \mathcal{O}_E \cong \mathcal{O}_E$ y $L \otimes \mathcal{O}_F \cong \mathcal{O}_F$ (pues $\dim(E) = \dim(F) = 0$), obtenemos:
$$0 \to \mathcal{O}_C \to \mathcal{O}_C(E) \to \mathcal{O}_E \to 0 \quad \text{y} \quad 0 \to \mathcal{O}_C(E-F) \cong \mathcal{O}_C(D) \to \mathcal{O}_C(E) \to \mathcal{O}_F \to 0 .$$
De la primera sucesión exacta obtenemos $\chi(C, \mathcal{O}_C(E)) = \chi(C, \mathcal{O}_C) + \chi(E, \mathcal{O}_E)$ que, recordando que $\chi(E, \mathcal{O}_E) = \deg(E)$, se reduce a $\chi(C, \mathcal{O}_C(E)) = \chi(C, \mathcal{O}_C) + \deg(E)$. Por otro lado, de la segunda sucesión exacta obtenemos $\chi(C, \mathcal{O}_C(E)) = \chi(C, \mathcal{O}_C(D)) + \deg(F)$. Así:
$$\chi(C, \mathcal{O}_C(D)) = \chi(C, \mathcal{O}_C(E)) - \deg(F) = \chi(C, \mathcal{O}_C) + (\deg(E) - \deg(F)) = \chi(C, \mathcal{O}_C) + \deg(D) \ \checkmark \ \blacksquare$$

Algunas consecuencias directas: Sea C una curva alg (proy. suave irred) de $g(C) = g$.

① $D = K_C$ en $\ell(D) - \ell(K_C - D) = \deg(D) - g + 1$ se reduce a:
$$\ell(K_C) - \ell(0) \overset{\mathrm{def}}{=} h^0(C, \omega_C) - h^0(C, \mathcal{O}_C) = g - 1 \overset{RR}{=} \deg(K_C) - g + 1 \ , \ \text{ie},$$
$\deg(\omega_C) = \deg(K_C) = 2g - 2$. En part, $\deg(T_C) = \deg(-K_C) = 2 - 2g$.

② Recordemos que $\ell(D) = h^0(C, \mathcal{O}_C(D)) = 0$ si $\deg(D) < 0$ (sino, $\exists E \geq 0$ efectivo tq $E \sim D$ y luego $\deg(D) = \deg(E) \geq 0$ ↯). En particular, dado que
$$\deg(K_C - D) = 2g - 2 - \deg(D),$$
tenemos que si $\deg(D) \geq 2g - 1$, entonces $\ell(K_C - D) = 0$ (ie, $h^1(C, \mathcal{O}_C(D)) = 0$ por dualidad de Serre) y en tal caso $\ell(D) = \deg(D) - g + 1$. ($\Rightarrow \ell(D) \geq g$).

③ Si $\deg(D) = 2g - 2$ y $D \not\sim K_C$ (ie, $\nexists f \in k(C)^*$ tq $D - K_C = \mathrm{div}(f)$), entonces
$$\ell(D) = g - 1 .$$
En efecto, $\ell(D) \overset{RR}{=} 2g - 2 - g + 1 + \ell(K_C - D) = g - 1 + \ell(K_C - D)$. Si $\ell(K_C - D) \geq 1$ entonces existe $E \geq 0$ efectivo tq $E \sim K_C - D$ y luego $\deg(E) = \deg(K_C - D) = 0 \underset{E \geq 0}{\Rightarrow} E = 0$, ie, $D \sim K_C$.
En otras palabras, si $\deg(D) = \deg(K_C)$ entonces $D \sim K_C \iff \ell(K_C - D) = h^1(C, \mathcal{O}_C(D)) \neq 0$.

④ Curvas elípticas: Si $\omega_C \cong \mathcal{O}_C$ es trivial (ie, $K_C = 0$) entonces $g = h^0(C, \omega_C) = 1$.
Recíprocamente, si $g = 1$ entonces $\deg(K_C) = \deg(-K_C) = 0$ (por ①) y Riemann-Roch se reduce a $\ell(D) - \ell(K_C - D) = \deg(D)$. En part, si $D = -K_C$ obtenemos
$$\ell(-K_C) = \ell(2K_C) \geq 1 \quad (\text{pues } s \in H^0(C, \omega_C) \setminus \{0\} \text{ induce } s^{\otimes 2} \in H^0(C, \omega_C^{\otimes 2}) \text{ no-nula!})$$
Así, $h^0(C, \omega_C) \neq 0$ y $h^0(C, \omega_C^\vee) \neq 0 \Rightarrow \omega_C \cong \mathcal{O}_C$ (ver §21, p.73).
De este modo, $g(C) = 1 \iff \omega_C \cong \mathcal{O}_C$, y en tal caso decimos que C es una curva elíptica.
El Teorema de Riemann-Roch toma una forma particularmente sencilla para curvas elípticas:
$\ell(D) = \ell(-D) + \deg(D)$. Así, $\ell(D) = \deg(D)$ si $\deg(D) \geq 1$ y $\ell(D) = 0$ si $\deg(D) = 0$ y $D \not\sim 0$ (ie, si $\mathcal{O}_C(D) \cong \mathcal{O}_C$).

Corolario: Sea C una curva alg. proyectiva suave e irreducible, y sea $L \cong \mathcal{O}_C(D) \in \mathrm{Pic}(C)$. Entonces, L es amplio si y sólo si $\deg(L) \overset{\mathrm{def}}{=} \deg(D) > 0$.

Dem: Ya vimos (ver §23, pág 84) que si L es amplio entonces $\deg(L) > 0$. Supongamos que $\deg(D) > 0$, y notemos que por Riemann-Roch se tiene que para $m \gg 0$:

$\ell(mD) - \ell(\cancel{K_C^0} - mD) = h^0(C, \mathcal{O}_C(mD)) = m \deg(D) - g + 1 > 0$. Así, reemplazando L por $L^{\otimes m}$ si fuese necesario, podemos suponer que D es un divisor *efectivo*. Luego, tenemos:

$$0 \to \mathcal{O}_C(-D) \to \mathcal{O}_C \to \mathcal{O}_D \to 0 \ \underset{\otimes \mathcal{O}_C(mD)}{\rightsquigarrow} \ 0 \to \mathcal{O}_C((m-1)D) \to \mathcal{O}_C(mD) \to \mathcal{O}_D \to 0$$

sucesiones exactas. En cohomología, obtenemos la sucesión exacta larga:

$$0 \to H^0(C, \mathcal{O}_C((m-1)D)) \to H^0(C, \mathcal{O}_C(mD)) \to H^0(D, \mathcal{O}_D) \to H^1(C, \mathcal{O}_C((m-1)D)) \twoheadrightarrow H^1(C, \mathcal{O}_C(mD)) \to \overset{\dim(D)=0}{\overset{\downarrow}{0}}$$

sea $h_m = h^1(C, \mathcal{O}_C(mD))$, entonces $h_{m-1} \geq h_m \geq h_{m+1} \geq h_{m+2} \geq \dots$. Dado que $h_m < +\infty$, obtenemos que $H^1(C, \mathcal{O}_C((m-1)D)) \xrightarrow{\sim} H^1(C, \mathcal{O}_C(mD))$ es un isomorfismo para todo $m \gg 0$, i.e., $H^0(C, \mathcal{O}_C(mD)) \twoheadrightarrow H^0(D, \mathcal{O}_D) \cong \bigoplus_{i=1}^{r} \mathcal{O}_{C,p_i}/\mathfrak{m}_{p_i}^{n_i} \to 0$ sobreyectiva $\forall m \gg 0$, donde $D = \sum_{i=1}^{r} n_i \cdot p_i$ con $n_i > 0$ y $p_i \in C$. En part, el morfismo de evaluación $ev_x : H^0(C, \mathcal{O}_C(mD)) \twoheadrightarrow \mathcal{O}_C(mD)_x$ (cf. §29, p.100 y §24, p.86) es sobreyectivo para todo $x = p_i$ tq $D = \sum_{i=1}^{r} n_i \cdot p_i$ con $n_i > 0$. Por otro lado, $\exists s \in H^0(C, \mathcal{O}_C(mD))$ tq $\mathrm{div}(s) = mD$, y luego $s(x) \neq 0$ para $x \neq p_1, \dots, p_r$.

$\Rightarrow M = \mathcal{O}_C(mD)$ es un fibrado en rectas globalmente generado, i.e., $\varphi_M : C \to \mathbb{P}(H^0(C, M)^\vee) \cong \mathbb{P}^n$ es un morfismo regular. Dado que $M \not\cong \mathcal{O}_C$ (pues para $m \gg 0$ podemos suponer $\ell(mD) \geq 2$) tenemos que $\varphi_M : C \to \mathbb{P}^n$ es no-constante y *finito* (ver §35, p.119), de donde concluimos que $\varphi_M^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1) \cong M = \mathcal{O}_C(mD)$ es amplio, y luego $L = \mathcal{O}_C(D)$ es amplio también. ■

Consecuencia (cf. §26, p.90 y 91): sea C una curva alg. (proyectiva suave irred) con $g(C) = g$. Entonces, dado que $\deg(\omega_C) = 2g - 2$, el Corolario anterior implica que C es:

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{Fano} \\ \text{Calabi-Yau} \\ \text{Can. Polarizada} \end{array} \right\} \overset{\text{dy}}{\Longleftrightarrow} \left\{ \begin{array}{c} \omega_C^\vee \text{ amplio} \\ \omega_C \cong \mathcal{O}_C \\ \omega_C \text{ amplio} \end{array} \right\} \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} g = 0 \\ g = 1 \\ g \geq 2 \end{array} \right\} \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \kappa(C) = -\infty \\ \kappa(C) = 0 \\ \kappa(C) = 1 \end{array} \right\}.$$

La ventaja del uso de métodos cohomológicos es que podemos generalizar el Teorema de Riemann-Roch a fibrados vectoriales de rango ≥ 2.

Lema: sea C una curva alg. proyectiva suave e irreducible, sea $E \to C$ un fibrado vectorial de $rg(E) = r$. Entonces, E admite una "filtración" decreciente

$$E_1 \subseteq E_2 \subseteq \dots \subseteq E_{r-1} \subseteq E_r = E,$$

por subfibrados vectoriales $E_i \to C$ de $rg(E_i) = i$.

Dem: Argumentamos por inducción en $r \in \mathbb{N}^{\geq 1}$: OK si $r = 1$ ✓ Sup. que $r \geq 2$ y sea $C \hookrightarrow \mathbb{P}^n$ encajamiento cerrado. Recordemos que para $m \in \mathbb{Z}$ definimos $\mathcal{O}_C(m) := \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)|_C$ y, más generalmente, definimos $E(m) := E \otimes \mathcal{O}_C(m)$.

Luego, el "Lema" de Serre (ver §29, p.100) afirma que $E(m)$ es globalmente generado para $m \gg 0$. Por otro lado, dado que $rg(E(m)) = r \geq 2 > \dim(C) = 1$, tenemos en tal caso (ver §24, p.86 y §25, p.89) que $\exists s \in H^0(C, E(m)) \setminus \{0\}$ tal que $s(x) \neq 0$ $\forall x \in C$. Dicha sección determina, gracias a la "Obs. importante" en §29, p.100, un morfismo $\varphi_s : \mathcal{O}_C \hookrightarrow E(m)$ entre fibrados vectoriales que es inyectivo! Luego, tensorizando por $\mathcal{O}_C(-m)$ obtenemos

$$0 \to \mathcal{O}_C(-m) \hookrightarrow E \overset{\pi}{\twoheadrightarrow} Q \to 0$$

sucesión exacta de fibrados vectoriales (!). Sea $E_1 := \mathcal{O}_C(-m)$ de $rg(E_1) = 1$, y notamos que $Q = E/E_1$ es de $rg(Q) = r - 1$. Por ende, la hipótesis de inducción implica que existe

$$Q_2 \subseteq Q_3 \subseteq \dots \subseteq Q_{r-1} \subseteq Q_r = Q$$

filtración con $rg(Q_i) = i - 1$. Considerando los subfibrados $E_i := \pi^{-1}(Q_i)$ de $rg(E_i) = i$, obtenemos la filtración $E_1 \subseteq E_2 \subseteq \dots \subseteq E_{r-1} \subseteq E_r = E$ deseada. ■

Def: Sea C una curva alg. proyectiva suave e irreducible, y sea $E \to C$ un fibrado vectorial de $rg(E) = r$. Definimos el <u>grado de E</u> como el entero

$$\deg(E) := \deg(\det(E)) = \deg(\Lambda^r E),$$

donde $\det(E) \cong \Lambda^r E \in Pic(C)$ es un fibrado en rectas.

Con esta definición en mente, podemos generalizar el Teorema de Riemann-Roch:

<u>Teorema de Hirzebruch-Riemann-Roch</u> (para curvas!): Sea C una curva alg. proyectiva suave e irreducible de género $g(C) = g$. Entonces, para todo fibrado vectorial $E \to C$ de $rg(E) = r$ y $\deg(E) = d$, se tiene que:

$$\chi(C,E) = rg(E)\,\chi(C,\mathcal{O}_C) + \deg(E) = r(1-g) + d. \quad \text{(HRR)}$$

<u>Dem</u>: Argumentamos por inducción en $r \in \mathbb{N}^{\geq 1}$: OK si $r = 1$ ✓ Sup. que $r \geq 2$ y consideremos una filtración

$$E_1 \subseteq E_2 \subseteq \ldots \subseteq E_{r-1} \subseteq E_r = E$$

por subfibrados vectoriales de $rg(E_i) = i$. Entonces, la inclusión $E_i \subseteq E_{i+1}$ induce

$$0 \to E_i \hookrightarrow E_{i+1} \twoheadrightarrow L_i \to 0$$

sucesión exacta de fibrados vectoriales en C, con $L_i \in Pic(C)$. Así, nos reducimos a probar que para toda sucesión exacta $0 \to E \hookrightarrow F \twoheadrightarrow Q \to 0$ de fibrados vectoriales en C se tiene que: HRR para E y para Q, implican HRR para F.
Esto último resulta de observar que $rg(F) = rg(E) + rg(Q)$, que $\det(F) \cong \det(E) \otimes \det(Q)$ y por ende $\deg(F) = \deg(E) + \deg(Q)$, y que $\chi(C,F) = \chi(C,E) + \chi(C,Q)$. ∎

Una aplicación típica del Teorema de HRR para curvas es el estudio de "extensiones":

<u>Construcción</u> (extensión de fibrados vectoriales):
Sea X una variedad alg. proyectiva suave e irreducible, y sean E y Q fibrados vectoriales en X. Una <u>extensión de Q por E</u> es una sucesión exacta de fibrados vectoriales

$$0 \longrightarrow E \xhookrightarrow{\alpha} F \xrightarrow{\beta} Q \longrightarrow 0 \qquad (S)$$

Decimos que la extensión (S) es <u>trivial</u> (o que <u>escinde</u>) si $F \cong E \oplus Q$.

Ejercicio (S) es trivial $\Leftrightarrow$ $\exists$ una "sección" $s: Q \to F$ tal que $\beta \circ s = Id_Q$.

<u>Indicación</u>: Para todo $x \in X$, cada $v \in F_x$ pertenece a $\ker(\beta)_x + Im(s)_x$ puesto que tenemos $v = (v - (s\circ\beta)(v)) + (s\circ\beta)(v)$. Además, $\ker(\beta)_x \cap Im(s)_x = 0$ pues $\beta(v) = 0$ y $s(w) = v$ implica $0 = (\beta\circ s)(w) = w$. Como $E \cong Im(\alpha) \cong \ker(\beta)$, y como $\beta\circ s = Id_Q$ implica s inyectiva y por ende $Im(s) \cong Q$, se concluye que $F \cong E \oplus Q$.

En part, si $Q = L \in Pic(X)$ fibrado en rectas, entonces tenemos

$$0 \to E\otimes L^\vee \xhookrightarrow{i} F \otimes L^\vee \xrightarrow{\pi} \mathcal{O}_X \to 0 \qquad (S)\otimes L^\vee.$$

Luego, (S) es trivial $\Leftrightarrow \exists\, s: \mathcal{O}_X \to F\otimes L^\vee$ tq $\pi\circ s = Id_{\mathcal{O}_X}$. En virtud de la "Obs importante" en §29, p.100, esto equivale a que $\exists\, s \in H^0(X, F\otimes L^\vee)$ tq $\Gamma(\pi)(s) = 1 \in H^0(X,\mathcal{O}_X)$ (✱).
Al considerar la sucesión exacta larga

$$\ldots \to H^0(X, F\otimes L^\vee) \xrightarrow{\Gamma(\pi)} H^0(X,\mathcal{O}_X) \xrightarrow{\delta} H^1(X, E\otimes L^\vee) \to \ldots,$$

y usando que $Im(\Gamma(\pi)) = \ker(\delta)$, tenemos que (✱) equivale a que $\delta_{(S)} := \delta(1)$ sea 0 en $H^1(X, E\otimes L^\vee)$ ($\cong Ext^1(L,E)$!).

<u>Conclusión</u>: La extensión (S) es trivial $\Leftrightarrow \delta_{(S)} = 0$ en $H^1(X, E\otimes L^\vee)$.

<u>Teorema de Birkhoff-Grothendieck</u>: Sea $E \to \mathbb{P}^1$ un fibrado vectorial de $rg(E) = r$ en $\mathbb{P}^1$. Entonces, $E \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(d_1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(d_2) \oplus \dots \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(d_r)$ para únicos enteros $d_1 \leq d_2 \leq \dots \leq d_r$.

<u>Dem</u>: Comenzamos por ilustrar el caso $r=2$: Reemplazando E por $E(m) := E \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(m)$ y notando que $\det(E(m)) \cong \det(E) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(2m)$ pues $r=2$, tenemos que $\deg(E(m)) = \deg(E) + 2m$. Así, podemos sup. que $d = \deg(E) = 0$ ó -1 (dependiendo de la paridad). Para $C = \mathbb{P}^1$:
$\overset{HRR}{\Rightarrow} h^0(C,E) = 2(1 - \overset{0}{g(\mathbb{P}^1)}) + d + h^1(C,E) \geq d+2 \geq 1$, y luego $\exists\, s \in H^0(\mathbb{P}^1, E) \setminus \{0\}$ que corresponde a $s: \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} \to E$, i.e., $s^\vee : E^\vee \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}$. La imagen $Im(s^\vee)$ es un haz de ideales de $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}$ y luego $Im(s^\vee) \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-D) \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-k)$ para cierto $D \geq 0$ divisor efectivo de grado $k \geq 0$. Así, $E^\vee \twoheadrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-k) \to 0$ es sobreyectiva y por ende tenemos

$$(S) \qquad 0 \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(k) \hookrightarrow E \twoheadrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(a) \to 0 \quad , \text{ con } a+k = d \text{ , i.e. , } a = d-k.$$

La clase $\delta_{(S)}$ de la extensión es un elemento de $H^1(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(2k-d)) = 0$ (pues $2k-d \geq -1$: ver §29, p. 99 !), y luego $E \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(k) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(d-k)$. suma directa ✓

El caso general se trata por inducción en r y sigue las mismas ideas:
Si $m >> 0$ entonces $H^1(\mathbb{P}^1, E^\vee(m) \otimes \omega_{\mathbb{P}^1}) = 0$ por anulación de Serre, y luego por dualidad de Serre $H^0(\mathbb{P}^1, E(-m)) = 0$. Sea m el entero más grande tal que $h^0(\mathbb{P}^1, E(-m)) \neq 0$ (por HRR esto ocurre para algún m, tal como antes!) y consideramos el morfismo sobreyectivo $(E(-m))^\vee \twoheadrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-k)$ dado por una sección (tal como antes), que nos da $0 \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(k) \hookrightarrow E(-m)$ y luego $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} \hookrightarrow E(-m-k)$ sección no nula de $E(-m-k)$.
Por maximalidad de m, tenemos que $k=0$ y obtenemos la sucesión exacta

$$0 \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(m) \hookrightarrow E \to Q \to 0 \qquad (S)$$

con $Q \cong \bigoplus_{i=1}^{r-1} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(d_i)$ por hipótesis de inducción.

Notamos que $d_i \leq m$ para todo i, pues si por ejemplo $\ell = d_1 - m - 1 \geq 0$ entonces:
$0 \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-1) \to E(-m-1) \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(\ell) \oplus Q' \to 0 \rightsquigarrow 0 \to H^0(\mathbb{P}^1, E(-m-1)) \xrightarrow{\sim} \underbrace{H^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(\ell))}_{\dim \geq 1} \oplus H^0(\mathbb{P}^1, Q') \to 0$
pues $h^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-1)) = h^1(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-1)) = 0$, lo que contradice la maximalidad de m!

Considerando la sucesión exacta dual de (S) obtenemos la extensión

$$0 \to \bigoplus_{i=1}^{r-1} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-d_i) \hookrightarrow E^\vee \twoheadrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-m) \to 0 \qquad (S)^\vee$$

cuya clase $\delta_{(S)^\vee}$ pertenece a $H^1(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(m) \otimes Q^\vee) \simeq \bigoplus_{i=1}^{r-1} H^1(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(m-d_i)) = 0$ pues $m - d_i \geq 0$ (ver §29, p. 99)! Luego, $E \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(m) \oplus Q$ ✓

Finalmente, la unicidad de los $d_1 \leq \dots \leq d_r$ se deduce del hecho que podemos recuperar cada d_i a partir de las dimensiones $h^i(\mathbb{P}^1, E(m))$ para $i = 0, 1$ y $m \in \mathbb{Z}$ (Ejercicio). ■

<u>Cultura general</u>: Si C es una curva alg. proy. suave e irreducible tq $C \not\cong \mathbb{P}^1$, entonces es posible construir $E \to C$ fibrados vectoriales de $rg(E) = 2$ que <u>no</u> son suma directa de fibrados en rectas (ver, por ejemplo, el libro de A. Beauville "Complex Algebraic Surfaces" capítulo III, p. 32).

Del mismo modo, existen fibrados vectoriales en $\mathbb{P}^n$ con $n \geq 2$ que <u>no</u> son suma directa de fibrados en rectas. Una excelente referencia es el libro "Vector bundles on complex projective spaces" por Okonek, Schneider y Spindler.

<u>Conjetura</u> (Hartshorne): Todo fibrado de rango 2 en $\mathbb{P}^n$ es suma directa de fibrados en rectas si $n \geq 7$.