§36. Dualidad de Grothendieck y dualidad de Serre

En 1955, J.-P. Serre publica su artículo "Un teorema de dualidad" donde, usando técnicas L^2 para estudiar formas diferenciales armónicas (teoría de Hodge), prueba que si E es un fibrado vectorial (holomorfo) en una variedad compacta compleja, entonces:

$$H^i(X,E) \cong H^{n-i}(X, E^\vee \otimes \omega_X)^\vee \quad \text{, donde } n = \dim(X) \text{ y } \omega_X = \det(\Omega^1_X).$$

El 15 de diciembre de 1955, Grothendieck envía una carta a Serre:

"Pensando un poco sobre tu teorema de dualidad, me di cuenta que su generalización es más o menos evidente y que se encuentra implícitamente en tu artículo (...). Estoy muy convencido, bastardo, que las secciones §3 y §4 del Cap. 3 se pueden hacer sin ningún cálculo".

En 1957, Grothendieck da un seminario Bourbaki titulado "Teoremas de dualidad para haces algebraicos coherentes", donde demuestra (una versión más general de):

Teorema de dualidad de Grothendieck: sea X una variedad alg. proyectiva suave e irreducible de $\dim(X) = n$, y sea $\omega_X = \det(\Omega^1_X)$ su fibrado en rectas canónico. Entonces:

① $\dim_k H^n(X,\omega_X) = 1$. En part, toda aplicación k-lineal no-nula $t : H^n(X,\omega_X) \xrightarrow{\sim} k$ es un isomorfismo. Decimos que dicho t es un morfismo de traza (o simplemente, una traza).

② Sea $\mathcal{F}$ un haz coherente en X. Para toda traza $t: H^n(X,\omega_X) \xrightarrow{\sim} k$ asociamos un morfismo de funtores contravariantes (!) en $\mathcal{F}$ (transf. natural):

$$D : \mathrm{Hom}_X(\mathcal{F}, \omega_X) \longrightarrow H^n(X,\mathcal{F})^\vee \ , \ f \longmapsto D(f) := t \circ H^n(f) \ ,$$

donde $H^n(f) : H^n(X,\mathcal{F}) \longrightarrow H^n(X,\omega_X)$ es el morfismo en cohomología inducido por $f:\mathcal{F} \to \omega_X$. Entonces, $D : \mathrm{Hom}_X(\cdot, \omega_X) \xrightarrow{\sim} H^n(X,\cdot)^\vee$ es un isomorfismo.

③ El isomorfismo D se extiende a un isomorfismo functorial en $\mathcal{F}$ (transf. natural):

$$D : \mathrm{Ext}^i(\mathcal{F},\omega_X) \xrightarrow{\sim} H^{n-i}(X,\mathcal{F})^\vee \quad \text{para todo } i \geq 0 .$$

En particular, la elección de una traza $t : H^n(X,\omega_X) \xrightarrow{\sim} k$ determina un emparejamiento perfecto $\mathrm{Ext}^i(\mathcal{F},\omega_X) \times H^{n-i}(X,\mathcal{F}) \longrightarrow k$.

Recuerdo (Ext y $\mathcal{E}xt$): sea X una variedad algebraica y $\mathcal{F}$ un $\mathcal{O}_X$-módulo. Entonces, el funtor $\mathrm{Hom}_X(\mathcal{F},\cdot) : \mathcal{O}_X\text{-}\underline{\mathrm{Mod}} \to \underline{\mathrm{Ab}}$ (resp. $\mathcal{H}om(\mathcal{F},\cdot) : \mathcal{O}_X\text{-}\underline{\mathrm{Mod}} \to \mathcal{O}_X\text{-}\underline{\mathrm{Mod}}$) dados por $\mathcal{G} \mapsto \mathrm{Hom}_X(\mathcal{F},\mathcal{G})$ (resp. $\mathcal{G} \mapsto \mathcal{H}om(\mathcal{F},\mathcal{G})$) es exacto por la izquierda. Los funtores derivados se denotan $\mathrm{Ext}^i(\mathcal{F},\mathcal{G})$ y $\mathcal{E}xt^i(\mathcal{F},\mathcal{G})$, respectivamente (ver §32, pág 109).

Además, si $\mathcal{E}$ es un $\mathcal{O}_X$-módulo localmente libre de rango r (i.e., el haz de secciones de un fibrado vectorial $E \to X$ de rango r), entonces $\mathrm{Ext}^i(\mathcal{E},\mathcal{F}) \cong H^i(X, \mathcal{E}^\vee \otimes \mathcal{F})$ $\forall i \geq 0$ (ver §32, p.110)

De este modo, la dualidad de Grothendieck implica:

Teorema de dualidad de Serre: sea X una variedad alg. proyectiva suave e irreducible de $\dim(X) = n$, y sea $\omega_X = \det(\Omega^1_X)$. Entonces para todo fibrado vectorial $E \to X$, la elección de una traza $t : H^n(X,\omega_X) \xrightarrow{\sim} k$ determina un emparejamiento perfecto

$$H^i(X,E) \times H^{n-i}(X, E^\vee \otimes \omega_X) \longrightarrow k \quad \text{para todo } i \geq 0 .$$

En particular, $H^i(X,E) \cong H^{n-i}(X,E^\vee \otimes \omega_X)^\vee$.

Dem: Aplicar dualidad de Grothendieck y usar que $H^{n-i}(X, E^\vee \otimes \omega_X) \cong \mathrm{Ext}^{n-i}(\mathcal{E},\omega_X)$ ✓ ■

Así, "basta" probar la dualidad de Grothendieck! En esta sección, nos contentaremos con dar las ideas generales de la demostración. Más detalles pueden encontrarse en el apunte de R. Vakil (Ch. 30) y en el libro de Hartshorne (Ch. III.7).

Comenzamos por describir la estrategia de la prueba. Esto nos permitirá identificar los pasos "simples" de aquellos que requieren más trabajo y/o nuevas herramientas:

Estrategia de demostración

Paso 1 Caso $X = \mathbb{P}^n$, donde $\omega_{\mathbb{P}^n} \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-n-1)$: ya calculamos (ver §29, p.99) que $H^n(\mathbb{P}^n, \omega_{\mathbb{P}^n}) \cong k$, ie, ① OK para $\mathbb{P}^n$ ✓ En part, escogiendo una traza $t: H^n(\mathbb{P}^n, \omega_{\mathbb{P}^n}) \xrightarrow{\sim} k$, obtenemos (de manera functorial) un morfismo $D: \mathrm{Hom}(\mathcal{F}, \omega_{\mathbb{P}^n}) \to H^n(\mathbb{P}^n, \mathcal{F})^\vee$ para todo haz coherente $\mathcal{F}$ en $\mathbb{P}^n$. ■

Paso 2 D es un isomorfismo: Lo más importante es notar que $\mathrm{Hom}(\cdot, \omega_{\mathbb{P}^n})$ y $H^n(\mathbb{P}^n, \cdot)^\vee$ son functores contravariantes (!) exactos por la izquierda, ie, si $(0 \to) \mathcal{F} \to \mathcal{G} \to \mathcal{H} \to 0$ sucesión exacta de haces coherentes en $\mathbb{P}^n$, entonces las sucesiones

$0 \to \mathrm{Hom}(\mathcal{H}, \omega_{\mathbb{P}^n}) \to \mathrm{Hom}(\mathcal{G}, \omega_{\mathbb{P}^n}) \to \mathrm{Hom}(\mathcal{F}, \omega_{\mathbb{P}^n})$ y $0 \to H^n(\mathbb{P}^n, \mathcal{H})^\vee \to H^n(\mathbb{P}^n, \mathcal{G})^\vee \to H^n(\mathbb{P}^n, \mathcal{F})^\vee$ (*)

son exactas. ↑ anulación de Grothendieck!

Por otro lado, sabemos (ver §29, p.100) que para todo haz coherente $\mathcal{F}$ en $\mathbb{P}^n$ existe $r \in \mathbb{N}^{\geq 1}$ y $m \gg 0$ tq $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-m)^{\oplus r} \twoheadrightarrow \mathcal{F}$ sobreyectivo. Así, (*) nos permite escribir

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \longrightarrow & \mathrm{Hom}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-m), \omega_{\mathbb{P}^n})^{\oplus r} & \longrightarrow & \mathrm{Hom}(\mathcal{F}, \omega_{\mathbb{P}^n}) \\ \| & & \downarrow D & & D \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & H^n(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-m))^{\vee \oplus r} & \longrightarrow & H^n(\mathbb{P}^n, \mathcal{F})^\vee \end{array}$$

y reducimos a verificar que $D: \mathrm{Hom}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-m), \omega_{\mathbb{P}^n}) \cong H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(m) \otimes \omega_{\mathbb{P}^n}) \xrightarrow{\sim} H^n(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-m))^\vee$ es un isomorfismo, ie, $\exists$ emparejamiento perfecto para todo m

$$H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(m) \otimes \omega_{\mathbb{P}^n}) \times H^n(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-m)) \to H^n(\mathbb{P}^n, \omega_{\mathbb{P}^n}) \cong k$$

Esto último ya lo verificamos usando cohomología de Čech (ver §29, p.99)! Así, ② OK para $\mathbb{P}^n$ ✓ ■

Paso 3 Extender $D: \mathrm{Hom}(\mathcal{F}, \omega_{\mathbb{P}^n}) \xrightarrow{\sim} H^n(\mathbb{P}^n, \mathcal{F})^\vee$ a un isomorfismo $D: \mathrm{Ext}^i(\mathcal{F}, \omega_{\mathbb{P}^n}) \xrightarrow{\sim} H^{n-i}(\mathbb{P}^n, \mathcal{F})^\vee$ para todo $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$: Aquí necesitamos nuevas herramientas! Los "δ-functores" (también llamados "functores cohomológicos") permiten probar ③ para $\mathbb{P}^n$.

Paso 4 Caso general $X \overset{j}{\hookrightarrow} Y$, donde $Y = \mathbb{P}^{n+r}$ (ie, $\mathrm{codim}_Y(X) = r$): La primera observación es que para todo haz coherente $\mathcal{F}$ en X tenemos (ver §28, p.98) que $H^{n-i}(X, \mathcal{F}) \cong H^{n-i}(Y, j_*\mathcal{F})$. Así, ya probada la dualidad de Grothendieck en $Y = \mathbb{P}^{n+r}$, tenemos que:

$$H^{n-i}(X, \mathcal{F})^\vee \cong H^{n-i}(Y, j_*\mathcal{F})^\vee \underset{\text{dualidad}}{\cong} \mathrm{Ext}^{n+r-(n-i)}(j_*\mathcal{F}, \omega_Y) = \mathrm{Ext}^{i+r}(j_*\mathcal{F}, \omega_Y)$$

Así, nos reducimos a probar el isomorfismo $\mathrm{Ext}^i(\mathcal{F}, \omega_X) \cong \mathrm{Ext}^{i+r}(j_*\mathcal{F}, \omega_Y)$!

Esto último es la parte más delicada de la demostración, y requiere relacionar los haces Ext con los grupos Ext: daremos las ideas generales de cómo probarlo.

Obs: una vez probado que $\mathrm{Ext}^i(\mathcal{F}, \omega_X) \cong H^{n-i}(X, \mathcal{F})^\vee$ para todo $i \geq 0$ notamos que:
a) $i = 0$ implica que $\mathrm{Hom}(\mathcal{F}, \omega_X) \cong H^n(X, \mathcal{F})^\vee$, ie, ② OK ✓
b) $i = n$ y $\mathcal{F} = \omega_X$ implica que $H^n(X, \omega_X) \cong \mathrm{Hom}(\omega_X, \omega_X)^\vee \cong H^0(X, \omega_X^\vee \otimes \omega_X)^\vee \cong H^0(X, \mathcal{O}_X)^\vee \cong k$, ie, ① OK ✓

Comencemos por completar el Paso 3 de la demostración:

Def: Un δ-functor entre dos categorías abelianas $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ consiste una colección $\{T^i: \mathcal{C} \to \mathcal{D}\}_{i \in \mathbb{N}}$ de functores contravariantes junto con morfismos de conexión $\delta^i: T^i(A) \to T^{i+1}(C)$ para toda sucesión exacta corta $0 \to A \to B \to C \to 0$ en $\mathcal{C}$, verificando que:

① Para toda sucesión exacta corta $0 \to A \to B \to C \to 0$ en $\mathcal{C}$, la sucesión en $\mathcal{D}$ dada por

$$\cdots \to T^i(C) \to T^i(B) \to T^i(A) \xrightarrow{\delta^i} T^{i+1}(C) \to T^{i+1}(B) \to T^{i+1}(A) \to \cdots$$ es exacta.

② Para todo morfismo de sucesiones exactas cortas en $\mathcal{C}$

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & A & \to & B & \to & C & \to & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \to & A' & \to & B' & \to & C' & \to & 0 \end{array}$$

el diagrama
$$\begin{array}{ccc} T^i(A') & \xrightarrow{\delta^i} & T^{i+1}(C') \\ \downarrow & & \downarrow \\ T^i(A) & \xrightarrow{\delta^i} & T^{i+1}(C) \end{array}$$
es conmutativo.

<u>Ejemplo principal</u>: sea X variedad alg. proyectiva suave e irreducible de $\dim(X) = n$, y sea $\omega_X = \det(\Omega^1_X)$ fibrado en rectas canónico. Entonces, los functores contravariantes

$$\{\mathcal F \longmapsto \operatorname{Ext}^i(\mathcal F, \omega_X)\}_{i\in\mathbb N} \quad y \quad \{\mathcal F \longmapsto H^{n-i}(X,\mathcal F)^\vee\}_{i\in\mathbb N}$$

desde la categoría de $\mathcal O_X$-módulos a la categoría de k-ev, son δ-functores.

<u>Def</u>: sea $F : \mathcal C \to \mathcal D$ un functor <u>contravariante</u> entre dos categorías abelianas. Decimos que F es <u>borrable</u> ("effaçable") si para todo objeto A de $\mathcal C$ existe un morfismo sobreyectivo $P \overset{u}{\twoheadrightarrow} A$ tal que $F(u) : F(A) \to F(P)$ sea nulo.

<u>Ejemplo principal</u>: En $\mathbb P^n$, los functores $\mathcal F \mapsto \operatorname{Ext}^i(\mathcal F, \omega_{\mathbb P^n})$ y $\mathcal F \mapsto H^{n-i}(X,\mathcal F)^\vee$ son borrables para todo $i \geq 1$ y todo haz <u>coherente</u> $\mathcal F$ en $\mathbb P^n$. En efecto, escribiendo $\mathcal P := \mathcal O_{\mathbb P^n}(-m)^{\oplus r} \overset{u}{\twoheadrightarrow} \mathcal F$ para $r \in \mathbb N^{\geq 1}$ y $m \gg 0$, tenemos que basta probar que

$$\operatorname{Ext}^i(\mathcal O_{\mathbb P^n}(-m), \omega_{\mathbb P^n}) \cong H^i(\mathbb P^n, \mathcal O_{\mathbb P^n}(m)\otimes \omega_{\mathbb P^n}) = 0 \quad y \quad H^{n-i}(\mathbb P^n, \mathcal O_{\mathbb P^n}(-m)) = 0 \quad \text{para } i \geq 1.$$

Esto se deduce directamente del cálculo de $h^i(\mathbb P^n, \mathcal O_{\mathbb P^n}(d))$ en §29, pág 99. ✓

<u>Teorema</u>: Sean S y T dos δ-functores entre categorías abelianas $\mathcal C$ y $\mathcal D$. Supongamos que para todo $i \geq 1$ el functor $S^i : \mathcal C \to \mathcal D$ es <u>borrable</u>. Entonces, todo morfismo functorial $f^0 : S^0 \to T^0$ se extiende en un único morfismo functorial $f^i : S^i \to T^i$ compatible con los morfismos de conexión.

<u>Dem</u>: Se construye $f^i : S^i \to T^i$ por inducción en $i \in \mathbb N$: sea A un objeto de $\mathcal C$ y $P \overset{u}{\twoheadrightarrow} A$ sobreyectivo tal que $S^{i+1}(u) = 0$. Sea $K = \ker(u)$ y consideramos $0 \to K \overset{j}{\hookrightarrow} P \overset{u}{\twoheadrightarrow} A \to 0$ sucesión exacta corta en $\mathcal C$. Ella induce

$$(\bigstar)\quad \begin{tikzcd}
S^i(A) \arrow[r, "S^i(u)"] \arrow[d, "f^i_A"'] & S^i(P) \arrow[r, "S^i(j)"] \arrow[d, "f^i_P"'] & S^i(K) \arrow[r, two heads, "\delta^i_S"] \arrow[d, "f^i_K"'] & S^{i+1}(A) \arrow[r, "\text{pues } S^{i+1}(u)=0"] \arrow[d, dashed, "\exists ?\, f^{i+1}_A"] & 0 \\
T^i(A) \arrow[r, "T^i(u)"] & T^i(P) \arrow[r, "T^i(j)"] & T^i(K) \arrow[r, "\delta^i_T"] & T^{i+1}(A)
\end{tikzcd}$$

donde las filas son <u>exactas</u>. Gracias al Teorema de Freyd-Mitchell (ver §31, p. 106) podemos construir $f_A^{i+1} : S^{i+1}(A) \to T^{i+1}(A)$ de manera única usando "cacería de diagramas": si $x \in S^{i+1}(A)$ consideramos $y \in S^i(K)$ tq $\delta^i_S(y) = x$ y definimos $f^{i+1}_A(x) := (\delta^i_T \circ f^i_K)(y) \in T^{i+1}(A)$. Para ver que está bien definido consideramos $y' \in S^i(K)$ tq $\delta^i_S(y') = x$ (y luego $y - y' \in \ker(\delta^i_S)$) para luego verificar que $(\delta^i_T \circ f^i_K)(y) = (\delta^i_T \circ f^i_K)(y')$ (y luego $y - y' \in \ker(\delta^i_T \circ f^i_K)$). La inclusión $\ker(\delta^i_S) \subseteq \ker(\delta^i_T \circ f^i_K)$, así como el hecho que f^{i+1} no depende de P y que es functorial en A, se deducen de $(\bigstar)$ por cacería de diagramas (cf. Lang "Algebra", pág 801). ∎

<u>Corolario</u>: Sean S y T dos δ-functores entre categorías abelianas $\mathcal C$ y $\mathcal D$. Supongamos que los functores S^i y T^i son <u>borrables</u> $\forall i \geq 1$. Entonces, todo isomorfismo functorial $D^0 : S^0 \xrightarrow{\sim} T^0$ se extiende a un único isomorfismo functorial $D^i : S^i \xrightarrow{\sim} T^i$ $\forall i \geq 0$ compatible con los morfismos de conexión. ∎

<u>Consecuencia</u>: El isomorfismo $D : \operatorname{Hom}(\cdot, \omega_{\mathbb P^n}) \xrightarrow{\sim} H^n(\mathbb P^n, \cdot)^\vee$ del Paso 2 se extiende de manera única a isomorfismos functoriales $D : \operatorname{Ext}^i(\cdot, \omega_{\mathbb P^n}) \xrightarrow{\sim} H^{n-i}(\mathbb P^n, \cdot)^\vee$ $\forall i \geq 0$.
Así, ③ OK para $\mathbb P^n$ y con ello concluimos el Paso 3. ∎

Para probar el Paso 4 (y concluir la demostración) nos resta probar que si X e Y son var. alg. proyectivas suaves e irreducibles con $\dim(X) = n$, $\dim(Y) = n + r$ y $j : X \hookrightarrow Y$ es un encajamiento cerrado, entonces:

$$\operatorname{Ext}^i(\mathcal F, \omega_X) \cong \operatorname{Ext}^{i+r}(j_*\mathcal F, \omega_Y) \quad \text{para todo } i \geq 0 \qquad (DG)$$

y para todo haz coherente $\mathcal F$ en X.

Recordemos que ω_X y ω_Y están relacionados mediante la <u>fórmula de adjunción</u> (ver §26, p. 90):

$$\omega_X \cong \omega_Y|_X \otimes \det(\mathcal N_{X/Y}) \overset{d}{=} j^*\omega_Y \otimes \det(\mathcal N_{X/Y}),$$

donde $N_{X/Y}$ es el fibrado normal de X en Y, de $\mathrm{rg}(N_{X/Y}) = r$. Más aún, si $X = V(s)$ para cierta sección $s \in H^0(Y,E)\setminus\{0\}$ de $E \to Y$ fibrado vectorial de $\mathrm{rg}(E) = r$, entonces $N_{X/Y} \cong E|_X$ (ver §25, pág 89) y luego $\omega_X \cong (\omega_Y \otimes \det(E))|_X \overset{\text{dy}}{=} j^*(\omega_Y \otimes \det(E))$ en este caso.

Por otro lado, la <u>fórmula de proyección</u> (ver §29, p.100) afirma que si $\mathcal{E}$ es localmente libre en Y y si $\mathcal{F}$ es un $\mathcal{O}_X$-módulo, entonces $\mathcal{E} \otimes j_*\mathcal{F} \cong j_*(j^*\mathcal{E} \otimes \mathcal{F})$ en Y. Al combinarlas nos da:
$j_*\omega_X \cong j_*(j^*\omega_Y \otimes \det(N_{X/Y})) \cong \omega_Y \otimes j_*\det(N_{X/Y})$ o bien $j_*\omega_X \cong \omega_Y \otimes \det(E)$ si $X = V(s)$.

$\boxed{\text{Ejercicio útil}}$ Sea $\mathcal{E}$ loc. libre en Y y sean $\mathcal{G}$ y $\mathcal{H}$ dos $\mathcal{O}_Y$-módulos. Probar que $\forall i \geq 0$:
$$\mathcal{E}xt^i(\mathcal{G} \otimes \mathcal{E}^\vee, \mathcal{H}) \cong \mathcal{E}xt^i(\mathcal{G}, \mathcal{E} \otimes \mathcal{H}) \cong \mathcal{E}xt^i(\mathcal{G}, \mathcal{H}) \otimes \mathcal{E}.$$

[<u>Indicación</u>: Las ideas de §32, p.110 (usando las propiedades de $\mathcal{H}om$ y $\otimes$) permiten concluir ✓]

En part, el Ejercicio asegura que $\mathcal{E}xt^i(\mathcal{G}, \mathcal{O}_Y) \otimes \omega_Y \cong \mathcal{E}xt^i(\mathcal{G}, \omega_Y)$ $\forall i \geq 0$.

[<u>Hecho clave</u> (!):
$$\mathcal{E}xt^i(j_*\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_Y) \cong \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq r \\ j_*\det(N_{X/Y}) & \text{si } i = r \end{cases} \underset{\text{Adjunción}}{\overset{\text{Ejercicio}}{\Longrightarrow}} \mathcal{E}xt^i(j_*\mathcal{O}_X, \omega_Y) \cong \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq r \\ j_*\omega_X & \text{si } i = r \end{cases}$$
]

¿Cómo el <u>Hecho clave</u> permite probar que $\mathrm{Ext}^i(\mathcal{F}, \omega_X) \cong \mathrm{Ext}^{i+r}(j_*\mathcal{F}, \omega_Y)$ y así concluir?
Recordemos que (por definición!) para calcular Ext necesitamos de resoluciones inyectivas $\omega_X \to \mathcal{I}^\bullet$ en $\mathcal{O}_X$-<u>Mod</u> y $\omega_Y \to \mathcal{R}^\bullet$ en $\mathcal{O}_Y$-<u>Mod</u>, de donde se calcula:
$$\mathrm{Ext}^i(\mathcal{F}, \omega_X) \overset{\text{dy}}{=} H^i(\mathrm{Hom}_X(\mathcal{F}, \mathcal{I}^\bullet)) \quad \text{y} \quad \mathrm{Ext}^{i+r}(j_*\mathcal{F}, \omega_Y) \overset{\text{dy}}{=} H^{i+r}(\mathrm{Hom}_Y(j_*\mathcal{F}, \mathcal{R}^\bullet))$$
La idea será construir $\mathcal{I}^\bullet$ usando $\mathcal{R}^\bullet$ y poder relacionarlas mediante el <u>Hecho clave</u>.

<u>Recuerdo</u>: El incrustamiento cerrado $j : X \hookrightarrow Y$ induce una sucesión exacta de $\mathcal{O}_Y$-módulos
$$0 \to \mathcal{I}_X \hookrightarrow \mathcal{O}_Y \twoheadrightarrow j_*\mathcal{O}_X \to 0$$
que permite pensar $j_*\mathcal{O}_X$ como secciones locales de $\mathcal{O}_Y$ que son anuladas por $\mathcal{I}_X$. De manera más general, j_* identifica $\mathcal{O}_X$-módulos con $\mathcal{O}_Y$-módulos que se anulan por $\mathcal{I}_X$.

[<u>Prop</u>: Sea $\omega_Y \to \mathcal{R}^\bullet$ una resolución inyectiva en $\mathcal{O}_Y$-<u>Mod</u> y sea $\mathcal{R}_X^\bullet \hookrightarrow \mathcal{R}^\bullet$ el subcomplejo dado por los subhaces $\mathcal{R}_X^i \subseteq \mathcal{R}^i$ de secciones locales de $\mathcal{R}^i$ que se anulan por $\mathcal{I}_X$. Entonces, $\mathcal{I}^\bullet := j^*\mathcal{R}_X^\bullet$ es un complejo <u>inyectivo</u> en $\mathcal{O}_X$-<u>Mod</u>, que cumple:
$$H^i(\mathcal{I}^\bullet) \cong \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq r \\ \omega_X & \text{si } i = r \end{cases}$$
]

<u>Dem</u>: Por definición de $\mathcal{I}^\bullet$ y de j_*, tenemos que $\mathrm{Hom}_Y(j_*\mathcal{F}, \mathcal{R}^i) \cong \mathrm{Hom}_X(\mathcal{F}, \mathcal{I}^i)$ para todo $\mathcal{O}_X$-módulo $\mathcal{F}$. Notamos por un lado que $\mathcal{F} \mapsto j_*\mathcal{F}$ es un functor <u>exacto</u> (pues $j : X \hookrightarrow Y$ es un morfismo finito y luego $R^p j_* = 0$ $\forall p \geq 1$: ver §35, p.117). Por otro lado, tenemos (por definición!) que $\mathcal{R}^i$ es inyectivo si y sólo si el functor $\mathrm{Hom}_Y(\cdot, \mathcal{R}^i)$ es <u>exacto</u>.
$\Rightarrow$ La composición $\mathrm{Hom}_Y(j_*(\cdot), \mathcal{R}^i) \cong \mathrm{Hom}_X(\cdot, \mathcal{I}^i)$ es <u>exacto</u>, ie, $\mathcal{I}^i$ es inyectivo en $\mathcal{O}_X$-<u>Mod</u> ✓
Finalmente, notamos que $\mathcal{I}^i = \mathcal{H}om(\mathcal{O}_X, \mathcal{I}^i)$ y que (de nuevo, por def. de $\mathcal{I}^\bullet$ y de j_*) tenemos $\mathcal{H}om(\mathcal{O}_X, \mathcal{I}^i) \cong j^*\mathcal{H}om(j_*\mathcal{O}_X, \mathcal{R}^i)$, de donde obtenemos:
$$H^i(\mathcal{I}^\bullet) \cong j^*H^i(\mathcal{H}om(j_*\mathcal{O}_X, \mathcal{R}^\bullet)) \overset{\text{dy}}{=} j^*\mathcal{E}xt^i(j_*\mathcal{O}_X, \omega_Y) \underset{\text{Hecho}}{\cong} \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq r \\ j^*(j_*\omega_X) \overset{\text{Fórmula proyección}}{\cong} \omega_X & \text{si } i = r \end{cases} \quad \blacksquare$$

<u>Consecuencia</u>: A partir de $\mathcal{I}^\bullet$, usando que $H^i(\mathcal{I}^\bullet) = 0$ si $i \neq r$ y $H^r(\mathcal{I}^\bullet) \cong \omega_X$, obtenemos una resolución inyectiva $\omega_X \to \mathcal{J}^\bullet$ con $d_{\mathcal{J}}^i = d_{\mathcal{I}}^{i+r}$ (traslación en r) y luego:
$$\mathrm{Ext}^i(\mathcal{F}, \omega_X) \overset{\text{dy}}{=} H^i(\mathrm{Hom}_X(\mathcal{F}, \mathcal{J}^\bullet)) \overset{\text{Prop}}{=} H^{i+r}(\mathrm{Hom}_X(\mathcal{F}, \mathcal{I}^\bullet)) \cong H^{i+r}(\mathrm{Hom}_Y(j_*\mathcal{F}, \mathcal{R}^\bullet)) \overset{\text{dy}}{=} \mathrm{Ext}^{i+r}(j_*\mathcal{F}, \omega_Y)$$
Así, el <u>Hecho clave</u> permite probar (DG) y concluir la demostración. $\blacksquare$

[<u>Observación final</u>: La demostración del Hecho clave es puramente algebraica y se realiza utilizando el llamado "<u>complejo de Koszul</u>" asociado a $j : X \hookrightarrow Y$. Recomiendo el libro de Fulton y Lang "Riemann-Roch Algebra" (Ch IV, §2) para leer sobre las versiones algebraicas y geométricas del complejo de Koszul. La prueba detallada del Hecho clave se puede encontrar en el apunte de Joseph Le Potier (Ch. III, §6.1).