§35. Imágenes directas superiores

Durante esta sección, denotamos por $f: X \to Y$ un morfismo regular entre variedades algebraicas y por $\mathcal{F}$ un $\mathcal{O}_X$-módulo. Nuestro objetivo será probar (una versión de) el Teorema de coherencia de imágenes directas de Grauert-Grothendieck y aplicarlo al estudio de morfismos finitos.

Recuerdo (ver §32, p. 110): El functor imagen directa $f_*: \underline{\mathrm{Qcoh}}(X) \to \underline{\mathrm{Qcoh}}(Y)$, $\mathcal{F} \mapsto f_*\mathcal{F}$ es exacto a la izquierda, donde $f_*\mathcal{F}(V) \overset{\mathrm{def}}{=} \mathcal{F}(f^{-1}(V))$ para todo abierto $V \subseteq Y$. Sus functores derivados se llaman imágenes directas superiores y se denotan $R^i f_*(\mathcal{F})$. En part, $R^0 f_*(\mathcal{F}) \cong f_*\mathcal{F}$ y toda sucesión exacta corta $0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{G} \to \mathcal{H} \to 0$ en $\underline{\mathrm{Qcoh}}(X)$ induce una sucesión exacta $0 \to f_*\mathcal{F} \to f_*\mathcal{G} \to f_*\mathcal{H} \to R^1 f_*\mathcal{F} \to R^1 f_*\mathcal{G} \to R^1 f_*\mathcal{H} \to R^2 f_*\mathcal{F} \to \dots$ en $\underline{\mathrm{Qcoh}}(Y)$.

Lema: $R^i f_*(\mathcal{F})$ es el haz asociado al prehaz $V \mapsto H^i(f^{-1}(V), \mathcal{F})$, con $V \subseteq Y$ abierto.

Dem: Sea $\mathcal{F} \to \mathcal{I}^\bullet$ resolución inyectiva, de donde calculamos $R^i f_*(\mathcal{F}) \overset{\mathrm{def}}{=} H^i(f_*(\mathcal{I}^\bullet))$. Por otro lado, por def. de f_*, $H^i(f_*(\mathcal{I}^\bullet))$ es el haz asociado al prehaz $V \mapsto H^i(\Gamma(f^{-1}(V), \mathcal{I}^\bullet))$, y donde este último es exactamente el prehaz $V \mapsto H^i(f^{-1}(V), \mathcal{F})$. ■

Obs: En particular, si $\mathcal{I}$ es un haz flasque en X (eg. $\mathcal{I}$ inyectivo), entonces $R^i f_*(\mathcal{I}) = 0$ para todo $i \geq 1$ (ver §33, pág 113), gracias al Lema anterior.

Teorema de imágenes directas de Leray: Sea $f: X \to Y$ un morfismo regular entre var. alg y sea $\mathcal{F}$ un haz quasi-coherente en X tal que $R^p f_*(\mathcal{F}) = 0$ para todo $p \geq 1$. Entonces,

$$H^i(Y, f_*\mathcal{F}) \cong H^i(X, \mathcal{F}) \quad \text{para todo } i \geq 0.$$

Dem: Sea $\mathcal{F} \xrightarrow{\varepsilon} \mathcal{I}^\bullet$ resolución inyectiva dada por $0 \to \mathcal{F} \xrightarrow{\varepsilon^0} \mathcal{I}^0 \xrightarrow{d^0} \mathcal{I}^1 \xrightarrow{d^1} \mathcal{I}^2 \to \dots$ complejo exacto. Entonces, $R^p f_*(\mathcal{F}) \overset{\mathrm{def}}{=} H^p(f_*(\mathcal{I}^\bullet)) \overset{\mathrm{Hip.}}{=} 0 \quad \forall p \geq 1$, ie, $0 \to f_*\mathcal{F} \hookrightarrow f_*\mathcal{I}^0 \to f_*\mathcal{I}^1 \to \dots$ es un complejo exacto y por ende $f_*\mathcal{F} \to f_*\mathcal{I}^\bullet$ es una resolución de $f_*\mathcal{F}$ en $\underline{\mathrm{Qcoh}}(Y)$. Por otro lado, cada $\mathcal{I}^i$ es flasque y luego (por definición de f_*) cada $f_*\mathcal{I}^i$ también! Así, $f_*\mathcal{F} \to f_*\mathcal{I}^\bullet$ es una resolución flasque y el Teorema de de Rham (ver §33, p. 113) implica que:

$$H^i(Y, f_*\mathcal{F}) \underset{\mathrm{dR}}{\cong} H^i(\Gamma(Y, f_*\mathcal{I}^\bullet)) \underset{\text{def de } f_*}{\cong} H^i(\Gamma(X, \mathcal{I}^\bullet)) \underset{\text{def de } H^i}{=} H^i(X, \mathcal{F}) \quad \text{para todo } i \geq 0 \ ✓ ■$$

Ejemplo: Sup. que $f: X \to Y$ es un morfismo finito. Entonces, si $V \subseteq Y$ abierto afín se tiene que $f^{-1}(V)$ también! (ver §15, p. 50). Luego, el Teorema de Serre (ver §34, p. 114) implica que $H^p(f^{-1}(V), \mathcal{F}) = 0 \ \forall p \geq 1 \overset{\text{Lema}}{\Rightarrow} R^p f_*(\mathcal{F}) = 0 \ \forall p \geq 1$ y luego $H^i(Y, f_*\mathcal{F}) \cong H^i(X, \mathcal{F}) \ \forall i \geq 0$.
Esto último generaliza la Aplicación discutida en §29, pág 102 (donde X e Y eran proyectivos).

Cultura general: El Teorema anterior se generaliza usando la "sucesión espectral de Leray" (1943), que a su vez se generaliza a la "sucesión espectral de Grothendieck" ("Tôhoku paper", 1957).

Recuerdo (ver §28, p. 97): Si $f: X \to Y$ es un morfismo regular arbitrario entre variedades alg. y $\mathcal{F}$ es un haz quasi-coherente en X, entonces $f_*\mathcal{F}$ es quasi-coherente en Y pero no necesariamente coherente, incluso si $\mathcal{F}$ es coherente! (eg. $\mathbb{A}^n \xrightarrow{f} Y = \{pt\}$ y $\mathcal{F} = \mathcal{O}_{\mathbb{A}^n}$). Sin embargo, si f es un morfismo finito y $\mathcal{F}$ es coherente, entonces $f_*\mathcal{F}$ es coherente también ✓
Esto último es la versión geométrica del hecho que si $\varphi: B \to A$ es un morfismo de anillos noetherianos y M un A-módulo, entonces M es un B-módulo vía $b \cdot m := \varphi(b) \cdot m$, pero no es necesariamente finitamente generado! Sin embargo, si A es un B-módulo fin. gen. vía φ, entonces M lo es también (cf. §19, pág 65).

Veamos a continuación qué sucede para las imágenes directas superiores $R^i f_*(\mathcal{F})$:

Lema: Sea $f: X \to Y$ morfismo regular entre var. alg y $\mathcal{F}$ un haz quasi-coherente en X. Entonces:
① Si Y es afín con $B = \mathcal{O}(Y)$, entonces $R^i f_*(\mathcal{F})$ es el haz asociado al B-módulo $H^i(X,\mathcal{F})$.
② Las imágenes directas superiores $R^i f_*(\mathcal{F})$ son haces quasi-coherentes.

Dem: Para ①, recordamos que $\Gamma: \underline{\mathrm{Qcoh}}(Y) \to B\text{-}\underline{\mathrm{Mod}}$, $\mathcal{G} \mapsto \Gamma(Y,\mathcal{G})$ es exacto pues Y es afín (ver §28, pág 97). En part (ver Lema en §30, p. 104), para todo complejo $\mathcal{K}^\bullet$ en $\underline{\mathrm{Qcoh}}(Y)$ se tiene que $H^i(\Gamma(\mathcal{K}^\bullet)) \cong \Gamma(H^i(\mathcal{K}^\bullet))$ $\forall i$. Luego, si $\mathcal{F}\to\mathcal{I}^\bullet$ es una resolución inyectiva en $\underline{\mathrm{Qcoh}}(X)$ y consideramos el complejo $\mathcal{K}^\bullet = f_*\mathcal{I}^\bullet$ que calcula $R^if_*(\mathcal{F}) \overset{\text{df}}{\cong} H^i(f_*\mathcal{I}^\bullet) = H^i(\mathcal{K}^\bullet)$
$\Rightarrow \Gamma(H^i(\mathcal{K}^\bullet)) \overset{\text{df}}{\cong} \Gamma(Y, R^if_*(\mathcal{F})) \underset{\text{Lema}}{\cong} H^i(\Gamma(Y, f_*\mathcal{I}^\bullet)) \underset{\text{df de } f_*}{=} H^i(\Gamma(X,\mathcal{I}^\bullet)) = H^i(X,\mathcal{F})$, i.e., $R^if_*(\mathcal{F}) = \widetilde{M}$ con $M = H^i(X,\mathcal{F})$ ✓ Finalmente, ② es una afirmación local en Y que se deduce de ① ✓ (o del hecho que para $F: \mathcal{C}\to\mathcal{D}$ se tiene $R^iF: \mathcal{C}\to\mathcal{D}$ también!). ■

Para estudiar el problema de coherencia de imágenes directas superiores, necesitaremos:

Def: Un morfismo regular $f:X\to Y$ entre var. alg. es un <u>morfismo proyectivo</u> si se factoriza como:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, hook, "i"] \arrow[dr, "f"'] & Y\times\mathbb{P}^n \arrow[d, "pr_Y"] \\ & Y \end{tikzcd}$$

para cierto $n\in\mathbb{N}^{\geq1}$

y donde $i: X\hookrightarrow Y\times\mathbb{P}^n$ encajamiento cerrado.

Ejemplos: ① Si X es una var. alg. <u>proyectiva</u> y $f:X\to Y$ regular (con Y arbitraria) $\Rightarrow$ f es <u>proyectivo</u>. En efecto, basta considerar $X \overset{i}{\hookrightarrow} \Gamma(f) \xrightarrow{pr_Y} Y$ con $\Gamma(f)\subseteq X\times Y \subseteq \mathbb{P}^n\times Y$ el grafo de f (cf. §11, pág 37) ✓
② $\boxed{\text{Ejercicio}}$ Sea $f:X\to Y$ morfismo proyectivo y $g:Z\to Y$ morfismo regular arbitrario. Sea $X\times_Y Z := \{(x,z)\in X\times Z \text{ tq } f(x)=g(z) \text{ en } Y\}$ y sea $f_Z: X\times_Y Z\to Z$, $(x,z)\mapsto z$ (<u>producto fibrado</u>). Probar que f_Z es un morfismo proyectivo.
③ Si $f:X\to Y$ morfismo proyectivo y $Z\subseteq X$ cerrado, entonces $f(Z)\subseteq Y$ es cerrado ✓

Teorema de Grauert-Grothendieck: Sea $f:X\to Y$ un morfismo <u>proyectivo</u> y $\mathcal{F}$ un haz <u>coherente</u> en X. Entonces, los $R^if_*(\mathcal{F})$ son haces coherentes en Y para todo $i\geq0$.

Dem: Consideramos la factorización $f: X \overset{i}{\hookrightarrow} Y\times\mathbb{P}^n \xrightarrow{pr_Y} Y$ y recordamos que $R^if_*(\mathcal{F})$ es el haz asociado al prehaz $V\mapsto H^i(f^{-1}(V),\mathcal{F}) \cong H^i(pr_Y^{-1}(V), i_*\mathcal{F})$. Luego, podemos suponer $X = Y\times\mathbb{P}^n$ y $f = pr_Y$. Además, ser coherente es una propiedad local y por ende basta considerar Y var. alg. afín con $B=\mathcal{O}(Y)$. En part, el Lema anterior nos dice que $R^if_*(\mathcal{F}) = \widetilde{M}$ con $M = H^i(X,\mathcal{F})$, por lo que basta verificar que $H^i(X,\mathcal{F})$ es finitamente generado como B-módulo:
La misma prueba del Lema en §29, pág 100 (usado para probar el Teo. de anulación de Serre) nos dice que $\exists r\in\mathbb{N}^{\geq1}$ y $m\gg0$ tq $\mathcal{O}_X(-m)^{\oplus r}\twoheadrightarrow\mathcal{F}$ sobreyectivo, y así $0\to\mathcal{G}\hookrightarrow\mathcal{O}_X(-m)^{\oplus r}\twoheadrightarrow\mathcal{F}\to0$ sucesión exacta en $X=Y\times\mathbb{P}^n$. La conclusión se obtiene por inducción descendente en $i\in\mathbb{N}$:

$$\cdots\to H^i(X,\mathcal{G})\to H^i(X,\mathcal{O}_X(-m))^{\oplus r}\to H^i(X,\mathcal{F})\to H^{i+1}(X,\mathcal{G}) \cong \underbrace{\Gamma(Y,R^{i+1}f_*\mathcal{G})}_{\text{fin. gen (inducción!)}}\to\cdots$$

y donde $H^i(X,\mathcal{O}_X(-m))$ es finitamente generado! En efecto, para todo $d\in\mathbb{Z}$ calculamos $H^i(X,\mathcal{O}_X(d))$ usando cohomología de Čech resp. al cubr. <u>afín</u> $V_i := Y\times\mathcal{U}_i \cong Y\times\mathbb{A}^n$ $(i=0,..,n)$ de $X=Y\times\mathbb{P}^n$, de donde obtenemos (notando que $C^\bullet(\mathcal{V},\mathcal{O}_X(d)) \cong B\otimes_k C^\bullet(\mathcal{U},\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d))$!):

$$H^i(X,\mathcal{O}_X(d)) \underset{\text{Leray}}{\cong} \check{H}^i(\mathcal{V},\mathcal{O}_X(d)) \cong B\otimes_k \check{H}^i(\mathcal{U},\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d)) \underset{\text{Leray}}{\cong} B\otimes \underbrace{H^i(\mathbb{P}^n,\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d))}_{\text{dim. finita!}}$$

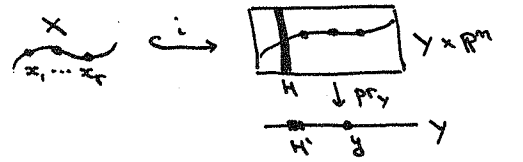
$\Rightarrow H^i(X,\mathcal{F})$ fin. gen, i.e., $R^if_*(\mathcal{F})$ es coherente ✓ ■

Una aplicación de lo anterior, son los siguientes criterios (muy prácticos) para verificar si un morfismo es finito:

Teorema: Sea $f: X \to Y$ un morfismo proyectivo tal que para todo $y \in Y$ la fibra $f^{-1}(y)$ es un conjunto finito (eg. f inyectivo). Entonces, f es un morfismo finito.

Dem: El resultado es local en Y, que por ende podemos suponer afín. Notar que a priori no sabemos si X es afín (a posteriori lo es): Por Grauert-Grothendieck, $f_*\mathcal{O}_X$ es un haz coherente en Y, y $f_*\mathcal{O}_X = \widetilde{M}$ con $M = H^0(X, \mathcal{O}_X) = \mathcal{O}(X)$. Luego, $\mathcal{O}(X)$ es un $\mathcal{O}(Y)$-módulo finitamente generado vía $f^*: \mathcal{O}(Y) \to \mathcal{O}(X)$ (y esto implicaría que f es un morfismo finito si X fuese afín!).

La idea será cubrir Y por abiertos afines $V \subseteq Y$ tal que $f^{-1}(V)$ sea afín (y donde el argumento anterior nos permite concluir ✓): sea $y \in Y$ en la imagen de f, con fibra $f^{-1}(y) = \{x_1, \dots, x_r\}$, y sea $f: X \xhookrightarrow{i} Y \times \mathbb{P}^n \xrightarrow{pr_Y} Y$ factorización del morfismo proyectivo f.



Sea $H \subseteq Y \times \mathbb{P}^n$ un hiperplano tal que $i(x_1), \dots, i(x_r) \notin H$. Notamos que $H \cap i(X)$ es cerrado en $Y \times \mathbb{P}^n$ (pues i es un encajamiento cerrado) y que $H' = pr_Y(H \cap i(X))$ es cerrado en Y (pues f morfismo proyectivo!).

Sea $V := Y \setminus H'$ vecindad abierta afín de $y \in Y$, con $f^{-1}(V) \cong pr_Y^{-1}(V) \cap i(X)$ cerrado en $(Y \times \mathbb{P}^n) \setminus H \cong Y \times \mathbb{A}^n$ variedad afín y por ende $f^{-1}(V)$ afín ✓ ■

Corolario: Sea C una curva algebraica proyectiva irreducible y $f: C \to X$ un morfismo regular no-constante, entonces f es un morfismo finito. En part, todo morfismo regular no-constante entre curvas alg. proyectivas irreducibles es finito.

Dem: Dado que C es proyectiva, f es un morfismo proyectivo. Luego, basta notar que las fibras son conjuntos finitos: de lo contrario $\exists x_0 \in X$ tal que $\dim(f^{-1}(x_0)) \geq 1$ y luego (dado que C es una curva irreducible) $f^{-1}(x_0) = C$, ie, $f(C) = \{x_0\}$ y f constante ↯ ■

Importante (y extremadamente útil!): Sea $f: X \to Y$ un morfismo regular entre variedades alg. proyectivas irreducibles y sea $C \subseteq X$ curva irreducible. Definimos

$$d = d(C,f) = \begin{cases} 0 & \text{si } f(C) = \{pt\} \\ \deg(f|_C : C \to f(C)) & \text{si } f(C) \subseteq Y \text{ curva irred.} \end{cases}$$

donde $\deg(f|_C) := [k(C) : k(f(C))]$ cuenta las fibras de $f|_C$ con multiplicidad (ver §23, p. 83). La fórmula de proyección (cf. §29, p. 102), que se prueba usando métodos cohomológicos (ver eg. O. Debarre "Higher dimensional Alg. Geom.", pág 9), afirma que para todo $D \in \mathrm{Div}(Y)$ divisor de Cartier en Y, se tiene:

$$f^*D \cdot C = d\,(D \cdot \pi(C)).$$

Corolario: Sea X una variedad alg. proyectiva irreducible y sea $L \in \mathrm{Pic}(X)$ fibrado en rectas sin puntos de base, ie, $\varphi_L : X \to \mathbb{P}(H^0(X,L)^\vee) \cong \mathbb{P}^n$ es un morfismo regular. Entonces, L es amplio si y sólo si las fibras $\varphi_L^{-1}(y)$ de φ_L son conjuntos finitos.

Dem: En este caso, φ_L es un morfismo proyectivo (pues X proyectiva) y luego si las fibras son conj. finitos, entonces φ_L es un morfismo finito. Ya vimos en §29 (pág 102) que si φ_L finito y $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)$ amplio, entonces $\varphi_L^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1) \cong L$ es amplio ✓ Por otro lado, si $L \cong \mathcal{O}_X(D)$ es amplio entonces $D \cdot C > 0$ para toda curva irred. $C \subseteq X$ (ver §29, p. 102 y §23, p. 84). Luego, si por contradicción $\exists y_0 \in \mathbb{P}^n$ tq $\dim(\varphi_L^{-1}(y_0)) \geq 1$, basta considerar $C \subseteq \varphi_L^{-1}(y_0)$ curva irreducible que cumple $\varphi_L(C) = \{y_0\}$ y luego, por la fórmula de proyección se tendría:

$D \cdot C = \varphi_L^* H \cdot C = d(H \cdot \varphi_L(C)) = 0$, donde $H \subseteq \mathbb{P}^n$ hiperplano: contradicción! ■