§34. Cohomología de variedades afines y Teorema de Leray

En esta sección probaremos los Teoremas de Serre y Leray que fueron usados en §28 y §29 para obtener importantes resultados y calcular cohomología de variedades algebraicas (ver §28, pág 97).

Recuerdo (cf. §28, p.96): Sea A un anillo conmutativo con unidad y M un A-módulo. Para $f \in A$ definimos $M_f := M \otimes_A A_f = \{ \frac{m}{f^p} \text{ con } m \in M \text{ y } p \in \mathbb{N} \} / \sim$, donde $\frac{m}{f^p} \sim \frac{m'}{f^q}$ si $\exists r \in \mathbb{N}$ tq $f^r(m f^q - m' f^p) = 0$ en M.

Además, si X es una variedad algebraica afín con $A = \mathcal{O}(X)$, entonces hay una correspondencia entre haces quasi-coherentes (resp. coherentes) y A-módulos (resp. A-módulos fin. generados) vía:

$$\mathcal{F} \longmapsto \Gamma(X, \mathcal{F})$$
$$\widetilde{M} \longleftarrow M$$

donde $\widetilde{M}$ es el haz definido en $\mathcal{U}_f = \{x \in X \text{ tq } f(x) \neq 0\}$ por $\widetilde{M}(\mathcal{U}_f) := M_f$.

$\boxed{\text{Ejercicio}}$* Sea X variedad alg. afín con $A = \mathcal{O}(X)$. Probar que si I es un A-módulo inyectivo y $f \in A$ no-nulo, entonces:

a) La proyección natural $I \overset{\pi}{\twoheadrightarrow} I_f$, $m \mapsto \frac{m}{1}$ es sobreyectiva.

b) El kernel $K = \ker(I \overset{\pi}{\twoheadrightarrow} I_f)$ es un A-módulo inyectivo.

Geométricamente, el punto a) se reescribe como:

Lema: Sea X var. alg. afín con $A = \mathcal{O}(X)$ y sea I un A-módulo inyectivo, con $\mathcal{I} = \widetilde{I}$ el haz quasi-coherente asociado. Entonces, $\mathcal{I}(X) \twoheadrightarrow \mathcal{I}(\mathcal{U}_f)$ es sobreyectivo $\forall f \in A$ no-nulo.

Prop: Sea X var. alg. afín con $A = \mathcal{O}(X)$ y sea I un A-módulo inyectivo, con $\mathcal{I} = \widetilde{I}$ el haz quasi-coherente asociado. Entonces, $\mathcal{I}$ es flasque (ie, $\mathcal{I}(X) \twoheadrightarrow \mathcal{I}(\mathcal{U})$ sobreyectivo $\forall\, \mathcal{U} \subseteq X$ abierto).

Dem: Consideremos el soporte de $\mathcal{I}$ definido por $\operatorname{Supp}(\mathcal{I}) := \{x \in X \text{ tq } \mathcal{I}_x \neq 0\}$, y sea $Y = \operatorname{Supp}(\mathcal{I}) \subseteq X$ cerrado Zariski. Si $Y = \emptyset$ entonces $\mathcal{I}(X) = \mathcal{I}(\mathcal{U}) = 0$ ✓ Luego, podemos sup. $Y \neq \emptyset$ y que el resultado se cumple para todo A-módulo inyectivo K tal que $\mathcal{K} = \widetilde{K}$ cumple $\operatorname{Supp}(\mathcal{K}) \subsetneq Y$ (inducción noetheriana).

Sea $\mathcal{U} \subseteq X$ abierto y sea $s \in \mathcal{I}(\mathcal{U})$. Queremos hallar $\sigma \in \mathcal{I}(X)$ tq $\sigma|_{\mathcal{U}} = s$. Si $\mathcal{U} \cap Y = \emptyset$ $\Rightarrow s = 0$ y basta tomar $\sigma = 0$ ✓ Si $\mathcal{U} \cap Y \neq \emptyset$, dado que los $\mathcal{U}_f$ son una base de la top. de Zariski, existe $f \in A$ no-nulo tq $\mathcal{U}_f \subseteq \mathcal{U}$ y $\mathcal{U}_f \cap \operatorname{Supp}(\mathcal{I}) \neq \emptyset$.

$\overset{\text{Lema}}{\Rightarrow} \exists\, \sigma' \in \mathcal{I}(X)$ tq $\sigma'|_{\mathcal{U}_f} = s|_{\mathcal{U}_f}$. Sea $t := s - \sigma'|_{\mathcal{U}} \in \mathcal{I}(\mathcal{U})$ (*) $\Rightarrow t|_{\mathcal{U}_f} = 0$, y luego t está definida por una sección de $\mathcal{K} = \widetilde{K}$, donde $K := \ker(I \overset{\pi}{\twoheadrightarrow} I_f)$, y con K inyectivo!

Dado que $\operatorname{Supp}(\mathcal{K}) \subsetneq Y$, tenemos (por inducción noetheriana) que t se extiende a $\tau \in \mathcal{I}(X)$, que cumple $\tau|_{\mathcal{U}} = t$ y luego $\sigma := \sigma' + \tau \in \mathcal{I}(X)$ cumple $\sigma|_{\mathcal{U}} = \sigma'|_{\mathcal{U}} + t \overset{(*)}{=} s$ ✓ ■

Teorema (Serre): Sea $\mathcal{F}$ un haz quasi-coherente en una variedad alg. afín X. Entonces,
$$H^i(X, \mathcal{F}) = 0 \quad \text{para todo } i \geq 1.$$

Dem: Sea $A = \mathcal{O}(X)$ y consideremos el A-módulo $M := \Gamma(X, \mathcal{F})$. Sea $\varepsilon: M \to I^\bullet$ resolución inyectiva de M en A-Mod, y sea $\mathcal{I}^p := \widetilde{I^p}$ el haz quasi-coherente asociado al A-módulo inyectivo $I^p \overset{\text{Prop}}{\Longrightarrow} \mathcal{I}^p$ es flasque y luego Γ-acíclico (ver §33, p.113). Así, obtenemos una resolución Γ-acíclica $\varepsilon: \widetilde{M} \cong \mathcal{F} \to \widetilde{I^\bullet} = \mathcal{I}^\bullet$ del haz $\mathcal{F}$ en $\mathcal{O}_X$-Mod. Finalmente, el Teorema de de Rham y el hecho que $\Gamma(X, \widetilde{I^p}) \cong I^p$ implican que:

$$H^i(X, \mathcal{F}) \underset{dR}{\cong} H^i(\Gamma(X, \mathcal{I}^\bullet)) = H^i(I^\bullet) = 0 \quad \text{para todo } i \geq 1. \ \blacksquare$$

Para cerrar el círculo de ideas, nos queda sólo probar el Teorema de Leray (ver §28, pág 95), que nos asegura (junto al Teorema de Serre) que podemos usar cohomología de Čech para calcular!

<u>Recuerdo</u> (§28, pág 94): Sea $\mathcal{F}$ un haz de grupos abelianos en un espacio topológico X, y sea $\mathcal{U}=(U_i)_{i\in I}$ un cubrimiento abierto de X, con I conjunto ordenado. Para cada $p\in\mathbb{N}$ se define el grupo de <u>p-cocadenas</u> de Čech (de $\mathcal{F}$ resp. a $\mathcal{U}$) por:

$$C^p(\mathcal{U},\mathcal{F}) := \prod_{i_0<\dots<i_p} \mathcal{F}(U_{i_0}\cap\dots\cap U_{i_p}).$$

Además, se define el <u>operador de coborde</u> $d^p: C^p(\mathcal{U},\mathcal{F}) \to C^{p+1}(\mathcal{U},\mathcal{F})$ mediante

$$(d^p s)_{i_0,\dots,i_{p+1}} := \sum_{k=0}^{p+1} (-1)^k s_{i_0,\dots,i_{k-1},i_{k+1},\dots,i_{p+1}}\big|_{U_{i_0}\cap\dots\cap U_{i_{p+1}}}, \quad \text{donde } s=\{s_{i_0,\dots,i_p}\}_{i_0<\dots<i_p} \ (*),$$

el cual verifica $d^{p+1}\circ d^p = 0 \ \forall p\in\mathbb{N}$, i.e., $C^\bullet(\mathcal{U},\mathcal{F})$ es un <u>complejo</u> (<u>de Čech</u>) en <u>Ab</u>. Además, $\check{H}^i(\mathcal{U},\mathcal{F}) \overset{df}{=} H^i(C^\bullet(\mathcal{U},\mathcal{F}))$ es el i-ésimo grupo de cohomología de Čech, con $\check{H}^0(\mathcal{U},\mathcal{F})\cong\Gamma(X,\mathcal{F})$.

<u>Construcción</u>: Sea $V\subseteq X$ un abierto, y consideremos el cubrimiento $\mathcal{U}_V$ de V dado por los abiertos $\{U_i\cap V\}_{i\in I}$. Entonces, el prehaz de grupos abelianos

$$V \longmapsto C^p(\mathcal{U}_V,\mathcal{F})$$

es un haz, denotado $\mathscr{C}^p(\mathcal{U},\mathcal{F})$, y que viene dotado de $d^p: \mathscr{C}^p(\mathcal{U},\mathcal{F}) \to \mathscr{C}^{p+1}(\mathcal{U},\mathcal{F})$ que hacen de $\mathscr{C}^\bullet(\mathcal{U},\mathcal{F})$ un complejo en <u>Sh</u>(X). Notar que, por construcción, tenemos que:

a) Si $\mathcal{F}$ es flasque, entonces $\mathscr{C}^p(\mathcal{U},\mathcal{F})$ es flasque $\forall p\in\mathbb{N}$.

b) El morfismo $\varepsilon^0: \mathcal{F} \hookrightarrow \mathscr{C}^0(\mathcal{U},\mathcal{F})$ dado por $s\in\mathcal{F}(V) \longmapsto \{s|_{V\cap U_i}\}_{i\in I} \in C^0(\mathcal{U}_V,\mathcal{F})$ es inyectivo (def. de haz!). En part, $0\to\mathcal{F}\xrightarrow{\varepsilon^0}\mathscr{C}^0(\mathcal{U},\mathcal{F})\xrightarrow{d^0}\mathscr{C}^1(\mathcal{U},\mathcal{F})\to\dots$ es un complejo en <u>Sh</u>(X)

c) $H^0(\mathscr{C}^\bullet(\mathcal{U},\mathcal{F})) \overset{df}{=} \ker(d^0) \cong \mathcal{F} \overset{b)}{=} \mathrm{Im}(\varepsilon^0)$ (cf. §28, p. 94).

<u>Lema</u>: $\varepsilon: \mathcal{F} \longrightarrow \mathscr{C}^\bullet(\mathcal{U},\mathcal{F})$ es una <u>resolución</u> de $\mathcal{F}$ en <u>Sh</u>(X).

<u>Dem</u>: Por la discusión anterior, resta verificar que $H^i(\mathscr{C}^\bullet(\mathcal{U},\mathcal{F}))=0 \ \forall i\geq 1$, i.e., que $\mathscr{C}^\bullet(\mathcal{U},\mathcal{F})$ es un complejo <u>exacto</u>. Esto se verifica en cada tallo, i.e., sea $x\in X$ y veamos que $\mathscr{C}^\bullet(\mathcal{U},\mathcal{F})_x$ es exacto: sea U_j abierto en el cubr. $\mathcal{U}$ tq $x\in U_j$ y construyamos una homotopía $\mathrm{Id}_{\mathscr{C}^\bullet(\mathcal{U},\mathcal{F})_x}\sim 0$ (de donde se obtiene el resultado!). Por definición, la homotopía h está dada por morfismos $h^{p+1}: \mathscr{C}^{p+1}(\mathcal{U},\mathcal{F})_x \to \mathscr{C}^p(\mathcal{U},\mathcal{F})_x$ tq $\forall f\in\mathscr{C}^{p+1}(\mathcal{U},\mathcal{F})_x$ se cumple $f = d^p\circ h^{p+1}(f) + h^{p+2}\circ d^{p+1}(f)$ (**) en $\mathscr{C}^{p+1}(\mathcal{U},\mathcal{F})_x$ (ver §31, p. 106). Para esto, definimos:

$$h^{p+1}(f) = \left(h^{p+1}(f)_{i_0,\dots,i_p}\right)_{i_0<\dots<i_p} \quad \text{donde } h^{p+1}(f)_{i_0,\dots,i_p} := f_{j,i_0,\dots,i_p}.$$

Aquí, $f=(f_{i_0,\dots,i_{p+1}})\in C^{p+1}(\mathcal{U}_V,\mathcal{F})$ para cierta vecindad V de $x\in X$, que podemos suponer $V\subseteq U_j$. Así, $V\cap(U_j\cap U_{i_0}\cap\dots\cap U_{i_p}) = V\cap(U_{i_0}\cap\dots\cap U_{i_p})$, y por ende tenemos $(f_{j,i_0,\dots,i_p})_{i_0<\dots<i_p}\in C^p(\mathcal{U}_V,\mathcal{F})$ y su germen en $x\in X$ define $h^{p+1}(f)$. Finalmente, la fórmula (**) se deduce "directamente" de (*). ■

<u>Prop</u>: Sea X un espacio topológico y sea $\mathcal{U}=(U_i)_{i\in I}$ un cubrimiento, con I conj. ordenado. Entonces:

① Para toda sucesión exacta $0\to\mathcal{F}\to\mathcal{G}\to\mathcal{H}\to 0$ de haces de grupos abelianos en X tal que $H^1(U_{i_0}\cap\dots\cap U_{i_p},\mathcal{F})=0 \ \forall p\in\mathbb{N}$ y $\forall i_0,\dots,i_p\in I$, hay una sucesión <u>exacta</u> larga

$$0\to\check{H}^0(\mathcal{U},\mathcal{F})\to\check{H}^0(\mathcal{U},\mathcal{G})\to\check{H}^0(\mathcal{U},\mathcal{H})\xrightarrow{\delta^0}\check{H}^1(\mathcal{U},\mathcal{F})\to\check{H}^1(\mathcal{U},\mathcal{G})\to\check{H}^1(\mathcal{U},\mathcal{H})\to\dots$$

② Si $\mathcal{F}$ es un haz <u>flasque</u>, entonces $\check{H}^i(\mathcal{U},\mathcal{F})=0$ para todo $i\geq 1$.

<u>Dem</u>: La hipótesis de ① implica que las sucesiones de grupos abelianos (para todas las posibles intersecciones) $0\to\mathcal{F}(U_{i_0}\cap\dots\cap U_{i_p})\to\mathcal{G}(U_{i_0}\cap\dots\cap U_{i_p})\to\mathcal{H}(U_{i_0}\cap\dots\cap U_{i_p})\to 0$ son <u>exactas</u>, i.e., la sucesión de <u>complejos</u> $0\to C^\bullet(\mathcal{U},\mathcal{F})\to C^\bullet(\mathcal{U},\mathcal{G})\to C^\bullet(\mathcal{U},\mathcal{H})\to 0$ es exacta, de donde se obtiene la sucesión exacta larga ✓ Para ②, tenemos que $\varepsilon:\mathcal{F}\to\mathscr{C}^\bullet(\mathcal{U},\mathcal{F})$ es una resolución flasque (por Lema anterior) y luego Γ-acíclica (ver §33, p. 113). Luego, el Teorema de de Rham implica que $0 = H^i(X,\mathcal{F}) \underset{dR}{\cong} H^i(\Gamma(\mathscr{C}^\bullet(\mathcal{U},\mathcal{F}))) \underset{df}{=} H^i(C^\bullet(\mathcal{U},\mathcal{F})) \underset{df}{=} \check{H}^i(\mathcal{U},\mathcal{F}) \ \forall i\geq 1$ ✓ ■

Def: sea $\mathcal{F}$ un haz de grupos abelianos en un espacio topológico X. Decimos que un cubr. abierto $\mathcal{U}=(U_i)_{i\in I}$, con I conj. ordenado, es $\mathcal{F}$-acíclico si $\forall p\in\mathbb{N}$ y todos $i_0,\dots,i_p\in I$ se tiene que $H^i(U_{i_0}\cap\dots\cap U_{i_p},\mathcal{F})=0$ para todo $i\geq 1$.

Teorema de Leray: sea $\mathcal{F}$ un haz de grupos abelianos en un espacio topológico X, y sea $\mathcal{U}$ un cubrimiento abierto de X. Entonces:
① Existe un morfismo canónico $\check{H}^i(\mathcal{U},\mathcal{F})\to H^i(X,\mathcal{F})$ para todo $i\geq 0$, functorial en $\mathcal{F}$.
② Si el cubrimiento $\mathcal{U}$ es $\mathcal{F}$-acíclico, entonces $\check{H}^i(\mathcal{U},\mathcal{F})\cong H^i(X,\mathcal{F})$ es un isomorfismo $\forall i\geq 0$.

Dem: Para ① consideramos la resolución $\varepsilon:\mathcal{F}\to\mathcal{C}^\bullet(\mathcal{U},\mathcal{F})$ del Lema anterior y $\mathcal{F}\to\mathcal{I}^\bullet$ una resolución inyectiva (y que permite calcular $H^i(X,\mathcal{F})\overset{\text{def}}{=}R^i\Gamma(\mathcal{F})=H^i(\Gamma(\mathcal{I}^\bullet))$!). Así, tenemos un diagrama conmutativo (ver §31, p. 107):

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F} \arrow[r, "\varepsilon"] \arrow[dr] & \mathcal{C}^\bullet(\mathcal{U},\mathcal{F}) \arrow[d, "\varphi"] \\ & \mathcal{I}^\bullet \end{tikzcd}$$

con φ único módulo homotopía.

Luego, $\Gamma(\varphi):\Gamma(\mathcal{C}^\bullet(\mathcal{U},\mathcal{F}))\overset{\text{def}}{=}C^\bullet(\mathcal{U},\mathcal{F})\to\Gamma(\mathcal{I}^\bullet)$ induce $H^i(C^\bullet(\mathcal{U},\mathcal{F}))\overset{\text{def}}{=}\check{H}^i(\mathcal{U},\mathcal{F})\to H^i(X,\mathcal{F})$ en cohomología, y que (tal como en §31) se prueba ser functorial en $\mathcal{F}$ ✓

Para ② procedemos por inducción en $i\in\mathbb{N}$: Para $i=0$ tenemos $\check{H}^0(\mathcal{U},\mathcal{F})\cong H^0(X,\mathcal{F})\cong\Gamma(X,\mathcal{F})$ ✓
Además, ① y la Prop. anterior implican que si $0\to\mathcal{F}\hookrightarrow\mathcal{I}\twoheadrightarrow\mathcal{G}\to 0$ es una sucesión exacta corta en $\underline{Sh}(X)$ con $\mathcal{F}$ tq $\mathcal{U}$ es $\mathcal{F}$-acíclico, entonces hay un diagrama conmutativo de sucesiones exactas largas de cohomología:

$$\begin{tikzcd} \cdots \arrow[r] & \check{H}^i(\mathcal{U},\mathcal{F}) \arrow[r] \arrow[d] & \check{H}^i(\mathcal{U},\mathcal{I}) \arrow[r] \arrow[d] & \check{H}^i(\mathcal{U},\mathcal{G}) \arrow[r, "\delta^i"] \arrow[d] & \check{H}^{i+1}(\mathcal{U},\mathcal{F}) \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\ \cdots \arrow[r] & H^i(X,\mathcal{F}) \arrow[r] & H^i(X,\mathcal{I}) \arrow[r] & H^i(X,\mathcal{G}) \arrow[r] & H^{i+1}(X,\mathcal{F}) \arrow[r] & \cdots \end{tikzcd} \quad (*)$$

Por otro lado, considerando $\mathcal{F}\hookrightarrow\mathcal{I}$ con $\mathcal{I}$ objeto inyectivo en $\underline{Sh}(X)$ y definiendo $\mathcal{G}:=\mathcal{I}/\mathcal{F}$, tenemos que como el cubr. abierto $\mathcal{U}$ es $\mathcal{F}$-acíclico y $\mathcal{I}$ es Γ-acíclico (pues $\mathcal{I}$ inyectivo) entonces para cada $U_{i_0\dots i_p}:=U_{i_0}\cap\dots\cap U_{i_p}$ tanto $\mathcal{F}$ como $\mathcal{I}$ son Γ-acíclicos (ie, por definición: $H^i(U_{i_0\dots i_p},\mathcal{F})=H^i(U_{i_0\dots i_p},\mathcal{I})=0$ $\forall i\geq 1$), y luego $\mathcal{G}$ también! (por la suc. exacta larga en cohomología), ie, el cubr. abierto $\mathcal{U}$ es $\mathcal{G}$-acíclico también. Finalmente, dado que $\mathcal{I}$ es flasque (y luego $\check{H}^i(\mathcal{U},\mathcal{I})=0$ $\forall i\geq 1$ por la Prop. anterior), $(*)$ se reduce a:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \Gamma(X,\mathcal{F}) \arrow[r] \arrow[d, equal] & \Gamma(X,\mathcal{I}) \arrow[r] \arrow[d, equal] & \Gamma(X,\mathcal{G}) \arrow[r] \arrow[d, equal] & \check{H}^1(\mathcal{U},\mathcal{F}) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \Gamma(X,\mathcal{F}) \arrow[r] & \Gamma(X,\mathcal{I}) \arrow[r] & \Gamma(X,\mathcal{G}) \arrow[r] & \underbrace{H^1(X,\mathcal{F})}_{\text{isomorfismo!}} \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

y

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \check{H}^i(\mathcal{U},\mathcal{G}) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "\wr"] & \check{H}^{i+1}(\mathcal{U},\mathcal{F}) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \underbrace{H^i(X,\mathcal{G})}_{\text{isom. (inducción)!}} \arrow[r, "\sim"] & H^{i+1}(X,\mathcal{F}) \arrow[r] & 0 \end{tikzcd} \quad \forall i\geq 1$$

$\Rightarrow \check{H}^i(\mathcal{U},\mathcal{F})\cong H^i(X,\mathcal{F})$ para todo $i\geq 0$ ✓ ∎

Consecuencia: Tal como adelantamos en §28, pág 97, el Teorema de Leray y el Teorema de Serre implican que si X es una variedad algebraica y $\mathcal{F}$ un haz quasi-coherente en X, entonces para todo cubr. finito $\mathcal{U}$ de X formado por abiertos afines se tiene $\check{H}^i(\mathcal{U},\mathcal{F})\cong H^i(X,\mathcal{F})$ para todo $i\geq 0$! Así, todos los cálculos y resultados de §28 y §29 están justificados ✓

Importante: El Teorema de Leray tiene aplicaciones prácticas fuera de la geometría algebraica! Por ejemplo, permite calcular la cohomología singular de espacios topológicos "comunes y corrientes" usando cubrimientos abiertos $\mathbb{Z}$-acíclicos.

Ejercicio* Sean X e Y variedades algebraicas, y sean $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ haces quasi-coherentes (eg. fibrados vectoriales) en X e Y, resp. Probar la fórmula de Künneth:

$$H^i(X\times Y,\mathcal{F}\boxtimes\mathcal{G})\cong\bigoplus_{p+q=i}H^p(X,\mathcal{F})\otimes_k H^q(Y,\mathcal{G})\quad\forall i\geq 0,$$

donde $\mathcal{F}\boxtimes\mathcal{G}:=(pr_X^*\mathcal{F})\otimes(pr_Y^*\mathcal{G})\in\underline{Qcoh}(X\times Y)$. (cf. §21, pág 72).

[Indicación: Usar cohomología de Čech!]