§33. Resoluciones acíclicas y resoluciones flasques

Durante esta sección, denotamos por $\mathcal{F}: \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ un functor (covariante) aditivo y exacto por la izquierda entre categorías abelianas, donde $\mathcal{C}$ tiene suficientes inyectivos. Luego, los functores derivados $R^i\mathcal{F}: \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ están bien definidos y $R^0\mathcal{F} \cong \mathcal{F}$.

El objetivo de esta sección es estudiar otro tipo de resoluciones de un objeto A en $\mathcal{C}$ que nos permitan calcular $R^i\mathcal{F}(A)$ de manera "más sencilla" (cf. Teorema de Leray en §28).

[Def: Sea A un objeto de $\mathcal{C}$. Decimos que A es $\mathcal{F}$-acíclico si $R^i\mathcal{F}(A) = 0 \ \forall i > 0$]

Ejemplo: Todo objeto inyectivo de $\mathcal{C}$ es $\mathcal{F}$-acíclico (ver §32, pág 108).

[Lema: Sea $K^\bullet$ un complejo positivo en $\mathcal{C}$ cuyos objetos son $\mathcal{F}$-acíclicos. Supongamos que $K^\bullet$ es exacto, entonces $\mathcal{F}(K^\bullet)$ es exacto en $\mathcal{D}$.]

Dem: Sea $K^\bullet = (K^i, d^i)_{i \in \mathbb{Z}}$ y sean $Z^i = \ker(d^i)$ y $B^i = \operatorname{Im}(d^{i-1})$. Así, $K^\bullet$ exacto $\iff Z^i = B^i \ \forall i$ y en particular la sucesión $0 \to Z^{i-1} \hookrightarrow K^{i-1} \xrightarrow{d^{i-1}} Z^i \to 0$ es exacta $\forall i$. Aplicando $\mathcal{F}$:

$$0 \to \mathcal{F}(Z^{i-1}) \to \mathcal{F}(K^{i-1}) \to \mathcal{F}(Z^i) \to R^1\mathcal{F}(Z^{i-1}) \to \underbrace{\cancel{R^1\mathcal{F}(K^{i-1})}}_{0} \to R^1\mathcal{F}(Z^i) \xrightarrow{\sim} R^2\mathcal{F}(Z^{i-1}) \to \underbrace{\cancel{R^2\mathcal{F}(K^{i-1})}}_{0} \to \dots$$

$\Rightarrow R^p\mathcal{F}(Z^i) \cong R^{p+1}\mathcal{F}(Z^{i-1}) \ \forall i \in \mathbb{Z}$ y $\forall p \geq 1$. En part, $R^1\mathcal{F}(Z^{i-1}) \cong R^2\mathcal{F}(Z^{i-2}) \cong \dots \cong R^p\mathcal{F}(0) = 0$ si $p \gg 0$.

$\Rightarrow 0 \to \mathcal{F}(Z^{i-1}) \to \mathcal{F}(K^{i-1}) \to \mathcal{F}(Z^i) \to 0$ es exacta $\forall i$, i.e., $\mathcal{F}(K^\bullet)$ es exacto ✓ ■

Construcción: Sea $f: K^\bullet \to L^\bullet$ un morfismo de complejos en $\mathcal{C}$. Definimos el cono de f como el complejo $C(f)^\bullet$ dado por

$$C(f)^i := L^i \oplus K^{i+1}$$

y con diferencial $d^i_{C(f)}: C(f)^i \to C(f)^{i+1}$ dado por $d^i_{C(f)} := \begin{pmatrix} d^i_L & f^{i+1} \\ 0 & -d^{i+1}_K \end{pmatrix}$, i.e., si $(x,y) \in L^i \oplus K^{i+1}$ entonces $d^i_{C(f)}(x,y) = (d^i_L(x) + f^{i+1}(y), -d^{i+1}_K(y))$ en $L^{i+1} \oplus K^{i+2} \underset{def}{=} C(f)^{i+1}$.

En particular, si denotamos por $K[1]^\bullet$ al complejo $K[1]^i := K^{i+1}$ con diferencial $d^i_{K[1]} := -d^{i+1}_K$ entonces la sucesión de complejos $0 \to L^\bullet \xhookrightarrow{i} C(f)^\bullet \xrightarrow{\pi} K[1]^\bullet \to 0$ es exacta. Así, obtenemos en cohomología la sucesión exacta larga

$$\dots \to H^i(L^\bullet) \to H^i(C(f)^\bullet) \to H^i(K[1]^\bullet) \cong H^{i+1}(K^\bullet) \xrightarrow{\delta^i} H^{i+1}(L^\bullet) \to H^{i+1}(C(f)^\bullet) \to \dots \quad (*)$$

donde en este caso (por construcción), el morfismo de conexión δ^i coincide con el morfismo $H^{i+1}(f): H^{i+1}(K^\bullet) \to H^{i+1}(L^\bullet)$ inducido en cohomología por f.

[Prop: Sea $f: K^\bullet \to L^\bullet$ un morfismo de complejos positivos en $\mathcal{C}$ tal que:
① f es un quasi-isomorfismo (i.e., $H^i(f): H^i(K^\bullet) \to H^i(L^\bullet)$ es un isomorfismo $\forall i$); y
② Los objetos de $K^\bullet$ y $L^\bullet$ son $\mathcal{F}$-acíclicos.
Entonces, $\mathcal{F}(f): \mathcal{F}(K^\bullet) \to \mathcal{F}(L^\bullet)$ es un quasi-isomorfismo.]

Dem: Las hipótesis ① y ② implican, usando (*), que el complejo $C(f)^\bullet$ es exacto y cada objeto $C(f)^i \underset{def}{=} L^i \oplus K^{i+1}$ es $\mathcal{F}$-acíclico. Luego, el Lema anterior implica que $\mathcal{F}(C(f)^\bullet) \cong C(\mathcal{F}(f))^\bullet$ es exacto también. Así, la sucesión exacta larga (*) asociada a la sucesión exacta corta

$$0 \to \mathcal{F}(L^\bullet) \to C(\mathcal{F}(f))^\bullet \to \mathcal{F}(K[1]^\bullet) \to 0$$

muestra que el morfismo de complejos $\mathcal{F}(f): \mathcal{F}(K^\bullet) \to \mathcal{F}(L^\bullet)$ es un quasi-isomorfismo. ■

[Teorema de de Rham: Sea A un objeto en $\mathcal{C}$ y sea $A \to K^\bullet$ una resolución de A tal que todos los objetos de $K^\bullet$ son $\mathcal{F}$-acíclicos. Entonces, hay un isomorfismo canónico

$$H^i(\mathcal{F}(K^\bullet)) \xrightarrow{\sim} R^i\mathcal{F}(A) \quad \text{para todo } i \geq 0.$$]

Dem: Consideremos la resolución inyectiva $A \to I^\bullet_A$ que escogimos para calcular $R^i\mathcal{F}(A) \underset{def}{=} H^i(\mathcal{F}(I^\bullet_A))$, entonces (ver Teorema en §31, pág 107) la resolución $A \to K^\bullet$ induce un morfismo de complejos $f: K^\bullet \to I^\bullet_A$ (único módulo homotopía) tal que el diagrama siguiente

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[dr] & K^\circ \arrow[d, "f"] \\ & I_A^\circ \end{tikzcd}$$

es conmutativo. Aplicando $\mathcal{F}$ obtenemos un morfismo de complejos $\mathcal{F}(K^\circ) \to \mathcal{F}(I_A^\circ)$ (único módulo homotopía). Así, obtenemos un <u>único</u> morfismo inducido en cohomología $H^i(\mathcal{F}(K^\circ)) \longrightarrow H^i(\mathcal{F}(I_A^\circ)) \underset{\text{Df}}{=} R^i\mathcal{F}(A)$.

Finalmente, dado que $A \to K^\circ$ y $A \to I_A^\circ$ son <u>resoluciones</u> del mismo objeto, tenemos que $f : K^\circ \to I_A^\circ$ es un quasi-isomorfismo (ver Df/construcción en §31, p.107) ✓ Además, K° y I_A° son $\mathcal{F}$-acíclicos (por hipótesis y pues I_A° inyectivo, resp.), por lo que la proposición anterior implica que $\mathcal{F}(K^\circ) \to \mathcal{F}(I_A^\circ)$ es un quasi-isomorfismo, ie, $H^i(\mathcal{F}(K^\circ)) \cong R^i\mathcal{F}(A)$ $\forall i \geq 0$ ∎

[<u>Conclusión</u>: Para calcular los functores derivados $R^i\mathcal{F}$ de $\mathcal{F}$ basta considerar resoluciones $\mathcal{F}$-acíclicas en lugar de resoluciones inyectivas!]

<u>Cultura general</u>: En 1931, Georges de Rham considera X variedad diferenciable y $\mathcal{O}_X = \mathcal{C}^\infty_X$ haz de funciones diferenciables, y construye el complejo (de de Rham!)

$$0 \to \underline{\mathbb{R}} \overset{i}{\hookrightarrow} \mathcal{O}_X \xrightarrow{d} \Omega^1_X \xrightarrow{d} \Omega^2_X \to \dots \to \Omega^{\dim(X)}_X \qquad (\text{cf. §4, pág 17})$$

y calcula (cf. Lema de Poincaré) que $H^i(X, \Omega^p_X) = 0$ $\forall i > 0$ y $\forall p \geq 0$ (con $\Omega^0_X := \mathcal{O}_X$), ie, $\underline{\mathbb{R}} \to \Omega^\circ_X$ es una resolución Γ-acíclica del haz $\underline{\mathbb{R}}$. Luego, el Teorema de de Rham implica:

$$H^i(X, \underline{\mathbb{R}}) \cong H^i(\Gamma(\Omega^\circ_X)) = \frac{\ker\{d : \Omega^i_X(X) \to \Omega^{i+1}_X(X)\}}{\operatorname{Im}\{d : \Omega^{i-1}_X(X) \to \Omega^i_X(X)\}} \underset{\text{Df}}{=} \frac{\{i\text{-formas } \underline{\text{cerradas}}\}}{\{i\text{-formas } \underline{\text{exactas}}\}} =: H^i_{dR}(X).$$

En 1953, Pierre Dolbeault demuestra resultados análogos para variedades <u>complejas</u>.

Inspirados por la discusión anterior, consideremos en lo que sigue un <u>espacio topológico</u> X y sea $\underline{\mathrm{Sh}}(X)$ la categoría de haces de grupos abelianos en X. Así, los functores derivados del functor de secciones globales $\Gamma : \underline{\mathrm{Sh}}(X) \to \underline{\mathrm{Ab}}$, $\mathcal{F} \mapsto \Gamma(X, \mathcal{F})$ son los $H^i(X, \mathcal{F})$.

[<u>Df</u>: Decimos que un haz de grupos abelianos $\mathcal{F}$ en X es <u>flasque</u> (o "blando", o "flabby") si para todo abierto $\mathcal{U} \subseteq X$, el morfismo de restricción $\mathcal{F}(X) \twoheadrightarrow \mathcal{F}(\mathcal{U})$ es <u>sobreyectivo</u>.]

[<u>Lema</u>: Sea $0 \to \mathcal{F} \xrightarrow{f} \mathcal{G} \xrightarrow{g} \mathcal{H} \to 0$ sucesión exacta de haces de grupos abelianos en X, y supongamos que $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ son flasques. Entonces:

① $\Gamma(g) : \Gamma(X, \mathcal{G}) \twoheadrightarrow \Gamma(X, \mathcal{H})$ es sobreyectivo.

② $\mathcal{H}$ es flasque.]

<u>Dem</u>: Probemos más generalmente que si $\mathcal{F}$ flasque (con $\mathcal{G}$ y $\mathcal{H}$ arbitrarios!) entonces $\forall \mathcal{U} \subseteq X$ abierto se tiene que $\mathcal{G}(\mathcal{U}) \twoheadrightarrow \mathcal{H}(\mathcal{U})$ es sobreyectivo: Sea $\sigma \in \mathcal{H}(\mathcal{U})$ y consideremos el conjunto (parcialmente ordenado $\neq \emptyset$) de pares (V, s) con $V \subseteq \mathcal{U}$ abierto y $s \in \mathcal{G}(V)$ tq $g(s) = \sigma|_V$.

$\underset{\text{Lema de Zorn}}{\Rightarrow}$ $\exists$ (V, s) elemento <u>maximal</u>. Veamos que necesariamente $V = \mathcal{U}$:

Sino, $\exists\, x \in \mathcal{U}$ tq $x \notin V$. Como $\mathcal{G} \twoheadrightarrow \mathcal{H}$ morfismo sobreyectivo de haces (!), $\exists\, \mathcal{U}_x \subseteq \mathcal{U}$ vecindad abierta de x y $t \in \mathcal{G}(\mathcal{U}_x)$ tq $g(t) = \sigma|_{\mathcal{U}_x}$. Sea $W := V \cap \mathcal{U}_x$:

$\Rightarrow g(s) = g(t)$ en $\mathcal{H}(W)$, ie, $s - t \in \ker(g)(W)$

$\underset{\text{Exactitud}}{\Rightarrow}$ $\exists\, \tilde{s} \in \mathcal{F}(W)$ tal que $f(\tilde{s}) = s - t$ en $\mathcal{G}(W)$ (∗)

Construyamos $\tau \in \mathcal{G}(V \cup \mathcal{U}_x)$ tq $g(\tau) = \sigma|_{V \cup \mathcal{U}_x}$ (contradiciendo la maximalidad de (V, s)):
Como $\mathcal{F}$ flasque, $\tilde{s} \in \mathcal{F}(W)$ es restricción de cierta sección en $\mathcal{F}(V)$, que también llamaremos $\tilde{s} \in \mathcal{F}(V)$. Sea $\tilde{t} := s - f(\tilde{s}) \in \mathcal{G}(V)$. Entonces, $\tilde{t}|_W \overset{(*)}{=} t \in \mathcal{G}(W)$. Así, $t \in \mathcal{G}(\mathcal{U}_x)$ y $\tilde{t} \in \mathcal{G}(V)$ cumplen $t|_{\mathcal{U}_x \cap V} = \tilde{t}|_{\mathcal{U}_x \cap V}$ $\Rightarrow$ se pegan en $\tau \in \mathcal{G}(V \cup \mathcal{U}_x)$, donde $g(\tau) \in \mathcal{H}(V \cup \mathcal{U}_x)$ cumple $g(\tau)|_{\mathcal{U}_x} = g(\tau|_{\mathcal{U}_x}) = g(t) = \sigma|_{\mathcal{U}_x}$ y $g(\tau)|_V = g(\tau|_V) = g(\tilde{t}) \overset{\text{Df}}{=} g(s) - \overset{0}{\cancel{g(f(\tilde{s}))}} = \sigma|_V$

$\Rightarrow g(\tau) = \sigma|_{V \cup \mathcal{U}_x}$, contradicción! $\rightsquigarrow$ ① ✓ Para ② consideramos el diagrama:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{G}(X) & \twoheadrightarrow & \mathcal{H}(X) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{G}(\mathcal{U}) & \twoheadrightarrow & \mathcal{H}(\mathcal{U}) \end{array}$$

Para todo $\mathcal{U} \subseteq X$ abierto, las flechas horizontales son sobreyectivas por la prueba de ①. Además, la primera flecha vertical es sobreyectiva pues $\mathcal{G}$ flasque $\Rightarrow$ La segunda también, ie, $\mathcal{H}$ es flasque ✓ ■

Construcción (extensión por cero): Sea $(X, \mathcal{O}_X)$ un espacio anillado y $\mathcal{U} \overset{j}{\hookrightarrow} X$ abierto no-vacío. Dado $\mathcal{F}$ un $\mathcal{O}_\mathcal{U}$-módulo, definimos el haz extensión por cero $j_!\mathcal{F}$ en X como el haz asociado al prehaz $j_!^{\text{pre}}\mathcal{F}$ dado por

$$(j_!^{\text{pre}}\mathcal{F})(V) = \begin{cases} \{0\} & \text{si } V \not\subseteq \mathcal{U} \\ \mathcal{F}(V) & \text{si } V \subseteq \mathcal{U} \end{cases}$$

Así, $j_!\mathcal{F}$ es un $\mathcal{O}_X$-módulo y más aún la correspondencia $\mathcal{F}(X) \overset{\text{def}}{=} \Gamma(X, \mathcal{F}) \cong \mathrm{Hom}_X(\mathcal{O}_X, \mathcal{F})$ (ver §29, p.100) se generaliza a $\mathcal{F}(\mathcal{U}) \cong \mathrm{Hom}_X(j_!\mathcal{O}_\mathcal{U}, \mathcal{F})$ $\boxed{\text{Ejercicio}}$.

Prop: Sea $(X, \mathcal{O}_X)$ espacio anillado y sea $\mathcal{I}$ un $\mathcal{O}_X$-módulo inyectivo. Entonces, $\mathcal{I}$ es flasque.

Dem: Sea $\mathcal{U} \subseteq X$ abierto con inclusión $j : \mathcal{U} \hookrightarrow X$, entonces $0 \to j_!\mathcal{O}_\mathcal{U} \hookrightarrow \mathcal{O}_X$ es exacta. Por otro lado, por definición (ver §31, p.105) $\mathcal{I}$ es inyectivo si y sólo si el funtor contravariante $\mathrm{Hom}_X(\cdot, \mathcal{I})$ es exacto. En part, $\mathcal{I}(X) \cong \mathrm{Hom}_X(\mathcal{O}_X, \mathcal{I}) \twoheadrightarrow \mathcal{I}(\mathcal{U}) \cong \mathrm{Hom}_X(j_!\mathcal{O}_\mathcal{U}, \mathcal{I}) \to 0$ exacta ✓ ■

Obs importante: En nuestra definición de espacio anillado $(X, \mathcal{O}_X)$ pedimos originalmente que $\mathcal{O}_X$ fuese un haz de k-álgebras (ver §4, p.15). Sin embargo, se puede considerar sin problemas $\mathcal{O}_X$ como un haz de anillos abelianos sin problema! En part, si $\mathcal{O}_X = \underline{\mathbb{Z}}$ entonces $\mathcal{O}_X$-$\underline{\text{Mod}} = \underline{\text{Sh}}(X)$ y así la Proposición dice que "Todo haz de grupos abelianos en un esp. top. X es flasque"!

Teorema: Sea X un espacio topológico y $\mathcal{F}$ un haz de grupos abelianos en X. Supongamos que $\mathcal{F}$ es flasque, entonces $H^i(X, \mathcal{F}) = 0$ para todo $i > 0$ (ie, $\mathcal{F}$ es Γ-acíclico).

Dem: Consideremos $\mathcal{F} \hookrightarrow \mathcal{I}$ con $\mathcal{I}$ inyectivo en $\underline{\text{Sh}}(X)$ (y en particular $H^i(X, \mathcal{I}) = 0$ $\forall i > 0$). Sea $\mathcal{G} := \mathcal{I}/\mathcal{F}$ y consideremos la sucesión exacta $0 \to \mathcal{F} \hookrightarrow \mathcal{I} \twoheadrightarrow \mathcal{G} \to 0$, donde $\mathcal{F}$ e $\mathcal{I}$ son flasques (por la Proposición) $\overset{\text{Lema}}{\Longrightarrow}$ $\mathcal{G}$ es flasque y $0 \to \Gamma(X, \mathcal{F}) \to \Gamma(X, \mathcal{I}) \twoheadrightarrow \Gamma(X, \mathcal{G}) \to 0$ es exacta. Así, la sucesión exacta larga en cohomología se reduce a:

$0 \to H^1(X, \mathcal{F}) \to \underbrace{H^1(X, \mathcal{I})}_{0} \to H^1(X, \mathcal{G}) \xrightarrow{\sim} H^2(X, \mathcal{F}) \to \underbrace{H^2(X, \mathcal{I})}_{0} \to \dots$, ie, $H^1(X, \mathcal{F}) = 0$ y además $H^i(X, \mathcal{F}) \cong H^{i-1}(X, \mathcal{G})$ $\forall i \geq 2$. Luego, por inducción en $i \in \mathbb{N}^{\geq 1}$, tenemos $H^i(X, \mathcal{F}) = 0$ $\forall i > 0$ ■

Conclusión: En un espacio topológico X, para calcular los grupos de cohomología $H^i(X, \mathcal{F})$ basta considerar resoluciones flasques de $\mathcal{F}$ en lugar de resoluciones inyectivas!

Esto último implica que en una variedad algebraica X, los funtores derivados (grupos de cohomología) de $\Gamma : \mathcal{O}_X$-$\underline{\text{Mod}} \to A$-$\underline{\text{Mod}}$ (con $A = \mathcal{O}(X)$) y $\Gamma : \underline{\text{Sh}}(X) \to \underline{\text{Ab}}$ coinciden. Más precisamente:

Corolario: Sea X una variedad algebraica y sea $\mathcal{F}$ un $\mathcal{O}_X$-Módulo. Entonces, si denotamos por $\mathcal{F}_{ab}$ el haz de grupos abelianos subyacente a $\mathcal{F}$, tenemos que:

$$H^i(X, \mathcal{F}) \cong H^i(X, \mathcal{F}_{ab}) \quad \text{para todo } i \geq 0.$$

Dem: Sea $\mathcal{F} \to \mathcal{I}^\circ$ una resolución inyectiva en la categoría $\mathcal{O}_X$-$\underline{\text{Mod}}$. Entonces, gracias a la proposición anterior, $\mathcal{F}_{ab} \to \mathcal{I}^\circ_{ab}$ es una resolución flasque en $\underline{\text{Sh}}(X)$. Así, el Teorema anterior implica que los objetos de $\mathcal{I}^\circ_{ab}$ son Γ-acíclicos ✓ Finalmente, el Teorema de de Rham implica que la resolución $\mathcal{F}_{ab} \to \mathcal{I}^\circ_{ab}$ permite calcular

$$H^i(X, \mathcal{F}) \overset{\text{def}}{=} H^i(\Gamma(\mathcal{I}^\circ)) = H^i(\Gamma(\mathcal{I}^\circ_{ab})) \underset{\text{dR}}{\cong} H^i(X, \mathcal{F}_{ab}) \ ✓ \ ■$$