§32. Functores derivados

Comencemos por la siguiente construcción:

Sean $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ categorías abelianas, donde $\mathcal{C}$ posee suficientes inyectivos (!). Consideremos un functor covariante aditivo $\mathcal{F}: \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ y construyamos functores $R^i\mathcal{F}: \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ $\forall i \geq 0$ como sigue:

Para cada objeto A en $\mathcal{C}$, escogemos $A \to I_A^\bullet$ una resolución inyectiva y definimos

$$R^i\mathcal{F}(A) := H^i(\mathcal{F}(I_A^\bullet)) \text{ en } \mathcal{D}. \quad \forall i \in \mathbb{N}.$$

Más aún, si $f: A \to B$ es un morfismo en $\mathcal{C}$ entonces (ver §31, p. 107), podemos extender f a un morfismo de complejos $g: I_A^\bullet \to I_B^\bullet$ tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d, "f"'] & I_A^\bullet \arrow[d, "g"] \\ B \arrow[r] & I_B^\bullet \end{tikzcd} \quad \text{es conmutativo.}$$

Más aún, g es único módulo homotopía, y luego el morfismo $H^i(\mathcal{F}(g)): H^i(\mathcal{F}(I_A^\bullet)) \to H^i(\mathcal{F}(I_B^\bullet))$ es independiente de la elección de g y será denotado

$$(R^i\mathcal{F})(f): R^i\mathcal{F}(A) \to R^i\mathcal{F}(B).$$

Def: Dado un functor (covariante) aditivo $\mathcal{F}: \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ entre categorías abelianas, donde $\mathcal{C}$ posee suficientes inyectivos, el functor $R^i\mathcal{F}: \mathcal{C} \to \mathcal{D}$, $A \mapsto R^i\mathcal{F}(A)$ es llamado el *i-ésimo functor derivado* (derecho) de $\mathcal{F}$.

Lema útil: Sea $\varepsilon: A \to I^\bullet$ una resolución inyectiva de A, entonces el morfismo canónico $H^i(\mathcal{F}(I^\bullet)) \xrightarrow{\sim} R^i\mathcal{F}(A)$ es un isomorfismo (ie, la construcción de $R^i\mathcal{F}(A)$ es indep. de elecciones).

Dem: Considerando $Id_A: A \to A$, las resoluciones $A \to I^\bullet$ y $A \to I_A^\bullet$ inducen un único (módulo homotopía) $g: I^\bullet \to I_A^\bullet$. Invirtiendo el rol de $I^\bullet$ con $I_A^\bullet$ obtenemos $h: I_A^\bullet \to I^\bullet$ único (módulo homotopía) y donde $g \circ h \sim Id_{I_A^\bullet}$ y $h \circ g \sim Id_{I^\bullet}$, por lo que g y h son quasi-isom (ver §31, p.106). Dado que la imagen por $\mathcal{F}$ de una homotopía es una homotopía de morfismos de complejos en $\mathcal{D}$, tenemos que $\mathcal{F}(g): \mathcal{F}(I^\bullet) \to \mathcal{F}(I_A^\bullet)$ también es invertible módulo homotopía y luego un quasi-isom, ie, $H^i(\mathcal{F}(I^\bullet)) \xrightarrow{\sim} H^i(\mathcal{F}(I_A^\bullet)) \underset{\text{def}}{=} R^i\mathcal{F}(A)$ isomorfismo $\forall i \geq 0$. ∎

Importante: El complejo (exacto) $0 \to A \xrightarrow{\varepsilon^0} I_A^0 \xrightarrow{d^0} I_A^1 \xrightarrow{d^1} I_A^2 \to \dots$ en $\mathcal{C}$ induce un complejo $\mathcal{F}(A) \xrightarrow{\mathcal{F}(\varepsilon^0)} \mathcal{F}(I_A^0) \xrightarrow{\mathcal{F}(d^0)} \mathcal{F}(I_A^1) \to \dots$ en $\mathcal{D}$. Dado que $d^0 \circ \varepsilon^0 = 0$, tenemos $\mathcal{F}(d^0) \circ \mathcal{F}(\varepsilon^0) = 0$ y luego $\mathcal{F}(\varepsilon^0): \mathcal{F}(A) \to \mathcal{F}(I_A^0)$ se factoriza por $\mathcal{F}(A) \to \ker(\mathcal{F}(d^0)) \underset{\text{def}}{=} H^0(\mathcal{F}(I_A^\bullet)) \underset{\text{def}}{=} (R^0\mathcal{F})(A)$ de manera functorial (ie, existe una transformación natural $\mathcal{F} \to R^0\mathcal{F}$) !

Teorema: Sea $\mathcal{F}: \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ un functor (covariante) aditivo entre categorías abelianas, donde $\mathcal{C}$ tiene suficientes inyectivos. Entonces:

1. Si $\mathcal{F}$ es *exacto por la izquierda*, la transformación natural $\mathcal{F} \to R^0\mathcal{F}$ es un *isomorfismo*.
2. *Toda* sucesión exacta $0 \to A \to B \to C \to 0$ en $\mathcal{C}$, tiene asociada una sucesión *exacta* (larga) $\dots \to R^i\mathcal{F}(A) \to R^i\mathcal{F}(B) \to R^i\mathcal{F}(C) \xrightarrow{\delta^i} R^{i+1}\mathcal{F}(A) \to \dots$ en $\mathcal{D}$ de manera functorial, ie, dado un morfismo de sucesiones exactas (cortas) en $\mathcal{C}$
$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[d] & B \arrow[r] \arrow[d] & C \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ 0 \arrow[r] & A' \arrow[r] & B' \arrow[r] & C' \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$
el diagrama
$$\begin{tikzcd} R^i\mathcal{F}(C) \arrow[r, "\delta^i"] \arrow[d] & R^{i+1}\mathcal{F}(A) \arrow[d] \\ R^i\mathcal{F}(C') \arrow[r, "\delta^i"] & R^{i+1}\mathcal{F}(A') \end{tikzcd} \quad \text{es conmutativo.}$$
3. Para todo objeto *inyectivo* I en $\mathcal{C}$, se tiene $R^i\mathcal{F}(I) = 0$ para todo $i > 0$.

Dem: 1. Sea A objeto en $\mathcal{C}$ y $\varepsilon: A \to I^\bullet$ una resolución inyectiva. La sucesión exacta en $\mathcal{C}$ $0 \to A \xrightarrow{\varepsilon^0} I^0 \xrightarrow{d^0} I^1$ es enviada por $\mathcal{F}$ en la sucesión *exacta* (!) $0 \to \mathcal{F}(A) \to \mathcal{F}(I^0) \to \mathcal{F}(I^1)$, y luego $\mathcal{F}(A) \cong \ker(\mathcal{F}(d^0)) = (R^0\mathcal{F})(A)$ ✓ Para probar 2:

Sea $0 \to A \xhookrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to 0$ sucesión exacta en $\mathcal{C}$, y sean $A \xrightarrow{\varepsilon_A} I_A^\bullet$, $B \xrightarrow{\varepsilon_B} I_B^\bullet$ y $C \xrightarrow{\varepsilon_C} I_C^\bullet$ resoluciones inyectivas fijas. A priori, <u>no</u> contamos con $0 \to I_A^\bullet \to I_B^\bullet \to I_C^\bullet \to 0$ sucesión exacta! Veamos que $B \to I^\bullet$ con $I^i := I_A^i \oplus I_C^i$ también es una resolución inyectiva de B (y donde construiremos $d^i : I^i \to I^{i+1}$ por inducción en $i \in \mathbb{N}$): El morfismo de aumentación $\varepsilon_A^0 : A \hookrightarrow I_A^0$ se extiende a $\eta : B \to I_A^0$ pues $A \xhookrightarrow{f} B$ y I_A^0 objeto inyectivo. Así, usando $\varepsilon_C^0 : C \hookrightarrow I_C^0$, construimos $\varepsilon^0 := (\eta, \varepsilon_C^0 \circ g) : B \to I^0 \overset{def}{=} I_A^0 \oplus I_C$ que hace el diagrama

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & I_A^0 \arrow[r, hook, "i"] & I^0 \arrow[r, two heads, "\pi"] & I_C^0 \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & A \arrow[u, hook, "\varepsilon_A^0"] \arrow[r, hook, "f"] & B \arrow[u, "\varepsilon^0"] \arrow[r, two heads, "g"] & C \arrow[u, hook, "\varepsilon_C^0"'] \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

conmutativo.

Luego, el lema de la serpiente implica que $\varepsilon^0 : B \hookrightarrow I^0$ es inyectivo y que la sucesión de cokernels $I_A^1 = \operatorname{coker}(\varepsilon_A^0) \longrightarrow I^1 \cong \operatorname{coker}(\varepsilon^0) \longrightarrow I_C^1 = \operatorname{coker}(\varepsilon_C^0)$ es exacta! Así, obtenemos $d^0 : I^0 \to I^1$ ✓ Intercambiando el rol de $0 \to A \to B \to C \to 0$ por $0 \to I_A^0 \to I \to I_C^0 \to 0$, obtenemos $d^1 : I^1 \to I^2$, y así sucesivamente ✓ Luego, obtemos una sucesión <u>exacta</u> de complejos $0 \to I_A^\bullet \xrightarrow{i} I^\bullet \xrightarrow{\pi} I_C^\bullet \to 0$, donde (más aún!) $I^\bullet = I_A^\bullet \oplus I_C^\bullet$, y luego $F(I^\bullet) = F(I_A^\bullet) \oplus F(I_C^\bullet)$ (!). En particular, la sucesión $0 \to F(I_A^\bullet) \to F(I^\bullet) \to F(I_C^\bullet) \to 0$ es exacta en $\mathcal{D}$ y, por el lema de la serpiente, tenemos $\cdots \to H^i(I_A^\bullet) \underset{def}{=} R^iF(A) \to H^i(I^\bullet) \underset{\text{lema útil}}{\cong} H^i(I_B^\bullet) \underset{def}{=} R^iF(B) \to H^i(I_C^\bullet) \underset{def}{=} R^iF(C) \xrightarrow{\delta^i} R^{i+1}F(A) \to \cdots$ sucesión exacta larga asociada ✓ Veamos que la construcción es functorial:
sea $0 \to I_{A'}^\bullet \to (I')^\bullet \to I_{C'}^\bullet \to 0$ asociada a $0 \to A' \to B' \to C' \to 0$, y donde $A' \to I_{A'}^\bullet$, $B' \to (I')^\bullet$ y $C' \to I_{C'}^\bullet$ son resoluciones inyectivas (tal como antes). La composición de $B \to B'$ y de $B' \xhookrightarrow{\eta'} I_{A'}^0$ induce un morfismo $I_A^0 \to I_{A'}^0$ (pues $I_{A'}^0$ objeto inyectivo) tal que

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[r, hook, "\eta"] \arrow[d] & I_A^0 \arrow[d] \\
B \arrow[r, hook, "\eta'"] & I_{A'}^0
\end{tikzcd}$$

es conmutativo. Además, obtenemos un morfismo de complejos:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & I_A^\bullet \arrow[r] \arrow[d] & I^\bullet \arrow[r] \arrow[d] & I_C^\bullet \arrow[r] \arrow[d] & 0 & \text{con } I^\bullet = I_A^\bullet \oplus I_C^\bullet \\
0 \arrow[r] & I_{A'}^\bullet \arrow[r] & (I')^\bullet \arrow[r] & I_{C'}^\bullet \arrow[r] & 0 & \text{con } (I')^\bullet = I_{A'}^\bullet \oplus I_{C'}^\bullet
\end{tikzcd}$$

Aplicando F y considerando la sucesión exacta larga asociada, obtenemos ② ✓
Finalmente, ③ se deduce del lema útil considerando para un objeto inyectivo I la resolución inyectiva $I \to R^\bullet$ dada por $0 \to I \xrightarrow[\sim]{\varepsilon^0 = Id_I} I =: R^0 \xrightarrow{d^0} 0 \xrightarrow{d^1} 0 \to \cdots$. Así, recordando (ver §1, pág 3) que $F(Id_I) = Id_{F(I)}$, tenemos que $0 \to F(I) \xrightarrow[\sim]{F(\varepsilon^0)} F(I) \xrightarrow{d^0} 0 \to 0 \to \cdots$ es <u>exacta</u> (!) y luego $R^iF(A) \cong H^i(F(R^\bullet)) = 0$ si $i > 0$. ■

¡Por fin! Estamos listos para "derivar" nuestros functores (exactos por la izquierda) favoritos:

<u>Ejemplos/Definiciones importantes</u> (cf. Ejemplos en §30, pág 104):

① Sea A anillo conmutativo con unidad y M un A-módulo. Los functores derivados (derechos) del functor $N \mapsto \mathrm{Hom}_A(M,N)$ se llaman $\mathrm{Ext}^i_A(M,N)$ (muy usados en topología!). En particular, toda sucesión exacta corta $0 \to N_1 \xrightarrow{f} N_2 \xrightarrow{g} N_3 \to 0$ de A-módulos induce una sucesión exacta

$$0 \to \mathrm{Hom}_A(M,N_1) \xrightarrow{f_*} \mathrm{Hom}_A(M,N_2) \xrightarrow{g_*} \mathrm{Hom}_A(M,N_3) \xrightarrow{\delta^0} \mathrm{Ext}^1_A(M,N_1) \to \mathrm{Ext}^1_A(M,N_2) \to \mathrm{Ext}^1_A(M,N_3) \xrightarrow{\delta^1} \mathrm{Ext}^2_A(M,N_1)$$

② Sea $(X, \mathcal{O}_X)$ un espacio anillado y $\mathcal{F}$ un $\mathcal{O}_X$-módulo, los functores derivados del functor $\mathcal{G} \mapsto \mathrm{Hom}_X(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ se denotan $\mathrm{Ext}^i_X(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ (o simplemente $\mathrm{Ext}^i(\mathcal{F}, \mathcal{G})$). Como antes, una sucesión exacta $0 \to \mathcal{G}_1 \to \mathcal{G}_2 \to \mathcal{G}_3 \to 0$ de $\mathcal{O}_X$-módulos induce una sucesión exacta en <u>Ab</u>:

$$0 \to \mathrm{Hom}_X(\mathcal{F}, \mathcal{G}_1) \to \mathrm{Hom}_X(\mathcal{F}, \mathcal{G}_2) \to \mathrm{Hom}_X(\mathcal{F}, \mathcal{G}_3) \to \mathrm{Ext}^1_X(\mathcal{F}, \mathcal{G}_1) \to \mathrm{Ext}^1_X(\mathcal{F}, \mathcal{G}_2) \to \mathrm{Ext}^1_X(\mathcal{F}, \mathcal{G}_3) \to \cdots$$

③ Sea $(X, \mathcal{O}_X)$ espacio anillado y $\mathcal{F}$ un $\mathcal{O}_X$-módulo, los functores derivados del functor $\mathcal{G} \mapsto \mathcal{H}om(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ se denotan $\mathcal{E}xt^i(\mathcal{F}, \mathcal{G})$. Así, $0 \to \mathcal{G}_1 \to \mathcal{G}_2 \to \mathcal{G}_3 \to 0$ sucesión exacta de $\mathcal{O}_X$-mód. induce una sucesión exacta (de $\mathcal{O}_X$-módulos!):

$$0 \to \mathcal{H}om(\mathcal{F}, \mathcal{G}_1) \to \mathcal{H}om(\mathcal{F}, \mathcal{G}_2) \to \mathcal{H}om(\mathcal{F}, \mathcal{G}_3) \to \mathcal{E}xt^1(\mathcal{F}, \mathcal{G}_1) \to \mathcal{E}xt^1(\mathcal{F}, \mathcal{G}_2) \to \mathcal{E}xt^1(\mathcal{F}, \mathcal{G}_3) \to \cdots$$

④ Sea X una variedad algebraica con $A = \mathcal{O}(X)$. Los functores derivados del functor de secciones globales $\Gamma : \mathcal{O}_X\text{-}\underline{\mathrm{Mod}} \to A\text{-}\underline{\mathrm{Mod}}$, $\mathcal{F} \mapsto \Gamma(X,\mathcal{F})$ se llaman <u>grupos de cohomología</u>, y se denotan $H^i(X,\mathcal{F})$. En part, gracias al Teorema anterior, $H^0(X,\mathcal{F}) \cong \Gamma(X,\mathcal{F})$ y toda sucesión exacta $0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{G} \to \mathcal{H} \to 0$ de $\mathcal{O}_X$-módulos induce una sucesión exacta larga

$$0 \to \Gamma(X,\mathcal{F}) \to \Gamma(X,\mathcal{G}) \to \Gamma(X,\mathcal{H}) \xrightarrow{\delta^0} H^1(X,\mathcal{F}) \to H^1(X,\mathcal{G}) \to H^1(X,\mathcal{H}) \xrightarrow{\delta^1} H^2(X,\mathcal{F}) \to \dots$$

de A-módulos!

⑤ Sea $f : X \to Y$ morfismo regular entre variedades algebraicas. Los functores derivados del functor imagen directa $f_* : \underline{\mathrm{Qcoh}}(X) \to \underline{\mathrm{Qcoh}}(Y)$, $\mathcal{F} \mapsto f_*\mathcal{F}$ se llaman <u>imágenes directas superiores</u>, y se denotan $R^i f_* \mathcal{F}$. En part, $R^0 f_* \mathcal{F} \cong f_* \mathcal{F}$ y toda sucesión exacta $0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{G} \to \mathcal{H} \to 0$ de haces quasi-coherentes en X induce una sucesión exacta larga

$$0 \to f_*\mathcal{F} \to f_*\mathcal{G} \to f_*\mathcal{H} \to R^1 f_*\mathcal{F} \to R^1 f_*\mathcal{G} \to R^1 f_*\mathcal{H} \to R^2 f_*\mathcal{F} \to \dots$$

de haces quasi-coherentes en Y.

<u>Obs</u>: Sea X un espacio topológico y $\underline{\mathrm{Sh}}(X)$ la categoría de haces de grupos abelianos en X. Los functores derivados del functor $\Gamma : \underline{\mathrm{Sh}}(X) \to \underline{\mathrm{Ab}}$, $\mathcal{F} \mapsto \Gamma(X,\mathcal{F})$ también se llaman grupos de cohomología de X con valores en $\mathcal{F}$ y también denotados $H^i(X,\mathcal{F})$. Veremos más adelante que si X es una variedad algebraica, ambos grupos de cohomología (este último y ④) coinciden.

<u>Prop</u>: Sea X una variedad algebraica y $\mathcal{F}$ un $\mathcal{O}_X$-módulo. Entonces:
① $\mathcal{E}xt^0(\mathcal{O}_X,\mathcal{F}) \cong \mathcal{F}$ y $\mathcal{E}xt^i(\mathcal{O}_X,\mathcal{F}) = 0$ si $i > 0$.
② $\mathrm{Ext}^i(\mathcal{O}_X,\mathcal{F}) \cong H^i(X,\mathcal{F})$ para todo $i \geq 0$.
Más generalmente, si $\mathcal{E}$ es un $\mathcal{O}_X$-módulo localmente libre de rango r, entonces se tiene que $\mathrm{Ext}^i(\mathcal{E},\mathcal{F}) \cong H^i(X, \mathcal{E}^\vee \otimes \mathcal{F})$ para todo $i \geq 0$.

<u>Dem</u>: Como $\mathcal{H}om(\mathcal{O}_X,\mathcal{F}) \cong \mathcal{F}$, tenemos que $\mathcal{H}om(\mathcal{O}_X,-) \cong \mathrm{Id}_{\mathcal{O}_X\text{-}\underline{\mathrm{Mod}}}$ es un functor <u>exacto</u>, de donde se obtiene ① ✓ Para ②, notamos que por la biyección entre $\Gamma(X,\mathcal{F})$ y $\mathrm{Hom}_X(\mathcal{O}_X,\mathcal{F})$ (ver §29, pág 100) tenemos que $\Gamma(X,-) \cong \mathrm{Hom}_X(\mathcal{O}_X,-)$ y luego los functores derivados respectivos $H^i(X,\mathcal{F}) \cong \mathrm{Ext}^i(\mathcal{O}_X,\mathcal{F})$ coinciden $\forall i \geq 0$ ✓
Finalmente, notemos por un lado que las propiedades del producto tensorial (ver §2, pág 5) implican que $\mathrm{Hom}_X(\mathcal{E},-) = \mathrm{Hom}_X(\mathcal{O}_X \otimes \mathcal{E}, -) \cong \mathrm{Hom}_X(\mathcal{O}_X, \mathcal{E}^\vee \otimes -)$.

Por otro lado, si $\mathcal{F} \to \mathcal{I}^\bullet$ es una resolución inyectiva de $\mathcal{F}$ en $\mathcal{O}_X$-$\underline{\mathrm{Mod}}$ entonces al tensorizar por $\mathcal{E}^\vee$ (lo que preserva exactitud, pues $\mathcal{E}$ loc. libre!) obtenemos $\mathcal{E}^\vee \otimes \mathcal{F} \to \mathcal{R}^\bullet := \mathcal{E}^\vee \otimes \mathcal{I}^\bullet$ resolución inyectiva de $\mathcal{E}^\vee \otimes \mathcal{F}$ (pues $\mathcal{E}^\vee$ loc. libre y luego $(\mathcal{E}^\vee \otimes \mathcal{I}^i)|_{\mathcal{U}} \simeq (\mathcal{I}^i|_{\mathcal{U}})^{\oplus r}$). Dado que por definición $R^i F(A) := H^i(F(I_A^\bullet))$, tenemos que los complejos

$$\begin{array}{c} 0 \to \Gamma(X, \mathcal{E}^\vee \otimes \mathcal{F}) \to \Gamma(X, \mathcal{R}^\bullet) \\ \wr\wr \\ 0 \to \mathrm{Hom}_X(\mathcal{O}_X, \mathcal{E}^\vee \otimes \mathcal{F}) \cong \mathrm{Hom}_X(\mathcal{E},\mathcal{F}) \to \mathrm{Hom}_X(\mathcal{E}, \mathcal{I}^\bullet) \end{array}$$

calculan el mismo functor derivado, i.e., $H^i(X, \mathcal{E}^\vee \otimes \mathcal{F}) \cong \mathrm{Ext}^i(\mathcal{E},\mathcal{F})$ $\forall i \geq 0$ ✓ ■

<u>Cultura general</u>: Un objeto P en una categoría abeliana $\mathcal{C}$ es <u>proyectivo</u> si el functor $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(P,\cdot)$, $A \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(P,A)$, es <u>exacto</u>. Usando <u>resoluciones proyectivas</u> $P_\bullet \to A$ y <u>homología</u> se pueden definir functores derivados <u>izquierdos</u> $L_i F(A) := H_i(F(P_\bullet))$ para $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ functor exacto a la derecha. Por ejemplo, en A-$\underline{\mathrm{Mod}}$, el functor $M \otimes_A - : N \mapsto M \otimes_A N$ es exacto a la derecha, y su functor derivado izquierdo se denota $\mathrm{Tor}_i^A(M,N)$.