§31. Resoluciones inyectivas y quasi-isomorfismos

Durante esta sección, denotamos por $\mathcal{C}$ una categoría abeliana. La siguiente noción será fundamental en lo que sigue (cf. Teorema de Extensión de Hahn-Banach):

[**Def**: Decimos que un objeto $I \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ es *inyectivo* si para toda sucesión exacta en $\mathcal{C}$ de la forma $0 \to A \overset{\varphi}{\hookrightarrow} B$ (ie, "φ inyectivo") y todo morfismo $f : A \to I$, existe un morfismo (no nec. único) $g : B \to I$ tal que $g \circ \varphi = f$. Equivalentemente, el functor (contravariante!)

$$\mathrm{Hom}(\cdot, I) : \mathcal{C} \to \underline{Ab}, \quad A \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, I)$$

es *exacto*.

"
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, hook, "\varphi"] \arrow[d, "f"'] & B \arrow[dl, dotted, "\exists g"] \\
I &
\end{tikzcd}
"]

Nuestras categorías favoritas serán las siguientes:

[**Def**: Una categoría abeliana $\mathcal{C}$ *tiene suficientes inyectivos* si todo objeto $A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ se incrusta en un objeto inyectivo, ie, existe $I = I(A) \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ inyectivo y $A \hookrightarrow I$ morfismo de kernel nulo.]

Terminología (Teoría de Grupos): Un grupo abeliano G es *divisible* si $\forall m \in \mathbb{N}^{\geq 1}$ el morfismo $G \overset{\cdot m}{\twoheadrightarrow} G$, $x \mapsto mx$ es *sobreyectivo*. Por ejemplo, $(\mathbb{Q}, +)$ y $(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}, +)$ son divisibles.

[**Lema**: En la categoría $\underline{Ab}$ de grupos abelianos, todo grupo divisible G es inyectivo.

Dem: Sea $A \overset{\varphi}{\hookrightarrow} B$ subgrupo y $f : A \to B$ morfismo, con A, B grupos abelianos. Por el Lema de Zorn, $\exists B' \subseteq B$ subgrupo *maximal* tq $A \subseteq B'$ y tq $\exists g : B' \to G$ con $g \circ \varphi = f$. Veamos que $B' = B$: En caso contrario, $\exists b \in B$ tq $b \notin B'$, y consideramos la inclusión $B' \cap \langle b \rangle \hookrightarrow \langle b \rangle = \mathbb{Z}b$: si $B' \cap \langle b \rangle = 0$ podemos extender g al subgrupo $\langle B', b \rangle = B' \oplus \mathbb{Z}b$ por $\tilde{g}(b' + mb) := g(b')$, mientras que si $B' \cap \langle b \rangle \neq 0$ entonces $\exists m \in \mathbb{N}^{\geq 1}$ tq $mb \in B'$ y (como G divisible!) $g(mb) = my$ para algún $y \in G$, y extendemos g a $\langle B', b \rangle$ por $\tilde{g}(b' + mb) := g(b') + my$ ✓ Contradicción! (B' maximal). ∎

[**Prop**: La categoría $\underline{Ab}$ de grupos abelianos tiene suficientes inyectivos.

Dem: Veamos que todo grupo abeliano G se incrusta en un grupo divisible: Sea $\check{G} := \mathrm{Hom}(G, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$. El emparejamiento natural $\check{G} \times G \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ induce un morfismo $G \hookrightarrow \check{\check{G}}$, $a \mapsto ev_a$ que es inyectivo: si $a \neq 0$ existe $f : \langle a \rangle = \mathbb{Z}a \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ tq $f(a) \neq 0$ (eg. $f(a) = [\frac{1}{2}]$) y como $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ es inyectivo en $\underline{Ab}$ (pues es divisible), $\exists g : G \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ tq $g(a) \neq 0$, ie, $ev_a \neq 0$ ✓

Si $G \cong \mathbb{Z}^{(I)}$ es un grupo abeliano libre, con I un conjunto, entonces $\check{G}$ es isomorfo a un producto de $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ y luego es divisible ✓ En general, $\check{G}$ es cociente de un grupo libre L (eg. $L = \mathbb{Z}^{(\check{G})}$) y luego $L \twoheadrightarrow \check{G} \to 0$ induce $0 \to \check{\check{G}} \hookrightarrow \check{L}$, y luego $G \hookrightarrow \check{L} \leftarrow$ divisible ✓ ∎

$\boxed{\text{Ejercicio importante}}$ Sea A un anillo conmutativo con unidad, y sea M un A-módulo. Definimos $\check{M} := \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$, que es un A-módulo vía: $(a \cdot f)(x) := f(ax)$ para $f \in \check{M}$, $x \in M$ y $a \in A$. Además, tal como antes, $M \hookrightarrow \check{\check{M}}$ es inyectivo.

① Probar que $\check{M} = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_A(M, \check{A})$, $f \mapsto \tilde{f}$ con $\tilde{f}(x)(a) := f(ax)$ es un isomorfismo de A-módulos con inversa $\tilde{g} \mapsto g$, con $g(x) := \tilde{g}(x)(1)$.

② Deducir que $\check{A}$ es un A-módulo *inyectivo* (ie, objeto inyectivo en A-$\underline{Mod}$).

[*Indicación*: Dadas $M \overset{\varphi}{\hookrightarrow} N$ y $\tilde{f} : M \to \check{A}$, considerar $f : M \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ que se extiende a $g : N \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ y que define $\tilde{g} : N \to \check{A}$ que extiende a $\tilde{f}$.]

③ Deducir, tal como se hizo para $\underline{Ab}$, que la categoría A-$\underline{Mod}$ tiene suficientes inyectivos!

[**Teorema**: Sea X un espacio topológico (resp. una variedad algebraica). Entonces, la categoría $\underline{Sh}(X)$ de haces de grupos abelianos en X (resp. la categoría $\mathcal{O}_X$-$\underline{Mod}$ de $\mathcal{O}_X$-módulos) tiene suficientes inyectivos.]

Dem: Sea $\mathcal{F}$ haz de grupos abelianos en X y para cada $x \in X$, consideramos $\mathcal{F}_x \hookrightarrow I(\mathcal{F}_x)$ el grupo abeliano (como antes) inyectivo donde se incrusta el tallo $\mathcal{F}_x$. Sea $I(\mathcal{F}) \in \underline{Sh}(X)$ el haz definido por $\mathcal{I}(\mathcal{F})(\mathcal{U}) := \prod_{x\in\mathcal{U}} \mathcal{I}(\mathcal{F}_x)$ $\forall\, \mathcal{U} \subseteq X$ abierto. Así, tenemos $\mathcal{F} \hookrightarrow \mathcal{I}(\mathcal{F})$ morfismo inyectivo. Más aún, dado que los morfismos de haces están determinados por los tallos, tenemos que para todo $\mathcal{G} \in \underline{Sh}(X)$ la identidad $\mathrm{Hom}(\mathcal{G}, \mathcal{I}(\mathcal{F})) = \prod_{x\in X} \mathrm{Hom}(\mathcal{G}_x, \mathcal{I}(\mathcal{F}_x))$ en $\underline{Ab}$. $\Rightarrow \mathcal{I}(\mathcal{F})$ es un objeto inyectivo de $\underline{Sh}(X)$ ✓ La prueba para $\mathcal{O}_X$-módulos es idéntica ■

Recordemos (ver §28, p. 96) que si X variedad afín con $A = \mathcal{O}(X)$, entonces la categoría abeliana $\underline{Coh}(X)$ puede verse como una subcategoría de A-$\underline{Mod}$ (vía $\mathcal{F} \mapsto H^0(X,\mathcal{F})$), y en A-$\underline{Mod}$ los cálculos son más simples (cf. §28, p. 97). Más generalmente:

[<u>Hecho importante</u> (Teorema de Freyd-Mitchell, 1964): <u>Toda</u> categoría abeliana $\mathcal{C}$ puede ser vista como una subcategoría de R-$\underline{Mod}$ para cierto anillo R (no nec. conmutativo).]

<u>Consecuencia</u>: Los cálculos en $\mathcal{C}$ que involucran kernels, imágenes y cokernels pueden hacerse en R-$\underline{Mod}$ haciendo "cacería de diagramas". Notablemente:

① Un morfismo $\varphi: K^\bullet \to L^\bullet$ de complejos en $\mathcal{C}$, dado por $\{\varphi^i : K^i \to L^i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ tales que $\varphi^{i+1} \circ d_K^i = d_L^i \circ \varphi^i$ $\forall i \in \mathbb{Z}$, induce $H^i(\varphi): H^i(K^\bullet) \to H^i(L^\bullet)$ en cohomología $\forall i\in\mathbb{Z}$.
En efecto, recordando que $H^i(K^\bullet) \underset{\text{def}}{:=} \ker(d_K^i)/\mathrm{Im}(d_K^{i-1})$, para $x \in \ker(d_K^i)$ (!) tenemos que $0 = (\varphi^{i+1} \circ d_K^i)(x) = d_L^i(\varphi^i(x))$, i.e., $\varphi^i(x) \in \ker(d_L^i)$. Además, la relación $\varphi^i \circ d_K^{i-1} = d_L^{i-1} \circ \varphi^{i-1}$ implica que si $x' \in \ker(d_K^i)$ con $x' = x + d_K^{i-1}(y) \Rightarrow \varphi^i(x') = \varphi^i(x) + d_L^{i-1}(\varphi^{i-1}(y))$ y luego $[\varphi(x)] = [\varphi(x')]$ en $H^i(L^\bullet) \underset{\text{def}}{=} \ker(d_L^i)/\mathrm{Im}(d_L^{i-1})$ ✓

② Más aún, el <u>lema de la serpiente</u> (en R-$\underline{Mod}$!) implica (de hecho, equivale a) que si

$$0 \to K^\bullet \xrightarrow{\varphi} L^\bullet \xrightarrow{\psi} M^\bullet \to 0$$

es una sucesión exacta de complejos en $\mathcal{C}$ (i.e, $0 \to K^i \xrightarrow{\varphi^i} L^i \xrightarrow{\psi^i} M^i \to 0$ es exacta en $\mathcal{C}$ para todo $i\in\mathbb{Z}$), entonces hay una sucesión <u>exacta</u> larga en cohomología

$$\cdots \to H^{i-1}(M^\bullet) \xrightarrow{\delta^{i-1}} H^i(K^\bullet) \xrightarrow{H^i(\varphi)} H^i(L^\bullet) \xrightarrow{H^i(\psi)} H^i(M^\bullet) \xrightarrow{\delta^i} H^{i+1}(K^\bullet) \xrightarrow{H^{i+1}(\varphi)} H^{i+1}(L^\bullet) \to \cdots$$

donde $\delta^i : H^i(M^\bullet) \to H^{i+1}(K^\bullet)$ es llamado el (i-ésimo) <u>morfismo de conexión</u>.

[<u>Def</u>: Sea $\varepsilon: K^\bullet \to L^\bullet$ un morfismo de complejos en $\mathcal{C}$. Decimos que ε es un <u>quasi-isomorfismo</u> (qis) si $H^i(\varepsilon): H^i(K^\bullet) \xrightarrow{\sim} H^i(L^\bullet)$ es un isomorfismo $\forall i\in\mathbb{Z}$, y decimos que $(\varepsilon, L^\bullet)$ es una <u>resolución</u> de $K^\bullet$]

Para relacionar lo anterior al concepto de objetos inyectivos, necesitamos el siguiente concepto (que proviene de la topología algebraica):

[<u>Def</u>: Sean $f: K^\bullet \to L^\bullet$ y $g: K^\bullet \to L^\bullet$ dos morfismos de complejos en $\mathcal{C}$. Decimos que f y g son <u>homotópicamente equivalentes</u> (y escribimos $f \sim g$) si existe $h = \{h^i : K^i \to L^{i-1}\}_{i\in\mathbb{Z}}$ familia de morfismos tales que $f^i - g^i = d_L^{i-1} \circ h^i + h^{i+1} \circ d_K^i$ $\forall i \in \mathbb{Z}$. Gráficamente, h está dada por

$$\begin{tikzcd} & K^i \arrow[r, "d_K^i"] \arrow[dl, "h^i"'] & K^{i+1} \arrow[dl, "h^{i+1}"] \\ L^{i-1} \arrow[r, "d_L^{i-1}"'] & L^i & \end{tikzcd}$$

La familia $h = \{h^i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ es llamada una <u>homotopía</u> entre f y g.]

[<u>Lema</u>: Sean $f, g: K^\bullet \to L^\bullet$ morfismos de complejos en $\mathcal{C}$. Si $f \sim g$, entonces f y g inducen el mismo morfismo en cohomología, i.e, $H^i(f) = H^i(g)$ $\forall i\in\mathbb{Z}$.

<u>Dem</u>: Sea $x \in \ker(d_K^i)$, entonces $f^i(x) - g^i(x) = d_L^{i-1}(h^i(x)) + h^{i+1}(\cancel{d_K^i(x)}) = d_L^{i-1}(h^i(x))$ y luego $[f^i(x)] = [g^i(x)]$ en $H^i(L^\bullet) \underset{\text{def}}{=} \ker(d_L^i)/\mathrm{Im}(d_L^{i-1})$ ✓ ■

$\boxed{\text{Ejercicio}}$ Probar que si $f: K^\bullet \to L^\bullet$ y $g: L^\bullet \to K^\bullet$ son morfismos de complejos en $\mathcal{C}$ tales que $f\circ g \sim \mathrm{Id}_{L^\bullet}$ y $g \circ f \sim \mathrm{Id}_{K^\bullet}$, entonces f y g son quasi-isomorfismos y $H^i(f)^{-1} = H^i(g)$ $\forall i\in\mathbb{Z}$.

<u>Terminología</u>: Notar que si $f: K^\bullet \to L^\bullet$ cumple $f \sim 0$, entonces $H^i(f) = 0$ $\forall i\in\mathbb{Z}$. Para el recíproco necesitamos hipótesis adicionales: Decimos que un complejo $K^\bullet$ en $\mathcal{C}$ es:
① <u>Exacto</u> si $H^i(K^\bullet) = 0$ $\forall i \in\mathbb{Z}$, i.e, $\mathrm{Im}(d^{i-1}) = \ker(d^i)$ $\forall i\in\mathbb{Z}$.
② <u>Positivo</u> si $K^i = 0$ para todo $i < 0$.

Prop: Sea $f: K^\bullet \to L^\bullet$ un morfismo de complejos positivos en $\mathcal{C}$, y supongamos que:
① Todo objeto L^i es inyectivo en $\mathcal{C}$, y que
② El complejo $K^\bullet$ es exacto (y en particular $H^i(f)=0\ \forall i\in\mathbb{Z}$).
Entonces, $f\sim 0$.

Dem: Construimos h^i por inducción en $i\in\mathbb{N}$ (OK si $i<0$): Sup. que $h^i: K^i\to L^{i-1}$ está construido y verifica la fórmula de homotopía $f^j - 0 = f^j = d_L^{j-1}\circ h^j + h^{j+1}\circ d_K^j\ \forall j\le i-1$ (✱). Definimos $g^i := f^i - d_L^{i-1}\circ h^i$ (que a posteriori verificará $g^i = h^{i+1}\circ d_K^i$ por (✱)). Los diagramas conmutativos

$$\begin{tikzcd} K^{i-1} \arrow[r, "d_K^{i-1}"] & K^i \arrow[r, "d_K^i"] \arrow[dl, "h^i"'] \arrow[d, "g^i"] & K^{i+1} \arrow[dl, dashed, "\exists ? h^{i+1}"] \\ L^{i-1} \arrow[r, "d_L^{i-1}"] & L^i & \end{tikzcd} \quad \text{y}\ (✱)\ j=i-1 \quad \begin{tikzcd} K^{i-1} \arrow[r, "d_K^{i-1}"] \arrow[d, "f^{i-1}"'] & K^i \arrow[d, "f^i"] \\ L^{i-1} \arrow[r, "d_L^{i-1}"] & L^i \end{tikzcd}$$

implican que $g^i\circ d_K^{i-1} = f^i\circ d_K^{i-1} - d_L^{i-1}\circ(h^i\circ d_K^{i-1}) \overset{(✱)}{=} \underbrace{f^i\circ d_K^{i-1} - d_L^{i-1}\circ f^{i-1}}_{=0} + \underbrace{d_L^{i-1}\circ d_L^{i-2}}_{=0}\circ h^{i-1} = 0$, i.e., $g^i = 0$ en $\operatorname{Im}(d_K^{i-1}) = \ker(d_K^i)$ ✓

La prop. universal del cociente implica que g^i se factoriza en $g^i: K^i/\ker(d_K^i)\cong \operatorname{Im}(d_K^i)\to L^i$. Dado que L^i inyectivo y $\operatorname{Im}(d_K^i) = \ker(d_K^{i+1}) \hookrightarrow K^{i+1}$, existe $h^{i+1}: K^{i+1}\to L^i$ que cumple (✱). ■

Definición/construcción importante: Sea A un objeto de $\mathcal{C}$, definimos el complejo $\underline{A}^\bullet$ (o también A) por $\underline{A}^i = 0$ si $i\neq 0$ y $\underline{A}^0 := A$, i.e., $\underline{A}^\bullet: \cdots 0 \xrightarrow{0} 0 \xrightarrow{0} A \xrightarrow{0} 0 \xrightarrow{0} 0\to\cdots$.

Una resolución de A es una resolución de $\underline{A}^\bullet$ por un complejo positivo, i.e., un morfismo $\varepsilon: \underline{A}^\bullet \to R^\bullet$ de complejos positivos que es un quasi-isomorfismo. Concretamente, un diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} \underline{A}^\bullet \arrow[d, "\varepsilon"'] & : & A \arrow[r] \arrow[d, "\varepsilon^0"'] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\ R^\bullet & : & R^0 \arrow[r, "d^0"] & R^1 \arrow[r, "d^1"] & R^2 \arrow[r, "d^2"] & R^3 \arrow[r, "d^3"] & \cdots \end{tikzcd}$$

con $H^i(\varepsilon): H^i(\underline{A}^\bullet) \xrightarrow{\sim} H^i(R^\bullet)$ isomorfismo para todo $i\geq 0$.

Así, dado que $H^0(\underline{A}^\bullet)=A$ y $H^i(\underline{A}^\bullet)=0$ para $i>0$, se tiene que $H^i(R^\bullet)=0\ \forall i>0$ y que el morfismo de aumentación $\varepsilon^0: A\to R^0$ identifica A con el kernel de $d^0: R^0\to R^1$. En particular, $0\to A\xrightarrow{\varepsilon^0} R^0 \xrightarrow{d^0} R^1 \xrightarrow{d^1} R^2 \xrightarrow{d^2} R^3 \xrightarrow{d^3}\cdots$ es un complejo exacto (❢), que contiene la misma información que $\varepsilon: \underline{A}^\bullet\to R^\bullet$. Finalmente, si todos los objetos de $R^\bullet$ son inyectivos, decimos que $\varepsilon: A\to R^\bullet$ es una resolución inyectiva de A.

Teorema: Sea $\mathcal{C}$ una categoría abeliana con suficientes inyectivos. Entonces:
① Todo objeto A admite una resolución inyectiva $\varepsilon: A\to I^\bullet$.
② Sea $f: A\to I^\bullet$ un morfismo (arbitrario) de complejos positivos, donde todos los objetos de $I^\bullet$ son inyectivos. Entonces, para toda resolución $\varepsilon: A\to R^\bullet$ (no nec. inyectiva), existe un morfismo de complejos $g: R^\bullet\to I^\bullet$ tal que

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\varepsilon"] \arrow[dr, "f"'] & R^\bullet \arrow[d, "g"] \\ & I^\bullet \end{tikzcd}$$

es conmutativo. Además, si $g': R^\bullet\to I^\bullet$ es otro morfismo tal que $f = g'\circ\varepsilon$, entonces $g\sim g'$ (i.e., g es único módulo homotopía).

Dem: ① Como $\mathcal{C}$ tiene suficientes inyectivos, podemos incrustar $A \overset{\varepsilon^0}{\hookrightarrow} I^0$ con I^0 objeto inyectivo. Sea $A_1 := I^0/A$ en $\mathcal{C}$ y lo incrustamos $A_1 \overset{\delta^1}{\hookrightarrow} I^1$ con I^1 objeto inyectivo, y con $\ker(\delta^1)=0$ en I^0/A, i.e., la composición $\varepsilon_1: I^0\xrightarrow{\pi} I^0/A \xrightarrow{\delta^1} I^1$ tiene $\ker(\varepsilon^1) = A = \operatorname{Im}(\varepsilon^0)$. Inductivamente obtenemos $\varepsilon: A\to I^\bullet$ ✓

② Construimos g^i por inducción en $i\in\mathbb{N}$: Como ε resolución, $A\overset{\varepsilon^0}{\hookrightarrow}R^0$ es un morfismo inyectivo. Dado que I^0 es un objeto inyectivo, $f^0: A\to I^0$ se extiende a $g^0: R^0\to I^0$ ✓ Sup. g^i construido, el diagrama

$$\begin{tikzcd} R^{i-1} \arrow[r, "d_R^{i-1}"] & R^i \arrow[r, "d_R^i"] \arrow[d, "g^i"'] & R^{i+1} \arrow[d, dashed, "\exists ?\ g^{i+1}"] \\ & I^i \arrow[r, "d_I^i"] & I^{i+1} \end{tikzcd}$$

implica (como antes) que $d_I^i\circ g^i: R^i\to I^{i+1}$ se anula en $\operatorname{Im}(d_R^{i-1}) = \ker(d_R^i)$ (pues el complejo $0\to A\overset{\varepsilon^0}{\hookrightarrow}R^\bullet$ es exacto), y luego se puede ver como $d_I^i\circ g^i: R^i/\ker(d_R^i)\cong \operatorname{Im}(d_R^i)\to I^{i+1}$. Como I^{i+1} objeto inyectivo, $d_I^i\circ g^i$ se extiende a $g^{i+1}: R^{i+1}\to I^{i+1}$ ✓ Finalmente, dado otro $g': R^\bullet\to I^\bullet$ consideramos el complejo $K^\bullet := R^\bullet/A$ dado por $K^i := R^i$ si $i>0$ y $K^0 := R^0/A$. Entonces, $g-g'$ se factoriza en un morfismo de complejos $G: K^\bullet\to I^\bullet$, con $K^\bullet$ exacto $\underset{\text{Prop anterior}}{\Longrightarrow} G\sim 0$, i.e., $g\sim g'$. ■