

Durante esta sección, denotamos por \mathcal{C} una categoría abeliana. La siguiente noción será fundamental en lo que sigue (cf. Teorema de Extensión de Hahn-Banach):

Def: Decimos que un objeto $I \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ es inyectivo si para toda sucesión exacta en \mathcal{C} de la forma $0 \rightarrow A \xrightarrow{\varphi} B$ (i.e. " φ inyectivo") y todo morfismo $f: A \rightarrow I$, existe un morfismo (no nec. único) $g: B \rightarrow I$ tal que $g \circ \varphi = f$. Equivalentemente, el funtor (contravariante!) $\text{Hom}(\cdot, I): \mathcal{C} \rightarrow \text{Ab}$ es exacto.

$$A \mapsto \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, I) \quad \begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\varphi} & B \\ f \downarrow & & \uparrow \exists g \\ & I & \end{array}$$

Nuestras categorías favoritas serán las siguientes:

Def: Una categoría abeliana \mathcal{C} tiene suficientes inyectivos si todo objeto $A \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ se inyecta en un objeto inyectivo, i.e. existe $I = I(A) \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ inyectivo y $A \hookrightarrow I$ morfismo de kernel nulo.

Terminología (Teoría de Grupos): Un grupo abeliano G es divisible si $\forall m \in \mathbb{N}^{>1}$ el morfismo $G \xrightarrow{m} G, x \mapsto mx$ es sobreyectivo. Por ejemplo, $(\mathbb{Q}, +)$ y $(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}, +)$ son divisibles.

Lema: En la categoría Ab de grupos abelianos, todo grupo divisible G es inyectivo.

Dem: Sea $A \hookrightarrow B$ subgrupo y $f: A \rightarrow G$ morfismo, con A, B grupos abelianos. Por el Lema de Zorn, $\exists B' \subseteq B$ subgrupo maximal tq $A \subseteq B'$ y tq $\exists g: B' \rightarrow G$ con $g \circ \varphi = f$. Veamos que $B' = B$: En caso contrario, $\exists b \in B$ tq $b \notin B'$, y consideramos la inclusión $B' \cap \langle b \rangle \hookrightarrow \langle b \rangle = \mathbb{Z}b$: si $B' \cap \langle b \rangle = 0$ podemos extender g al subgrupo $\langle B', b \rangle = B' \oplus \mathbb{Z}b$ por $\tilde{g}(b + mb) := g(b)$, mientras que si $B' \cap \langle b \rangle \neq 0$ entonces $\exists m \in \mathbb{N}^{>1}$ tq $mb \in B'$ y (como G divisible!) $g(mb) = ny$ para algún $y \in G$, y extendemos g a $\langle B', b \rangle$ por $\tilde{g}(b + mb) := g(b) + ny$ ✓ Contradicción! (B' maximal).

Prop: La categoría Ab de grupos abelianos tiene suficientes inyectivos.

Dem: Veamos que todo grupo abeliano G se inyecta en un grupo divisible: sea $\check{G} := \text{Hom}(G, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$. El emparejamiento natural $\check{G} \times G \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ induce un morfismo $G \hookrightarrow \check{G}, a \mapsto \text{ev}_a$ que es inyectivo: si $a \neq 0$ existe $f: \langle a \rangle = \mathbb{Z}a \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ tq $f(a) \neq 0$ (eg. $f(a) = [\frac{1}{2}]$) y como \mathbb{Q}/\mathbb{Z} es inyectivo en Ab (pues es divisible), $\exists g: G \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ tq $g(a) \neq 0$, i.e. $\text{ev}_a \neq 0$ ✓
 Si $G \cong \mathbb{Z}^I$ es un grupo abeliano libre, con I un conjunto, entonces \check{G} es isomorfo a un producto de \mathbb{Q}/\mathbb{Z} y luego es divisible ✓ En general, \check{G} es cociente de un grupo libre L (eg. $L = \mathbb{Z}(\check{G})$) y luego $L \rightarrow \check{G} \rightarrow 0$ induce $0 \rightarrow \check{G} \hookrightarrow \check{L}$, y luego $G \hookrightarrow L \hookrightarrow \check{L}$ ✓ divisible ✓

Ejercicio importante sea A un anillo conmutativo con unidad, y sea M un A -módulo. Definimos $\check{M} := \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$, que es un A -módulo vía: $(a \cdot f)(x) := f(ax)$ para $f \in \check{M}, x \in M$ y $a \in A$. Además, tal como antes, $M \hookrightarrow \check{M}$ es inyectivo.

- ① Probar que $\check{M} = \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_A(M, \check{A}), f \mapsto \tilde{f}$ con $\tilde{f}(x)(a) := f(ax)$ es un isomorfismo de A -módulos con inversa $\tilde{g} \mapsto g$, con $g(x) := \tilde{g}(x)(1)$.
- ② Deducir que \check{A} es un A -módulo inyectivo (i.e. objeto inyectivo en $A\text{-Mod}$).

Indicación: Dado $M \hookrightarrow N$ y $\tilde{f}: M \rightarrow \check{A}$, considerar $f: M \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ que se extiende a $g: N \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ y que define $\tilde{g}: N \rightarrow \check{A}$ que extiende a \tilde{f} .

③ Deducir, tal como se hizo para Ab, que la categoría $A\text{-Mod}$ tiene suficientes inyectivos!

Teorema: Sea X un espacio topológico (resp. una variedad algebraica). Entonces, la categoría $\text{Sh}(X)$ de haces de grupos abelianos en X (resp. la categoría $\mathcal{O}_X\text{-Mod}$ de \mathcal{O}_X -módulos) tiene suficientes inyectivos.

Dem: Sea \mathcal{F} haz de grupos abelianos en X y para cada $x \in X$, consideramos $\mathcal{F}_x \hookrightarrow I(\mathcal{F}_x)$ el grupo abeliano (como antes) inyectivo donde se inyecta el tallo \mathcal{F}_x . Sea $I(\mathcal{F}) \in \text{Sh}(X)$ el

haz definido por $I(\mathcal{F})(U) := \prod_{x \in U} I(\mathcal{F}_x) \forall U \subseteq X$ abierto. Así, tenemos $\mathcal{F} \hookrightarrow I(\mathcal{F})$ morfismo inyectivo. Más aún, dado que los morfismos de haces están determinados por los tallos, tenemos que para todo $g \in \mathcal{S}h(X)$ la identidad $\text{Hom}(g, I(\mathcal{F})) = \prod_{x \in X} \text{Hom}(g_x, I(\mathcal{F}_x))$ en Ab.
 $\Rightarrow I(\mathcal{F})$ es un objeto inyectivo de $\mathcal{S}h(X)$ ✓ La prueba para \mathcal{O}_X -módulos es idéntica ■

Recordemos (ver §28, p.96) que si X variedad afin con $A = \mathcal{O}(X)$, entonces la categoría abeliana $\mathcal{C}h(X)$ puede verse como una subcategoría de $A\text{-Mod}$ (vía $\mathcal{F} \mapsto H^0(X, \mathcal{F})$), y en $A\text{-Mod}$ los cálculos son más simples (cf. §28, p.97). Más generalmente:

Hecho importante (Teorema de Freyd-Mitchell, 1964): Toda categoría abeliana \mathcal{C} puede ser vista como una subcategoría de $R\text{-Mod}$ para cierto anillo R (no nec. conmutativo).

Consecuencia: Los cálculos en \mathcal{C} que involucran kernels, imágenes y cokernels pueden hacerse en $R\text{-Mod}$ haciendo "cacería de diagramas". Notablemente:

① Un morfismo $\varphi: K^\bullet \rightarrow L^\bullet$ de complejos en \mathcal{C} , dado por $\{\varphi^i: K^i \rightarrow L^i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ tales que $\varphi^{i+1} \circ d_K^i = d_L^i \circ \varphi^i \forall i \in \mathbb{Z}$, induce $H^i(\varphi): H^i(K^\bullet) \rightarrow H^i(L^\bullet)$ en cohomología $\forall i \in \mathbb{Z}$.

En efecto, recordando que $H^i(K^\bullet) \stackrel{\text{def}}{=} \ker(d_K^i) / \text{Im}(d_K^{i-1})$, para $x \in \ker(d_K^i)$ (8) tenemos que $0 = (\varphi^{i+1} \circ d_K^i)(x) = d_L^i(\varphi^i(x))$, i.e., $\varphi^i(x) \in \ker(d_L^i)$. Además, la relación $\varphi^i \circ d_K^{i-1} = d_L^{i-1} \circ \varphi^{i-1}$ implica que si $x' \in \ker(d_K^i)$ con $x' = x + d_K^{i-1}(y) \Rightarrow \varphi^i(x') = \varphi^i(x) + d_L^{i-1}(\varphi^{i-1}(y))$ y luego $[\varphi(x')] = [\varphi(x)]$ en $H^i(L^\bullet) \stackrel{\text{def}}{=} \ker(d_L^i) / \text{Im}(d_L^{i-1})$ ✓

② Más aún, el lema de la serpiente (en $R\text{-Mod}$!) implica (de hecho, equivale a) que si

$$0 \rightarrow K^\bullet \xrightarrow{\varphi} L^\bullet \xrightarrow{\psi} M^\bullet \rightarrow 0$$

es una sucesión exacta de complejos en \mathcal{C} (i.e., $0 \rightarrow K^i \xrightarrow{\varphi^i} L^i \xrightarrow{\psi^i} M^i \rightarrow 0$ es exacta en \mathcal{C} para todo $i \in \mathbb{Z}$), entonces hay una sucesión exacta larga en cohomología

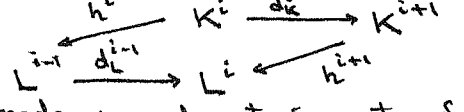
$$\dots \rightarrow H^{i-1}(M^\bullet) \xrightarrow{\delta^{i-1}} H^i(K^\bullet) \xrightarrow{H^i(\varphi)} H^i(L^\bullet) \xrightarrow{H^i(\psi)} H^i(M^\bullet) \xrightarrow{\delta^i} H^{i+1}(K^\bullet) \xrightarrow{H^{i+1}(\varphi)} H^{i+1}(L^\bullet) \rightarrow \dots$$

donde $\delta^i: H^i(M^\bullet) \rightarrow H^{i+1}(K^\bullet)$ es llamado el (i-ésimo) morfismo de conexión.

Def: Sea $\mathcal{E}: K^\bullet \rightarrow L^\bullet$ un morfismo de complejos en \mathcal{C} . Decimos que \mathcal{E} es un quasi-isomorfismo (qis) si $H^i(\mathcal{E}): H^i(K^\bullet) \xrightarrow{\sim} H^i(L^\bullet)$ es un isomorfismo $\forall i \in \mathbb{Z}$, y decimos que (\mathcal{E}, L^\bullet) es una resolución de K^\bullet

Para relacionar lo anterior al concepto de objetos inyectivos, necesitamos el siguiente concepto (que proviene de la topología algebraica):

Def: Sean $f: K^\bullet \rightarrow L^\bullet$ y $g: K^\bullet \rightarrow L^\bullet$ dos morfismos de complejos en \mathcal{C} . Decimos que f y g son homotópicamente equivalentes (y escribimos $f \sim g$) si existe $h = \{h^i: K^i \rightarrow L^{i-1}\}_{i \in \mathbb{Z}}$ familia de morfismos tales que $f^i - g^i = d_L^{i-1} \circ h^i + h^{i+1} \circ d_K^i \forall i \in \mathbb{Z}$. Gráficamente, h está dada por



La familia $h = \{h^i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ es llamada una homotopía entre f y g .

Lema: Sean $f, g: K^\bullet \rightarrow L^\bullet$ morfismos de complejos en \mathcal{C} . Si $f \sim g$, entonces f y g inducen el mismo morfismo en cohomología, i.e., $H^i(f) = H^i(g) \forall i \in \mathbb{Z}$.

Dem: Sea $x \in \ker(d_K^i)$, entonces $f^i(x) - g^i(x) = d_L^{i-1}(h^i(x)) + h^{i+1}(d_K^i(x)) = d_L^{i-1}(h^i(x))$ y luego $[f^i(x)] = [g^i(x)]$ en $H^i(L^\bullet) \stackrel{\text{def}}{=} \ker(d_L^i) / \text{Im}(d_L^{i-1})$ ✓ ■

Ejercicio Probar que si $f: K^\bullet \rightarrow L^\bullet$ y $g: L^\bullet \rightarrow K^\bullet$ son morfismos de complejos en \mathcal{C} tales que $f \circ g \sim \text{Id}_L$ y $g \circ f \sim \text{Id}_K$, entonces f y g son quasi-isomorfismos y $H^i(f)^{-1} = H^i(g) \forall i \in \mathbb{Z}$.

Terminología: Notar que si $f: K^\bullet \rightarrow L^\bullet$ cumple $f \sim 0$, entonces $H^i(f) = 0 \forall i \in \mathbb{Z}$. Para el recíproco necesitamos hipótesis adicionales: Decimos que un complejo K^\bullet en \mathcal{C} es:

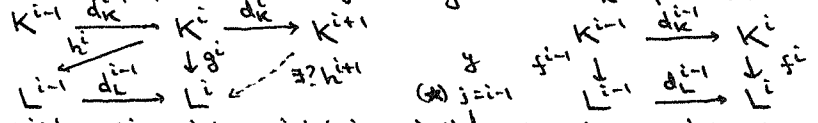
- ① Exacto si $H^i(K^\bullet) = 0 \forall i \in \mathbb{Z}$, i.e., $\text{Im}(d^{i-1}) = \ker(d^i) \forall i \in \mathbb{Z}$.
- ② Positivo si $K^i = 0$ para todo $i < 0$.

Prop: sea $f: K^\bullet \rightarrow L^\bullet$ un morfismo de complejos positivos en \mathcal{C} , y supongamos que:

- ① Todo objeto L^i es inyectivo en \mathcal{C} , y que
- ② El complejo K^\bullet es exacto (y en particular $H^i(f) = 0 \forall i \in \mathbb{Z}$).

Entonces, $f \sim 0$.

Dem: Construimos h^i por inducción en $i \in \mathbb{N}$ (OK $\approx i < 0$): sup. que $h^i: K^i \rightarrow L^{i-1}$ está construido y verifica la fórmula de homotopía $f^i - 0 = f^i = d_L^{i-1} \circ h^i + h^{i+1} \circ d_K^i \forall i \geq -1$ (*). Definimos $g^i := f^i - d_L^{i-1} \circ h^i$ (que a posteriori verificaría $g^i = h^{i+1} \circ d_K^i$ por (*)). Los diagramas conmutativos

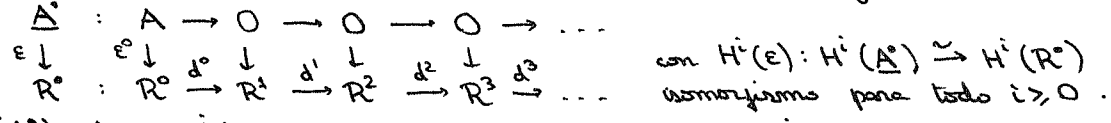


implican que $g^i \circ d_K^{i-1} = f^i \circ d_K^{i-1} - d_L^{i-1} \circ (h^i \circ d_K^{i-1}) = \underbrace{f^i \circ d_K^{i-1}}_{=0} - \underbrace{d_L^{i-1} \circ f^{i-1}}_{=0} + \underbrace{d_L^{i-1} \circ d_L^{i-2} \circ h^{i-1}}_{=0} = 0$, i.e., $g^i = 0$ en $\text{Im}(d_K^{i-1}) = \text{ker}(d_K^i)$ ✓

La prop. universal del cociente implica que g^i se factoriza en $g^i: K^i / \text{ker}(d_K^i) \cong \text{Im}(d_K^i) \rightarrow L^i$. Dado que L^i inyectivo y $\text{Im}(d_K^i) = \text{ker}(d_K^{i+1}) \hookrightarrow K^{i+1}$, existe $h^{i+1}: K^{i+1} \rightarrow L^i$ que cumple (*).

Definición/Construcción importante: sea A un objeto de \mathcal{C} , definimos el complejo A^\bullet (o también A) por $A^i = 0 \approx i \neq 0$ y $A^0 := A$, i.e., $A^\bullet: \dots \rightarrow 0 \rightarrow 0 \rightarrow A \rightarrow 0 \rightarrow 0 \rightarrow \dots$

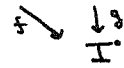
una resolución de A es una resolución de A^\bullet por un complejo positivo, i.e., un morfismo $\varepsilon: A^\bullet \rightarrow R^\bullet$ de complejos positivos que es un quasi-isomorfismo. Concretamente, un diagrama conmutativo



Así, dado que $H^0(A^\bullet) = A$ y $H^i(A^\bullet) = 0$ para $i > 0$, se tiene que $H^i(R^\bullet) = 0 \forall i > 0$ y que el morfismo de aumentación $\varepsilon^0: A \rightarrow R^0$ identifica A con el kernel de $d^0: R^0 \rightarrow R^1$. En particular, $0 \rightarrow A \xrightarrow{\varepsilon^0} R^0 \xrightarrow{d^0} R^1 \xrightarrow{d^1} R^2 \xrightarrow{d^2} R^3 \xrightarrow{d^3} \dots$ es un complejo exacto (♯), que contiene la misma información que $\varepsilon: A^\bullet \rightarrow R^\bullet$. Finalmente, si todos los objetos de R^\bullet son inyectivos, decimos que $\varepsilon: A \rightarrow R^0$ es una resolución inyectiva de A .

Teorema: sea \mathcal{C} una categoría abeliana con suficientes inyectivos. Entonces:

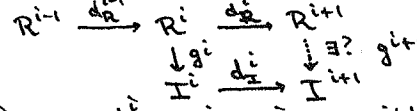
- ① Todo objeto A admite una resolución inyectiva $\varepsilon: A \rightarrow I^\bullet$.
- ② sea $f: A \rightarrow I^\bullet$ un morfismo (arbitrario) de complejos positivos, donde todos los objetos de I^\bullet son inyectivos. Entonces, para cada resolución $\varepsilon: A \rightarrow R^\bullet$ (no nec. inyectiva), existe un morfismo de complejos $g: R^\bullet \rightarrow I^\bullet$ tal que $A \xrightarrow{\varepsilon} R^\bullet$ es conmutativo. Además, si $g': R^\bullet \rightarrow I^\bullet$ es otro



morfismo tal que $f = g' \circ \varepsilon$, entonces $g \sim g'$ (i.e., g es único módulo homotopía).

Dem: ① Como \mathcal{C} tiene suficientes inyectivos, podemos incrustar $A \xrightarrow{\varepsilon^0} I^0$ con I^0 objeto inyectivo. sea $A_1 := I^0/A$ en \mathcal{C} y lo incrustamos $A_1 \xrightarrow{s^1} I^1$ con I^1 objeto inyectivo, y con $\text{ker}(s^1) = 0$ en I^0/A , i.e., la composición $\varepsilon_1: I^0 \xrightarrow{\pi} I^0/A \xrightarrow{s^1} I^1$ tiene $\text{ker}(\varepsilon_1) = A = \text{Im}(\varepsilon^0)$. Inductivamente obtenemos $\varepsilon: A \rightarrow I^\bullet$ ✓

② Construimos g^i por inducción en $i \in \mathbb{N}$: Como ε resolución, $A \xrightarrow{\varepsilon^0} R^0$ es un morfismo inyectivo. Dado que I^0 es un objeto inyectivo, $f^0: A \rightarrow I^0$ se extiende a $g^0: R^0 \rightarrow I^0$ ✓ sup. g^i construido, el diagrama



implica (como antes) que $d_I^i \circ g^i: R^i \rightarrow I^{i+1}$ se anula en $\text{Im}(d_R^{i-1}) = \text{ker}(d_R^i)$ (pues el complejo $0 \rightarrow A \xrightarrow{\varepsilon^0} R^0$ es exacto), y luego se puede ver como $d_I^i \circ g^i: R^i / \text{ker}(d_R^i) \cong \text{Im}(d_R^i) \rightarrow I^{i+1}$. Como I^{i+1} objeto inyectivo, $d_I^i \circ g^i$ se extiende a $g^{i+1}: R^{i+1} \rightarrow I^{i+1}$ ✓ Finalmente, dados otros $g': R^\bullet \rightarrow I^\bullet$ consideraremos el complejo $K^\bullet := R^\bullet/A$ dados por $K^i := R^i \approx i > 0$ y $K^0 := R^0/A$.

Entonces, $g - g'$ se factoriza en un morfismo de complejos $G: K^\bullet \rightarrow I^\bullet$, con K^\bullet exacto \Rightarrow Prop anterior $G \sim 0$, i.e., $g \sim g'$. ■