# §30. Categorías abelianas y functores exactos 

Para definir los grupos de cohomología usando functores derivados necesitamos las sgtes nociones:

**Def**: Sea $\mathcal{C}$ una categoría. Decimos que $\mathcal{C}$ es una <u>categoría aditiva</u> si para todos $A, B \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ se tiene que $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,B)$ es un grupo abeliano y se verifica:

① La composición $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,B) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(B,C) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,C)$, $(f,g) \mapsto g \circ f$ es bilineal.

② Existe $0 \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ objeto tal que $\mathrm{Hom}(0,0) = \{0\}$ es el grupo trivial con 1 elemento.

③ Para todos $A_1, A_2 \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ existe (un único) $B \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ junto con morfismos $j_i : A_i \to B$ (resp. $p_i : B \to A_i$) con $i = 1,2$ que hacen de $B$ la <u>suma directa</u> (resp. <u>producto</u>) de $A_1$ y $A_2$.

Más aún, un functor $\mathcal{F} : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ entre categorías aditivas es un <u>functor aditivo</u> (covariante) si las aplicaciones inducidas $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,B) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(\mathcal{F}(A), \mathcal{F}(B))$ son morfismos de grupos.

Para poder hablar de sucesiones exactas, se requiere la noción de kernel e imagen:

**Def**: Sea $\mathcal{C}$ una categoría aditiva. Decimos que $\mathcal{C}$ es una <u>categoría abeliana</u> si además cumple:

④ Todo morfismo $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,B)$ posee un kernel y un cokernel en $\mathcal{C}$, y la aplicación natural $\mathrm{Coim}(f) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Im}(f)$ es un isomorfismo.

**Obs**: Aquí, $\mathrm{Im}(f)$ es el kernel de la aplicación $B \to \mathrm{coker}(f)$ y la Coimagen $\mathrm{Coim}(f)$ es el cokernel de la aplicación $\ker(f) \to A$. Así, ④ dice que para todo $f : A \to B$ se tiene

$$\begin{tikzcd}
\ker(f) \arrow[r, "i"] & A \arrow[rr, "f"] \arrow[dr] & & B \arrow[r, "\pi"] & \mathrm{coker}(f) \\
& & \mathrm{coker}(i) \arrow[r, "\sim"] & \ker(\pi) \arrow[u] &
\end{tikzcd}$$

(ie, "$A/\ker(f) \cong \mathrm{Im}(f)$").

**Importante**: En una categoría abeliana $\mathcal{C}$, tiene sentido hablar de <u>sucesión exacta</u>. Concretamente, decimos que $A_1 \xrightarrow{f_1} A_2 \xrightarrow{f_2} A_3$ es <u>exacta</u> en $\mathcal{C}$ si $\ker(f_2) = \mathrm{Im}(f_1)$.

**Ejemplos**: ① Sea $A$ un anillo conmutativo. La categoría <u>A-Mod</u> de $A$-módulos es abeliana, y la subcategoría de $A$-módulos finitamente generados es abeliana también.

② Sea $X$ un espacio topológico. La categoría $\underline{\mathrm{Sh}}(X)$ de haces de grupos abelianos en $X$ es abeliana.

③ Sea $(X, \mathcal{O}_X)$ un espacio anillado. La categoría $\mathcal{O}_X$-<u>Mod</u> de $\mathcal{O}_X$-módulos es abeliana.

④ Sea $X$ una variedad algebraica. Las categorías $\underline{\mathrm{Coh}}(X)$ y $\underline{\mathrm{Qcoh}}(X)$ de haces coherentes y quasi-coherentes en $X$, resp., son categorías abelianas! Si $\dim(X) \geq 1$, la categoría $\underline{\mathrm{Vect}}(X)$ de fibrados vectoriales en $X$ <u>no</u> es abeliana!

**Obs**: Sea $\mathcal{F} : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ un functor aditivo entre categorías abelianas, y sea $A_1 \xrightarrow{f_1} A_2 \xrightarrow{f_2} A_3$ una sucesión en $\mathcal{C}$ tal que $f_2 \circ f_1 = 0$ (ie, $\mathrm{Im}(f_1) \subseteq \ker(f_2)$). Aplicando $\mathcal{F}$, obtenemos una sucesión $\mathcal{F}(A_1) \xrightarrow{\mathcal{F}(f_1)} \mathcal{F}(A_2) \xrightarrow{\mathcal{F}(f_2)} \mathcal{F}(A_3)$ en $\mathcal{D}$ que también cumple $\mathcal{F}(f_2) \circ \mathcal{F}(f_1) = \mathcal{F}(f_2 \circ f_1) = 0$.

**Def**: Sea $\mathcal{F} : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ un functor aditivo entre categorías abelianas. Decimos que $\mathcal{F}$ es <u>exacto por la izquierda</u> (resp. <u>derecha</u>) si toda sucesión exacta corta en $\mathcal{C}$

$$0 \to A_1 \xrightarrow{f_1} A_2 \xrightarrow{f_2} A_3 \to 0 \qquad (S)$$

es enviada por $\mathcal{F}$ a una sucesión en $\mathcal{D}$

$$0 \to \mathcal{F}(A_1) \xrightarrow{\mathcal{F}(f_1)} \mathcal{F}(A_2) \xrightarrow{\mathcal{F}(f_2)} \mathcal{F}(A_3) \to 0 \qquad \mathcal{F}(S)$$

que es exacta salvo quizás en $\mathcal{F}(A_3)$ (resp. en $\mathcal{F}(A_1)$), ie, quizás $\mathcal{F}(f_2)$ (resp. $\mathcal{F}(f_1)$) <u>no</u> es sobreyectivo (resp. <u>no</u> es inyectivo). Decimos que $\mathcal{F}$ es un <u>functor exacto</u> si es exacto por la izquierda y por la derecha (ie, $(S)$ exacta implica $\mathcal{F}(S)$ exacta).

**Ejemplos**: ① Sea $X$ variedad alg. afín con $A = \mathcal{O}(X)$. El functor $\Gamma : \underline{\mathrm{Coh}}(X) \to A$-<u>Mod</u>, $\mathcal{F} \mapsto \Gamma(X, \mathcal{F})$ es exacto (ver §28, pág 97).

② Sea $A$ anillo conmutativo y $f \in A$. El functor de localización $(\cdot)_f : A$-<u>Mod</u> $\to A_f$-<u>Mod</u>, $M \mapsto M_f$ es exacto.

③ Sea $\mathcal{C}$ una categoría abeliana y $A_0 \in Ob(\mathcal{C})$ objeto fijo. Entonces, $Hom(A_0, \cdot) : \mathcal{C} \to \underline{Ab}$ dado por $B \mapsto Hom_{\mathcal{C}}(A_0, B)$ es exacto <u>por la izquierda</u>. Algunos casos típicos son (notación):

a) $\mathcal{C} = A\text{-}\underline{Mod} \rightsquigarrow Hom_A(M,N)$ es un $A$-módulo.

b) $\mathcal{C} = \mathcal{O}_X\text{-}\underline{Mod} \rightsquigarrow Hom_X(\mathcal{F},\mathcal{G})$ es un $A$-módulo, donde $A = \mathcal{O}_X(X)$.

c) $\mathcal{C} = \mathcal{O}_X\text{-}\underline{Mod}$ y consideramos $\mathcal{H}om(\mathcal{F}, \cdot) : \mathcal{O}_X\text{-}\underline{Mod} \to \mathcal{O}_X\text{-}\underline{Mod}$, $\mathcal{G} \mapsto \mathcal{H}om(\mathcal{F},\mathcal{G})$ donde el $\mathcal{O}_X$-módulo $\mathcal{H}om(\mathcal{F},\mathcal{G})$ es el haz asociado al prehaz $\mathcal{U} \mapsto Hom_{\mathcal{U}}(\mathcal{F}|_{\mathcal{U}}, \mathcal{G}|_{\mathcal{U}})$ (ver §4, pág 16).

④ Sea $X$ espacio topológico. Entonces, $\Gamma : \underline{Sh}(X) \to \underline{Ab}$, $\mathcal{F} \mapsto \Gamma(X,\mathcal{F})$ es exacto <u>por la izquierda</u>.

⑤ $\boxed{\text{Ejercicio importante}}$ Sea $f : X \to Y$ morfismo regular entre variedades algebraicas. Probar que el functor $f_* : \underline{Qcoh}(X) \to \underline{Qcoh}(Y)$, $\mathcal{F} \mapsto f_*\mathcal{F}$ es exacto <u>por la izquierda</u>.

<u>Cultura general</u>: Dado $f : X \to Y$ como en ⑤, entonces $f^* : \underline{Qcoh}(Y) \to \underline{Qcoh}(X)$, $\mathcal{G} \mapsto f^*\mathcal{G}$ (ver §4, p.17) es exacto <u>por la derecha</u>. Cuando $f^*$ también es exacto por la izquierda (y luego $f^*$ exacto) se dice que $f$ es un <u>morfismo plano</u> (flat): es una noción muy importante en Teoría de Deformación!

<u>Def</u>: Sea $\mathcal{C}$ una categoría abeliana. Un <u>complejo</u> (<u>de cocadenas</u>) en $\mathcal{C}$ es $K^\bullet = (K^n, d^n)_{n\in\mathbb{Z}}$ tal que:

① $K^n \in Ob(\mathcal{C})$ para cada $n \in \mathbb{Z}$.

② $d^n : K^n \to K^{n+1}$ es un morfismo para cada $n\in\mathbb{Z}$ (i.e, $d^n \in Hom_{\mathcal{C}}(K^n, K^{n+1})$), llamado <u>diferencial</u> (o <u>coborde</u>) y verifica $d^{n+1}\circ d^n = 0 \ \forall n \in \mathbb{Z}$.

<u>Gráficamente</u>: $K^\bullet : \cdots \to K^{-1} \xrightarrow{d^{-1}} K^0 \xrightarrow{d^0} K^1 \xrightarrow{d^1} K^2 \xrightarrow{d^2} K^3 \xrightarrow{d^3} \cdots$

Para cada $i\in\mathbb{Z}$, el objeto

$$H^i(K^\bullet) := \ker(d^i)/Im(d^{i-1}) \underset{def}{=} coker\left(Im(d^{i-1}) \to \ker(d^i)\right) \in Ob(\mathcal{C})$$

es llamado la <u>i-ésima cohomología</u> del complejo $K^\bullet$.

<u>Notación</u>: Dados $\mathcal{F} : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ functor aditivo entre categorías abelianas y dado $K^\bullet = (K^n, d^n)_{n\in\mathbb{Z}}$ complejo en $\mathcal{C}$, denotamos por $\mathcal{F}(K^\bullet)$ al complejo en $\mathcal{D}$ dado por los $\mathcal{F}(K^n) \in Ob(\mathcal{D})$ y con diferenciales $\mathcal{F}(d^n) : \mathcal{F}(K^n) \to \mathcal{F}(K^{n+1})$. Por abuso de notación, escribimos $d^n = \mathcal{F}(d^n)$.

<u>Lema</u>: Sea $\mathcal{F} : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ un functor <u>exacto</u> entre categorías abelianas. Entonces, para todo complejo $K^\bullet$ en $\mathcal{C}$ hay un isomorfismo $H^i(\mathcal{F}(K^\bullet)) \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}(H^i(K^\bullet))$ para todo $i \in\mathbb{Z}$.

<u>Dem</u>: Dado $K^\bullet = (K^n, d^n)_{n\in\mathbb{Z}}$ complejo en $\mathcal{C}$, definimos $Z^i := \ker(d^i)$ y $B^i := Im(d^{i-1})$ para $i\in\mathbb{Z}$, y así $H^i(K^\bullet) \overset{def}{=} Z^i/B^i$. Por functorialidad, $\mathcal{F}(Z^i) = \ker(\mathcal{F}(d^i))$ y $\mathcal{F}(B^i) = Im(\mathcal{F}(d^{i-1}))$. Así, aplicando $\mathcal{F}$ a la sucesión exacta corta en $\mathcal{C}$ : $0 \to B^i \to Z^i \to H^i(K^\bullet) \to 0$ obtenemos la sucesión exacta (pues $\mathcal{F}$ exacto!) $0 \to \mathcal{F}(B^i) \to \mathcal{F}(Z^i) \to \mathcal{F}(H^i(K^\bullet)) \to 0$ en $\mathcal{D}$.

$\Rightarrow \mathcal{F}(H^i(K^\bullet)) \cong \mathcal{F}(Z^i)/\mathcal{F}(B^i) = \ker(\mathcal{F}(d^i))/Im(\mathcal{F}(d^{i-1})) \overset{def}{=} H^i(\mathcal{F}(K^\bullet))$ ✓ ■

<u>Def</u>: Sean $K^\bullet = (K^n, d^n_K)_{n\in\mathbb{Z}}$ y $L^\bullet = (L^n, d^n_L)_{n\in\mathbb{Z}}$ complejos en una categoría abeliana $\mathcal{C}$. Un <u>morfismo de complejos</u> $\varphi : K^\bullet \to L^\bullet$ es una familia de morfismos $\{\varphi^n : K^n \to L^n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ que son compatibles con los diferenciales: $\varphi^{n+1}\circ d^n_K = d^n_L \circ \varphi^n$ para todo $n \in \mathbb{Z}$. Equivalentemente, el diagrama

$$\begin{array}{ccccccccc}
K^\bullet & : \cdots \to & K^{n-1} & \xrightarrow{d_K^{n-1}} & K^n & \xrightarrow{d_K^n} & K^{n+1} & \xrightarrow{d_K^{n+1}} & \cdots \\
\downarrow\varphi & & \downarrow\varphi^{n-1} & & \downarrow\varphi^n & & \downarrow\varphi^{n+1} & & \\
L^\bullet & : \cdots \to & L^{n-1} & \xrightarrow{d_L^{n-1}} & L^n & \xrightarrow{d_L^n} & L^{n+1} & \xrightarrow{d_L^{n+1}} & \cdots
\end{array}$$

es conmutativo. Denotamos por $Kom(\mathcal{C})$ la categoría cuyos objetos son complejos $K^\bullet$ en $\mathcal{C}$ y sus morfismos son morfismos de complejos, es llamada <u>la categoría de complejos de $\mathcal{C}$</u>.

$\boxed{\text{Ejercicio}}$ Probar que $Kom(\mathcal{C})$ es una categoría abeliana.

<u>Indicación</u>: $0 \in Kom(\mathcal{C})$ es $0^\bullet : \cdots \to 0 \to 0 \to 0 \to \cdots$, el kernel de $\varphi : K^\bullet \to L^\bullet$ es el complejo formado por los kernels $\ker(\varphi^i)$ para $i \in \mathbb{Z}$, etc.