§29. Cohomología de haces coherentes en una variedad proyectiva

Comenzamos por calcular la cohomología de fibrados en rectas en $\mathbb{P}^n$, y recordemos que $\omega_{\mathbb{P}^n} \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-n-1)$.

Teorema: Sea $i \in \{0,\dots,n\}$ y $d \in \mathbb{Z}$. Entonces,

① $h^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d)) = \binom{n+d}{n}$ (resp. $=0$) si $d \geq 0$ (resp. $d<0$).

② $h^n(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d)) = \binom{-d-1}{n}$ (resp. $=0$) si $d \leq -n-1$ (resp. $d \geq -n$).

③ $h^i(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d)) = 0$ para todo $d \in \mathbb{Z}$ si $0<i<n$.

En particular, $h^n(\mathbb{P}^n, \omega_{\mathbb{P}^n}) = 1$.

Dem: Sea $\mathcal{F} := \bigoplus_{d\in\mathbb{Z}} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d)$. Entonces, $\check{H}^i(\mathbb{P}^n, \mathcal{F}) = \bigoplus_{d\in\mathbb{Z}} \check{H}^i(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d))$. En part, para $i=0$ tenemos (ver §21, p.72) que $\check{H}^0(\mathbb{P}^n,\mathcal{F}) \simeq k[x_0,\dots,x_n] =: S$ anillo graduado, y ① se cumple ✓

Por el Teorema de Leray, basta considerar los abiertos afines estándar $\mathcal{U}_0 = \{x_0 \neq 0\}, \dots, \mathcal{U}_n = \{x_n \neq 0\}$ de $\mathbb{P}^n$ para calcular $H^i(\mathbb{P}^n, \mathcal{F})$ usando cohomología de Čech. Para $I \subseteq \{0,..,n\}$ escribimos $\mathcal{U}_I := \bigcap_{i\in I} \mathcal{U}_i$
$\Rightarrow H^0(\mathcal{U}_I, \mathcal{F}|_{\mathcal{U}_I}) \simeq \mathrm{Vect}_k \langle x_0^{l_0}\cdots x_n^{l_n}$ con $l_j \in \mathbb{Z}$ y $l_j \geq 0$ si $j \notin I \rangle$. Luego, el complejo de Čech es:

$$C^\bullet(\mathcal{U},\mathcal{F}): \prod S_{x_{i_0}} \xrightarrow{d^0} \prod S_{x_{i_0}x_{i_1}} \xrightarrow{d^1} \cdots \xrightarrow{d^{n-1}} S_{x_0\cdots x_n} \xrightarrow{d^n} 0 \quad \text{con } \check{H}^i(\mathbb{P}^n,\mathcal{F}) = \ker(d^i)/\mathrm{Im}(d^{i-1})$$

(e.g. $(n=1)$: $k[x_0,x_1,x_0^{-1}] \times k[x_0,x_1,x_1^{-1}] \xrightarrow{d^0} k[x_0,x_1,x_0^{-1},x_1^{-1}] \xrightarrow{d^1} 0$ y $H^1(\mathbb{P}^1,\mathcal{F}) \cong k[x_0,x_1,x_0^{-1},x_1^{-1}]/\mathrm{Im}(d^0)$
$\cong x_0^{-1}x_1^{-1} k[x_0^{-1},x_1^{-1}] \simeq \mathrm{Vect}_k\langle x_0^a x_1^b$ con $a,b<0 \rangle \leftarrow$ graduación $d := a+b \in \mathbb{Z}$.)

Para probar ②, veremos que $H^n(\mathbb{P}^n, \omega_{\mathbb{P}^n}) \simeq k$ y que hay un "emparejamiento perfecto" (ie, forma bilineal no-degenerada) $H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d)) \times H^n(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-d-n-1)) \to H^n(\mathbb{P}^n, \omega_{\mathbb{P}^n}) \simeq k$, que en part. implica $h^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d)) = h^n(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-d-n-1))$ y por ende ②:

Como antes, $H^n(\mathbb{P}^n,\mathcal{F}) = \mathrm{coker}(\prod_k S_{x_0\cdots\hat{x}_k\cdots x_n} \to S_{x_0\cdots x_n}) \cong \mathrm{Vect}_k\langle x_0^{a_0}\cdots x_n^{a_n}$ con $a_j < 0\rangle$ y con graduación $d := \sum_{i=0}^n a_i$. En part, si $d = -n-1$ sólo hay un monomio posible: $x_0^{-1}\cdots x_n^{-1}$ y luego $h^n(\mathbb{P}^n, \omega_{\mathbb{P}^n}) = 1$. Más aún, si $d \geq 0$ entonces $H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d)) \simeq \mathrm{Vect}_k\langle x_0^{b_0}\cdots x_n^{b_n}$ con $b_j \geq 0$ y $\sum b_j = d \rangle$ y
$\Rightarrow$ si $x_0^{a_0}\cdots x_n^{a_n} \in H^n(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-d-n-1))$ y $x_0^{b_0}\cdots x_n^{b_n} \in H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d))$ entonces:
$x_0^{a_0+b_0}\cdots x_n^{a_n+b_n} \in H^n(\mathbb{P}^n, \omega_{\mathbb{P}^n}) \cong k$ ✓ si $d<0$, entonces $H^n(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-d-n-1)) = 0$ pues
no hay monomios en $H^n(\mathbb{P}^n, \mathcal{F})$ de grado $-d-n-1 > -n-1$ ✓

Para ③ usamos inducción en n (OK si $n=1$ ✓): si localizamos resp. a x_n obtenemos que $C^\bullet(\mathcal{U},\mathcal{F})_{x_n} \cong C^\bullet(\mathcal{U}|_{\mathcal{U}_n}, \mathcal{F}|_{\mathcal{U}_n})$. Además, el Teorema de Serre (ver §28, p.97) implica que $H^i(\mathcal{U}_n, \mathcal{F}|_{\mathcal{U}_n}) = 0$ para $i \geq 1$ pues $\mathcal{U}_n \cong \mathbb{A}^n$ es afín. Dado que la localización preserva la exactitud, deducimos que $H^i(X,\mathcal{F})_{x_n} = 0$ para $i \geq 1$, ie, todo elemento de $H^i(X,\mathcal{F})$ es anulado por una potencia de x_n. Veamos que mult. por x_n es inyectivo ($\Rightarrow H^i(X,\mathcal{F}) = 0 \rightsquigarrow$ ③ ✓): sea $H = \{x_n = 0\} \cong \mathbb{P}^{n-1} \xrightarrow{i} \mathbb{P}^n$ y recordemos (ver §23, p.82) que hay una sucesión exacta

$$0 \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-H) \simeq \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-1) \xrightarrow{\cdot x_n} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n} \to i_*\mathcal{O}_H \to 0 \qquad (*)$$

Tensorizando $(*) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d)$ y considerando $\bigoplus_{d\in\mathbb{Z}}$ obtenemos $0 \to \mathcal{F} \xrightarrow{\cdot x_n} \mathcal{F} \to i_*\mathcal{F}_H \to 0$ exacta, con $\mathcal{F}_H = \bigoplus_{d\in\mathbb{Z}} \mathcal{O}_H(d)$. Usando que $H^i(\mathbb{P}^n, i_*\mathcal{F}_H) \cong H^i(H, \mathcal{F}_H)$ obtenemos sucesiones exactas:

ⓐ $0 \to H^0(\mathbb{P}^n,\mathcal{F}) \xrightarrow{\cdot x_n} H^0(\mathbb{P}^n,\mathcal{F}) \to H^0(H,\mathcal{F}_H) \to H^1(\mathbb{P}^n,\mathcal{F}) \xrightarrow{\cdot x_n} H^1(\mathbb{P}^n,\mathcal{F}) \to 0 \leftarrow$ inducción

ⓑ $0 \to H^i(\mathbb{P}^n,\mathcal{F}) \xrightarrow[\sim]{\cdot x_n} H^i(\mathbb{P}^n,\mathcal{F}) \to 0 \leftarrow$ inducción si $1<i<n-1$ $\Rightarrow H^i(\mathbb{P}^n,\mathcal{F}) = 0$ si $1<i<n-1$ ✓

ⓒ $0 \to H^{n-1}(\mathbb{P}^n,\mathcal{F}) \xrightarrow{\cdot x_n} H^{n-1}(\mathbb{P}^n,\mathcal{F}) \to H^{n-1}(H,\mathcal{F}_H) \to H^n(\mathbb{P}^n,\mathcal{F}) \xrightarrow{\cdot x_n} H^n(\mathbb{P}^n,\mathcal{F}) \to 0 \leftarrow \dim(H) = n-1$.

Notamos que los primeros términos de ⓐ se escriben como

$$0 \to \underbrace{k[x_0,\dots,x_n] \xrightarrow{\cdot x_n} k[x_0,\dots,x_n] \twoheadrightarrow k[x_0,\dots,x_{n-1}] \to 0}_{\text{exacta!} \rightsquigarrow \text{"podemos agregar un 0"}} \to H^1(\mathbb{P}^n,\mathcal{F}) \xrightarrow[\sim]{\cdot x_n} H^1(\mathbb{P}^n,\mathcal{F}) \to 0$$

$\Rightarrow H^1(\mathbb{P}^n,\mathcal{F}) = 0$. De manera similar (eg. usando ②) se deduce que $H^{n-1}(\mathbb{P}^n,\mathcal{F}) = 0$ ✓ ■

Ejercicio Deducir (usando la sucesión de Euler) que $h^i(\mathbb{P}^n, \Omega^1_{\mathbb{P}^n}) = \begin{cases} 1 & \text{si } i=1 \\ 0 & \text{sino}. \end{cases}$

Veamos algunas consecuencia del cálculo anterior:

Obs importante: Hay una biyección, para todo $\mathcal{O}_X$-módulo $\mathcal{F}$, entre:

$$\left\{\begin{matrix} s\in\Gamma(X,\mathcal{F}) \\ \text{sección global}\end{matrix}\right\} \xleftrightarrow{1:1} \left\{\begin{matrix}\varphi:\mathcal{O}_X\to\mathcal{F} \text{ morfismo} \\ \text{de } \mathcal{O}_X\text{-módulos}\end{matrix}\right\}$$

$$s \longmapsto \varphi_{s,\mathcal{U}}:\mathcal{O}_X(\mathcal{U})\to\mathcal{F}(\mathcal{U}),\ \lambda\mapsto\lambda s|_{\mathcal{U}}$$

$$s_\varphi := \varphi_X(1)\in\mathcal{F}(X) \longleftarrow \varphi$$

Notación (Recuerdo): Sea $X \overset{i}{\hookrightarrow} \mathbb{P}^n$ var. proyectiva y $d\in\mathbb{Z}$. Entonces, $\mathcal{O}_X(d) := i^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d) = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d)|_X$. Más generalmente, si $\mathcal{F}$ es un $\mathcal{O}_X$-módulo entonces denotamos $\mathcal{F}(d) := \mathcal{F}\otimes\mathcal{O}_X(d)$.

Lema (Serre): Sea $X\hookrightarrow\mathbb{P}^n$ var. proyectiva y $\mathcal{F}$ haz coherente en X. Entonces, existe $r\in\mathbb{N}^{\geq 1}$ y $m\gg 0$ tq $\mathcal{O}_X(-m)^{\oplus r}\twoheadrightarrow\mathcal{F}$ morfismo sobreyectivo de $\mathcal{O}_X$-módulos (ie, $\mathcal{O}_X^{\oplus r}\twoheadrightarrow\mathcal{F}(m)$).

Dem: Sea $\mathcal{U}_i=\{x_i\neq 0\}\cong\mathbb{A}^n$ y $V_i := X\cap\mathcal{U}_i$ abierto afín de X. Como $\mathcal{F}$ es coherente, $\mathcal{F}|_{V_i}\cong\widetilde{M}_i$ para cierto A_i-módulo M_i fin. gen, con $A_i=\mathcal{O}(V_i)$. Sean $s_{i,1},\dots,s_{i,k_i}\in M_i\cong\Gamma(V_i,\mathcal{F}|_{V_i})$ generadores de M_i, que en particular generan el tallo $\mathcal{F}_x$ $\forall x\in V_i$.

A pesar que las s_{ij} no se extienden a seccions globales de $\mathcal{F}$, veremos que $s_{ij}x_i^m\in\Gamma(X,\mathcal{F}(m))$ para cierto $m\gg 0$. Para ello, notamos que $X\setminus V_i$ se cubre por los V_k con $k\neq i$ y luego basta probar que $s_{ij}x_i^m$ se extiende a cada V_k para cierto $m\gg 0$: Como $\mathcal{F}(V_k)=M_k$ y $\mathcal{F}(V_i\cap V_k)=(M_k)_{x_i}$ (localización), existe $d_k\in\mathbb{N}$ tq $s_{ij}x_i^{d_k}\in\mathcal{F}(V_k)$. $\rightsquigarrow$ Tomar $m=\max_k\{d_k\}$ ✓

Así, para $m\gg 0$ obtenemos r secciones $s_{ij}\in\Gamma(X,\mathcal{F}(m))$ que generan los tallos $\mathcal{F}(m)_x$ $\forall x\in X$ $\Rightarrow$ Ellas definen $\mathcal{O}_X^{\oplus r}\twoheadrightarrow\mathcal{F}(m)$ sobreyectivo, ie, $\mathcal{O}_X(-m)^{\oplus r}\twoheadrightarrow\mathcal{F}$ sobreyectivo. ∎

Terminología: Sea X variedad alg. y $\mathcal{F}$ un $\mathcal{O}_X$-módulo. Decimos que $\mathcal{F}$ es globalmente generado (por finitas secciones) si existe $N\in\mathbb{N}^{\geq 1}$ y un morfismo sobreyectivo $\mathcal{O}_X^{\oplus N}\twoheadrightarrow\mathcal{F}$ de $\mathcal{O}_X$-módulos.

Así, el lema anterior dice: "Sea $\mathcal{F}$ haz coherente en $X\hookrightarrow\mathbb{P}^n$ var. proyectiva, entonces $\mathcal{F}(m) := \mathcal{F}\otimes\mathcal{O}_X(m)$ es globalmente generado para cierto $m\gg 0$."

$\boxed{\text{Ejercicio}}$ Sea $E\to X$ fibrado vectorial y $\mathcal{E}$ su haz de secciones. Probar que E es globalmente generado (en el sentido de §24, p.86) $\Leftrightarrow$ $\mathcal{E}$ es globalmente generado (como $\mathcal{O}_X$-módulo).

Teorema de finitud: Sea $X\overset{i}{\hookrightarrow}\mathbb{P}^n$ var. alg. proyectiva y $\mathcal{F}$ un haz coherente en X. Entonces, para todo $i\in\mathbb{N}$ los $\Bbbk$-ev. $H^i(X,\mathcal{F})$ son de dimensión finita (ie, $h^i(X,\mathcal{F})<+\infty$).

Dem: Dados que $H^i(X,\mathcal{F})\cong H^i(\mathbb{P}^n,i_*\mathcal{F})$ y $i_*\mathcal{F}$ coherente en $\mathbb{P}^n$, podemos sup. que $X=\mathbb{P}^n$. Además, $H^i(\mathbb{P}^n,\mathcal{F})=0$ si $i>n$ (anulación de Grothendieck) ✓ Procedemos por inducción descendente en $i\in\mathbb{N}$: Por el Lema anterior, existen $r,m\in\mathbb{N}$ y una sucesión exacta de haces coherentes en $\mathbb{P}^n$:

$$0\to\mathcal{G}\to\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-m)^{\oplus r}\to\mathcal{F}\to 0 \underset{\text{induce}}{\rightsquigarrow} \dots\to\underbrace{H^i(\mathbb{P}^n,\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-m))^{\oplus r}}_{\text{dim. finita!}}\xrightarrow{\alpha}H^i(\mathbb{P}^n,\mathcal{F})\xrightarrow{\delta}\underbrace{H^{i+1}(\mathbb{P}^n,\mathcal{G})}_{\substack{\text{dim finita}\\ \text{(inducción)}}}\to\dots$$

$$\Rightarrow h^i(\mathbb{P}^n,\mathcal{F})=\mathrm{rg}(\delta)+\dim_{\Bbbk}\ker(\delta)=\mathrm{rg}(\delta)+\mathrm{rg}(\alpha)<+\infty.$$ ∎

Teorema de anulación de Serre: Sea $X\overset{i}{\hookrightarrow}\mathbb{P}^n$ var. alg. proyectiva y $\mathcal{F}$ un haz coherente en X. Entonces, existe $m_0=m_0(\mathcal{F})\in\mathbb{N}$ tal que: para todo $i\geq 1$ y $m\geq m_0$ se tiene $H^i(X,\mathcal{F}(m))=0$.

Dem: Como antes, podemos sup. que $X=\mathbb{P}^n$ y argumentamos por inducción descendente en $i\in\mathbb{N}$ (OK si $i>n$ ✓): Por el Lema anterior, existen $r,m_1\in\mathbb{N}$ y una sucesión exacta:

$$0\to\mathcal{G}\to\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-m_1)^{\oplus r}\to\mathcal{F}\to 0 \underset{\otimes\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(m)}{\rightsquigarrow} 0\to\mathcal{G}(m)\to\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(m-m_1)^{\oplus r}\to\mathcal{F}(m)\to 0.$$

En cohomología: $\dots\to\underbrace{H^i(\mathbb{P}^n,\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(m-m_1))^{\oplus r}}_{=0 \text{ para } m\geq m_1 \text{ y } i\geq 1}\to H^i(\mathbb{P}^n,\mathcal{F}(m))\to\underbrace{H^{i+1}(\mathbb{P}^n,\mathcal{G}(m))}_{=0 \text{ para } m\geq m_2=m_2(\mathcal{G})=m_2(\mathcal{F})}\to\dots$

$\Rightarrow H^i(\mathbb{P}^n,\mathcal{F}(m))=0$ para $m\geq m_0:=\max\{m_1,m_2\}$ ✓ ∎

Caso particular importante: Sea X var. proyectiva y $L\in\mathrm{Pic}(X)$ fibrado en rectas amplio, ie, $\exists m_0\in\mathbb{N}^{\geq 1}$ tq $L^{\otimes m_0}$ muy amplio: $\varphi_{L^{\otimes m_0}}:X\hookrightarrow\mathbb{P}^n$ incrustamiento con $(\varphi_{L^{\otimes m_0}})^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)\simeq L^{\otimes m_0}$. Así, $L^{\otimes m_0}\underset{\text{def}}{=}\mathcal{O}_X(1)$ resp. al incrustamiento $X\hookrightarrow\mathbb{P}^n$. Luego, para todo $\mathcal{F}$ haz coherente en X:

① $\mathcal{F}\otimes\mathcal{L}^{\otimes m m_0} \underset{\text{dy}}{=} \mathcal{F}\otimes\mathcal{O}_X(m) \underset{\text{dy}}{=} \mathcal{F}(m)$ es glob. generado $\forall m \gg 0$.

② $\forall i \geq 1$ y $m \gg 0$ se tiene $H^i(X, \mathcal{F}\otimes\mathcal{L}^{\otimes m_0 m}) = 0$

donde $\mathcal{L}$ es el haz de secciones de L. Esto motiva la siguiente:

Def: Sea X una variedad alg. y $L \in \mathrm{Pic}(X)$ fibrado en rectas con $\mathcal{L}$ su haz de secciones. Decimos que $\mathcal{L}$ es <u>amplio como $\mathcal{O}_X$-módulo</u> si para <u>todo</u> $\mathcal{F}$ haz coherente en X se tiene que $\mathcal{F}\otimes\mathcal{L}^{\otimes m}$ es globalmente generado para todo $m = m(\mathcal{F}) \gg 0$.

Prop: Sea X variedad alg. y sean $L, M \in \mathrm{Pic}(X)$ con haces de secciones $\mathcal{L}$ y $\mathcal{M}$. Entonces:

① Para todo $r \in \mathbb{N}^{\geq 1}$, $\mathcal{L}$ es amplio como $\mathcal{O}_X$-módulo si y sólo si $\mathcal{L}^{\otimes r}$ lo es.

② Si $\mathcal{L}$ y $\mathcal{M}$ son amplios como $\mathcal{O}_X$-módulos, entonces $\mathcal{L}\otimes\mathcal{M}$ también.

③ Si $\mathcal{M}$ es amplio como $\mathcal{O}_X$-módulo, entonces $\mathcal{L}\otimes\mathcal{M}^{\otimes r}$ también para todo $r \gg 0$.

Dem: Sea $\mathcal{F}$ un haz coherente arbitrario en X. Entonces:

① Si $\mathcal{L}$ amplio entonces $\mathcal{L}^{\otimes r}$ también (pues $mr \geq m$). Sup. $\mathcal{L}^{\otimes r}$ amplio, entonces para todo $0 \leq s < r$ el haz $(\mathcal{F}\otimes\mathcal{L}^{\otimes s})\otimes(\mathcal{L}^{\otimes r})^{\otimes m} \simeq \mathcal{F}\otimes\mathcal{L}^{\otimes(s+mr)}$ es glob. gen para $m \geq m_s$. Luego, $\mathcal{F}\otimes\mathcal{L}^{\otimes m}$ es glob. gen para $m \geq r\cdot\max\{m_0, \dots, m_{r-1}\}$, ie, $\mathcal{L}$ es amplio ✓

② Sup. primero que $\mathcal{L}$ amplio y $\mathcal{M}$ glob. gen: entonces $\mathcal{F}\otimes\mathcal{L}^{\otimes m}$ glob. gen $\forall m \gg 0$ y luego $\mathcal{F}\otimes\mathcal{L}^{\otimes m}\otimes\mathcal{M}^{\otimes m}$ también, ie, $\mathcal{L}\otimes\mathcal{M}$ es amplio en tal caso. En general, si $\mathcal{L}$ y $\mathcal{M}$ son amplios entonces $\mathcal{O}_X\otimes\mathcal{L}^{\otimes m} \simeq \mathcal{L}^{\otimes m}$ glob. gen $\forall m \gg 0$ y como $\mathcal{M}^{\otimes m}$ es amplio (por ①) se tiene que $\mathcal{L}^{\otimes m}\otimes\mathcal{M}^{\otimes m} \simeq (\mathcal{L}\otimes\mathcal{M})^{\otimes m}$ es amplio $\overset{①}{\Leftrightarrow}$ $\mathcal{L}\otimes\mathcal{M}$ es amplio ✓

③ Si $\mathcal{M}$ amplio, entonces $\mathcal{L}\otimes\mathcal{M}^{\otimes r}$ glob. gen $\forall r \gg 0$. Luego, $(\mathcal{F}\otimes\mathcal{M}^{\otimes m})\otimes\underbrace{(\mathcal{L}\otimes\mathcal{M}^{\otimes r})^{\otimes m}}_{\text{glob. gen}}$ $\simeq \mathcal{F}\otimes(\mathcal{L}\otimes\mathcal{M}^{\otimes(r+1)})^{\otimes m}$ glob. gen $\forall m \gg 0$, ie, $\mathcal{L}\otimes\mathcal{M}^{\otimes(r+1)}$ amplio ✓ ∎

Teorema: Sea X variedad alg. <u>proyectiva</u> y sea $L \in \mathrm{Pic}(X)$ fibrado en rectas con haz de secciones $\mathcal{L}$. Entonces, $\mathcal{L}$ es amplio como $\mathcal{O}_X$-módulo si y sólo si L es amplio (ie, $\exists r \in \mathbb{N}^{\geq 1}$ tq $L^{\otimes r}$ es muy amplio).

Dem: Sabemos que si $L^{\otimes r}$ es muy amplio, entonces $\mathcal{L}^{\otimes r}$ es amplio como $\mathcal{O}_X$-módulo y luego $\mathcal{L}$ también. Sup. que $\mathcal{L}$ es amplio como $\mathcal{O}_X$-módulo y sea $x_0 \in X$. Consideramos V vecindad afín de x_0 tq $L|_V \simeq V\times\mathbb{A}^1$ (ie, $\mathcal{L}|_V \cong \mathcal{O}_V$) y consideramos $Y := X \setminus V$ cerrado dado por $\mathcal{I}_Y \subseteq \mathcal{O}_X$ haz de ideales. Como $\mathcal{I}_Y$ es coherente y $\mathcal{L}$ es amplio, $\exists m \in \mathbb{N}^{\geq 1}$ tq $\mathcal{I}_Y\otimes\mathcal{L}^{\otimes m}$ es globalmente generado. Por otro lado, podemos pensar las secciones de $\mathcal{I}_Y\otimes\mathcal{L}^{\otimes m}$ como secciones de $\mathcal{L}^{\otimes m}$ que se anulan en Y.

$\Rightarrow \exists s \in \Gamma(X, \mathcal{I}_Y\otimes\mathcal{L}^{\otimes m}) \subseteq \Gamma(X, \mathcal{L}^{\otimes m}) \overset{\text{dy}}{\cong} H^0(X, L^{\otimes m})$ que <u>no</u> se anula en $x_0 \notin Y$ y luego el abierto $X_s := \{x \in X \text{ tq } s(x) \neq 0\}$ está contenido en V. Como $\mathcal{L}|_V \cong \mathcal{O}_V$, tenemos que $s|_V \in \mathcal{O}(V)$ función regular y luego X_s es un <u>abierto afín</u> que contiene x_0.

Consideramos $X = \bigcup_{i=1}^{p} X_{s_i}$ cubr. finito por dichos abiertos y, reemplazando s_i por una potencia si fuese necesario, podemos sup. que m es el mismo en cada X_{s_i}. Además notamos que las $s_1, \dots, s_p$ <u>no</u> poseen ceros comunes.

Sean f_{ij} los (finitos) generadores del $\Bbbk$-álgebra $\mathcal{O}(X_{s_i})$. Luego, tal como en el Lema de Serre, $\exists r \in \mathbb{N}^{\geq 1}$ tq $s_i^r f_{ij} \in \Gamma(X, \mathcal{L}^{\otimes rm}) \overset{\text{dy}}{\cong} H^0(X, L^{\otimes rm})$. Las secciones s_i^r y $s_{ij} := s_i^r f_{ij}$ de $L^{\otimes rm}$ no tienen ceros comunes y definen $\varphi: X \to \mathbb{P}^N$ morfismo regular ✓

Sea $\mathcal{U}_i = \{x_i \neq 0\} \cong \mathbb{A}^N$ abierto estándar de $\mathbb{P}^N$ corresp. a la coordenada s_i^r de φ, entonces los $\mathcal{U}_1, \dots, \mathcal{U}_p$ cubren $\varphi(X) \subseteq \mathbb{P}^N$ y $\varphi^{-1}(\mathcal{U}_i) \overset{\text{dy}}{=} X_{s_i}$. Además, $\varphi_i := \varphi|_{X_{s_i}} : X_{s_i} \to \mathcal{U}_i$ corresponde (por construcción!) a $\varphi_i^*: \mathcal{O}(\mathcal{U}_i) \twoheadrightarrow \mathcal{O}(X_{s_i})$ <u>sobreyectivo</u> (ie, $\mathcal{O}(X_{s_i}) \simeq \mathcal{O}(\mathcal{U}_i)/I_i$)

$\Rightarrow \varphi_i$ induce un isomorfismo sobre su imagen $V(I_i) \subseteq \mathcal{U}_i \Rightarrow \varphi$ inmersión cerrada y luego $L^{\otimes rm}$ es un fibrado en rectas muy amplio ✓ ∎

Del mismo modo, tenemos el siguiente criterio cohomológico de amplitud:

Teorema: Sea X variedad alg. proyectiva y sea $L \in \mathrm{Pic}(X)$ fibrado en rectas con haz de secciones $\mathcal{L}$. Entonces, son equivalentes:

① L es amplio.

② Para todo $\mathcal{F}$ haz coherente en X, tenemos $H^i(X, \mathcal{F} \otimes \mathcal{L}^{\otimes m}) = 0$ para todo $m \gg 0$ y todo $i \geq 1$.

③ Para todo $\mathcal{F}$ haz coherente en X, tenemos $H^1(X, \mathcal{F} \otimes \mathcal{L}^{\otimes m}) = 0$ para todo $m \gg 0$.

Dem: Sea $\mathcal{F}$ un haz coherente en X. Entonces ① $\Rightarrow$ ② $\Rightarrow$ ③ pues si L amplio entonces existe $r \in \mathbb{N}^{\geq 1}$ tq $L^{\otimes r}$ es muy amplio. Por anulación de Serre, para todo $0 \leq s < r$ se tiene que:

$$H^i(X, (\mathcal{F} \otimes \mathcal{L}^{\otimes s}) \otimes (\mathcal{L}^{\otimes r})^{\otimes m}) = 0 \quad \forall i \geq 1 \text{ y } \forall m \geq m_s.$$

Así, para $m \geq r \cdot \max\{m_0, \ldots, m_{r-1}\}$ se tiene que $H^i(X, \mathcal{F} \otimes \mathcal{L}^{\otimes m}) = 0 \ \forall i \geq 1$ ✓ Veamos que ③ $\Rightarrow$ ①:

Sea $x \in X$ fijo y denotemos por $k_x := i_x(k)$ al haz rascacielos (ver §3, p.10), el cual es coherente pues $0 \to \mathcal{I}_x \to \mathcal{O}_X \xrightarrow{ev_x} k_x \to 0$ exacta. Consideremos $\mathcal{F} \xrightarrow{ev_x} \mathcal{F} \otimes k_x$ sobreyectivo con kernel $\mathcal{G} := \mathcal{F} \otimes \mathcal{I}_x$, i.e., $0 \to \mathcal{G} \to \mathcal{F} \xrightarrow{ev_x} \mathcal{F} \otimes k_x \to 0$ exacta. Por ③, existe $m_0 = m_0(\mathcal{F}, x)$ tal que $H^1(X, \mathcal{G} \otimes \mathcal{L}^{\otimes m}) = 0 \ \forall m \geq m_0 \Rightarrow \Gamma(X, \mathcal{F} \otimes \mathcal{L}^{\otimes m}) \xrightarrow{ev_x} \Gamma(X, \mathcal{F} \otimes \mathcal{L}^{\otimes m} \otimes k_x)$ sobreyectivo $\overset{\text{Nakayama}}{\Rightarrow} \exists\, \mathcal{U} = \mathcal{U}_{\mathcal{F},x}$ vecindad abierta de $x \in X$ tq $(\mathcal{F} \otimes \mathcal{L}^{\otimes m})|_{\mathcal{U}}$ globalmente generado. En part, existe $m_1 \in \mathbb{N}^{\geq 1}$ y un abierto $\mathcal{U}_{\mathcal{O}_X, m_1}$ tq $\mathcal{L}^{\otimes m_1}$ glob. gen en $\mathcal{U}_{\mathcal{O}_X, m_1}$. Luego, $\mathcal{F} \otimes \mathcal{L}^{\otimes m}$ glob. gen. en $\mathcal{U}_x := \mathcal{U}_{\mathcal{O}_X, m_1} \cap \mathcal{U}_{\mathcal{F}, m_0} \cap \mathcal{U}_{\mathcal{F}, m_0+1} \cap \ldots \cap \mathcal{U}_{\mathcal{F}, m_0+m_1-1}$ para todo $m \geq m_0$, puesto que $\mathcal{F} \otimes \mathcal{L}^{\otimes m}$ se escribe como $(\mathcal{L}^{\otimes m_1})^{\otimes r} \otimes (\mathcal{F} \otimes \mathcal{L}^{\otimes (m_0+s)})$ para ciertos $r \geq 0$ y $0 \leq s < m_1$. Finalmente, cubrimos X con finitos $\mathcal{U}_x$ y consideramos el máximo $m_0 \Rightarrow \mathcal{F} \otimes \mathcal{L}^{\otimes m}$ glob. gen. $\forall m \geq m_0$ i.e., $\mathcal{L}$ es amplio como $\mathcal{O}_X$-módulo $\Leftrightarrow L$ es amplio. ■

Aplicación a morfismos finitos:

Lema útil (fórmula de proyección): Sea $f: X \to Y$ morfismo regular, $\mathcal{F}$ un $\mathcal{O}_X$-módulo y $\mathcal{E}$ un haz localmente libre de rango r en Y. Entonces, $\mathcal{E} \otimes_{\mathcal{O}_Y} f_*\mathcal{F} \cong f_*(f^*(\mathcal{E}) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{F})$ en Y.

Dem: La afirmación es local en Y, por lo que podemos suponer $\mathcal{E} \cong \mathcal{O}_Y^{\oplus r}$. Además, todos los términos conmutan con la suma directa y luego basta considerar $\mathcal{E} \cong \mathcal{O}_Y$. Notar que $f^*\mathcal{O}_Y \cong \mathcal{O}_X$ ✓ ■

Teorema: Sea $f: X \to Y$ un morfismo finito entre variedades alg. proyectivas. Sea $\mathcal{F}$ un haz coherente en X y $L \in \mathrm{Pic}(Y)$ un fibrado en rectas en Y. Entonces:

① $H^i(X, \mathcal{F}) \cong H^i(Y, f_*\mathcal{F})$ para todo $i \geq 0$.

② Si L es amplio, entonces $f^*L \in \mathrm{Pic}(X)$ es amplio.

Dem: Sea $V \subseteq Y$ abierto afín. Como f es finito, $U := f^{-1}(V)$ es afín en X (ver §15, p.50). Luego, si $\mathcal{V}$ cubr. afín de Y entonces $\mathcal{U} = f^{-1}(\mathcal{V})$ cubr. afín de X y, por definición de $f_*\mathcal{F}$, se tiene $C^\bullet(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \cong C^\bullet(\mathcal{V}, f_*\mathcal{F})$. Como $f_*\mathcal{F}$ es coherente en X (pues f finito !):

$$H^i(X, \mathcal{F}) \underset{\text{Leray}}{\cong} \check{H}^i(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \cong \check{H}^i(\mathcal{V}, f_*\mathcal{F}) \underset{\text{Leray}}{\cong} H^i(Y, f_*\mathcal{F}) \text{ para todo } i \geq 0 \rightsquigarrow \text{①} ✓$$

Por otro lado, si $\mathcal{L}$ es el haz de secciones de $L \in \mathrm{Pic}(Y)$, entonces la fórmula de proyección implica que $f_*(\mathcal{F} \otimes f^*\mathcal{L}^{\otimes m}) \cong f_*\mathcal{F} \otimes \mathcal{L}^{\otimes m} \overset{①}{\Rightarrow} H^1(X, \mathcal{F} \otimes f^*\mathcal{L}^{\otimes m}) \cong \underbrace{H^1(Y, f_*\mathcal{F} \otimes \mathcal{L}^{\otimes m})}_{=0 \ \forall m \geq m_0 \text{ pues } L \text{ amplio}}$

$\Rightarrow H^1(X, \mathcal{F} \otimes (f^*\mathcal{L})^{\otimes m}) = 0 \ \forall m \geq m_0$, i.e., f^*L amplio ✓ ■

Ejemplo: La normalización $\nu: X^\nu \to X$ es un morfismo finito. Más aún, si X variedad proyectiva entonces X^ν también lo es (Ejercicio). Luego, si $L \in \mathrm{Pic}(X)$ amplio $\Rightarrow \nu^*L$ amplio en X^ν.

Consecuencia importante (ver §23, p.84): Sea X var. alg proyectiva e irreducible, y $L \cong \mathcal{O}_X(D)$ fibrado en rectas amplio, entonces $D \cdot C > 0$ para toda $C \subseteq X$ curva irreducible, donde $D \cdot C \underset{\text{def}}{=} \deg(\nu^*(L|_C))$, con $\nu: C^\nu \to C$ normalización.

Ejercicio Sea $\tilde{S} = \mathrm{Bl}_p(S) \xrightarrow{\varepsilon} S$ con S superficie proy. suave e irred, y sea $E = \varepsilon^{-1}(p) \cong \mathbb{P}^1$ divisor excepcional. Probar que $\mathcal{O}_{\tilde{S}}(E)$ no es amplio.