§28. Cohomología de Čech y Haces coherentes 

Esta sección es un primer acercamiento a la cohomología de haces y a la noción de haz coherente (introducida por J.P. Serre en 1955): usaremos varios resultados que serán probados más adelante!

Motivación: sea $X$ un espacio topológico y $0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{G} \to \mathcal{H} \to 0$ sucesión exacta de haces de grupos abelianos en $X$. Entonces, "$\Gamma$ es un functor exacto por la izquierda", ie:

$$0 \to \Gamma(X,\mathcal{F}) \xrightarrow{\Gamma(f)} \Gamma(X,\mathcal{G}) \xrightarrow{\Gamma(g)} \Gamma(X,\mathcal{H})$$

es exacta, pero $\Gamma(X,\mathcal{G}) \to \Gamma(X,\mathcal{H})$ no es necesariamente sobreyectiva (eg. $0 \to \mathbb{Z} \hookrightarrow \mathcal{O}_X \xrightarrow{\exp(2\pi i\,\cdot)} \mathcal{O}_X^* \to 0$ sucesión exponencial en $X=\mathbb{C}$). La cohomología mide "cuánto falla la exactitud".

Ejercicio: Sea $C \subseteq \mathbb{P}^2$ curva elíptica. Probar que $0 \to \mathcal{O}_C(-3) \to \Omega^1_{\mathbb{P}^2}|_C \to \Omega^1_C \to 0$ es otro contraejemplo.

Objetivo: Definir de manera canónica (!) para todo haz de grupos abelianos $\mathcal{F}$ en $X$ y todo $i \in \mathbb{N}$ el $i$-ésimo grupo de cohomología $H^i(X,\mathcal{F})$ verificando (entre otras cosas):

① $H^0(X,\mathcal{F}) = \Gamma(X,\mathcal{F}) \underset{\text{def}}{=} \mathcal{F}(X)$.

② $\varphi: \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ morfismo de haces induzca $H^i(\varphi): H^i(X,\mathcal{F}) \to H^i(X,\mathcal{G})$ $\forall i \in \mathbb{N}$, con $H^0(\varphi) = \Gamma(\varphi)$.

③ Toda sucesión exacta $0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{G} \to \mathcal{H} \to 0$ de haces induzca una sucesión exacta (larga)

$$0 \to H^0(X,\mathcal{F}) \to H^0(X,\mathcal{G}) \to H^0(X,\mathcal{H}) \xrightarrow{\delta^0} H^1(X,\mathcal{F}) \to H^1(X,\mathcal{G}) \to H^1(X,\mathcal{H}) \xrightarrow{\delta^1} H^2(X,\mathcal{F}) \to \dots$$

La manera más concreta (pero que depende de elecciones a priori) es considerar cohomología de Čech:

Def: Sea $\mathcal{F}$ haz de grupos abelianos en un esp. topológico $X$. Dado un cubrimiento abierto $\mathcal{U} = (U_i)_{i\in I}$ de $X$, donde $I$ es un conjunto ordenado, definimos el grupo abeliano de $p$-cocadenas de Čech de $\mathcal{F}$ resp. a $\mathcal{U}$ por:

$$C^p(\mathcal{U},\mathcal{F}) := \prod_{i_0<\dots<i_p} \mathcal{F}(U_{i_0}\cap\dots\cap U_{i_p}), \quad \text{donde } p \in \mathbb{N}.$$

Así, una $p$-cocadena $s \in C^p(\mathcal{U},\mathcal{F})$ es una colección $s = \{s_{i_0,\dots,i_p}\}_{i_0<\dots<i_p}$ de secciones de $\mathcal{F}$, con una sección por cada posible intersección (ordenada) de $p+1$ abiertos del cubrimiento $\mathcal{U}$.

Ejemplos: ⓪ $C^0(\mathcal{U},\mathcal{F}) = \prod_{i\in I} \mathcal{F}(U_i)$ y $s = \{s_i\}_{i\in I}$ con $s_i \in \mathcal{F}(U_i)$.

① $C^1(\mathcal{U},\mathcal{F}) = \prod_{i<j} \mathcal{F}(U_i\cap U_j)$ y $s = \{s_{ij}\}_{i<j}$ con $s_{ij} \in \mathcal{F}(U_i \cap U_j)$.

② $C^2(\mathcal{U},\mathcal{F}) = \prod_{i<j<k} \mathcal{F}(U_i\cap U_j\cap U_k)$ y $s = \{s_{ijk}\}_{i<j<k}$ con $s_{ijk} \in \mathcal{F}(U_i\cap U_j \cap U_k)$.

Def: Para cada $p \in \mathbb{N}$, definimos el operador de coborde $d^p: C^p(\mathcal{U},\mathcal{F}) \to C^{p+1}(\mathcal{U},\mathcal{F})$ mediante

$$(d^p s)_{i_0,\dots,i_{p+1}} := \sum_{k=0}^{p+1} (-1)^k s_{i_0,\dots,i_{k-1},i_{k+1},\dots,i_{p+1}}|_{U_{i_0}\cap\dots\cap U_{i_{p+1}}}.$$

Ejemplos: ⓪ Sea $s = \{s_i\} \in C^0(\mathcal{U},\mathcal{F})$ entonces $(d^0 s)_{i_0 i_1} := s_{i_1}|_{U_{i_0}\cap U_{i_1}} - s_{i_0}|_{U_{i_0}\cap U_{i_1}}$, ie, $d^0 s = \{s_{ij}\}$ con $s_{ij} := s_j|_{U_i\cap U_j} - s_i|_{U_i\cap U_j} \in \mathcal{F}(U_i\cap U_j)$.

① Sea $s = \{s_{ij}\} \in C^1(\mathcal{U},\mathcal{F})$, entonces $(d^1 s)_{i_0 i_1 i_2} := s_{i_1 i_2}|_{U_{i_0}\cap U_{i_1}\cap U_{i_2}} - s_{i_0 i_2}|_{U_{i_0}\cap U_{i_1}\cap U_{i_2}} + s_{i_0 i_1}|_{U_{i_0}\cap U_{i_1}\cap U_{i_2}}$ ie, $d^1 s = \{s_{ijk}\}$ con $s_{ijk} := s_{jk}|_{U_i\cap U_j\cap U_k} - s_{ik}|_{U_i\cap U_j\cap U_k} + s_{ij}|_{U_i\cap U_j\cap U_k} \in \mathcal{F}(U_i\cap U_j\cap U_k)$.

En particular, $d^1(d^0 s) = 0$ para toda $s \in C^0(\mathcal{U},\mathcal{F})$.

Ejercicio importante: Verificar que $d^{p+1}\circ d^p = 0$ para todo $p\in\mathbb{N}$, ie, $\mathrm{Im}(d^p) \subseteq \ker(d^{p+1})$.

Def: Sea $\mathcal{F}$ haz de grupos abelianos en un espacio topológico $X$. Dado un cubrimiento abierto $\mathcal{U} = (U_i)_{i\in I}$ de $X$, donde $I$ es un conjunto ordenado, definimos el $p$-ésimo grupo de cohomología de Čech por

$$\check{H}^p(X,\mathcal{F}) := \check{H}^p(\mathcal{U},\mathcal{F}) := \ker(d^p)/\mathrm{Im}(d^{p-1}), \quad \text{donde } p\in\mathbb{N},$$

y donde por convención $d^p = 0$ y $C^p(\mathcal{U},\mathcal{F}) = 0$ si $p<0$ (eg. $\check{H}^0(\mathcal{U},\mathcal{F}) = \ker(d^0)$). En part, si cada $\mathcal{F}(U)$ es un $k$-ev entonces $\check{H}^p(X,\mathcal{F})$ también, y escribimos $h^p(X,\mathcal{F}) := \dim_k \check{H}^p(X,\mathcal{F})$.

Ejemplo: $\check{H}^0(\mathcal{U},\mathcal{F}) \underset{\text{def}}{=} \ker(d^0: C^0(\mathcal{U},\mathcal{F}) \to C^1(\mathcal{U},\mathcal{F}))$. Sea $s = \{s_i\}_{i\in I} \in C^0(\mathcal{U},\mathcal{F})$ con $s_i \in \mathcal{F}(U_i)$, entonces $d^0 s = (s_j|_{U_i\cap U_j} - s_i|_{U_i\cap U_j}) = 0 \iff s_i|_{U_i\cap U_j} = s_j|_{U_i\cap U_j}$ $\forall i,j\in I$. Luego, como $\mathcal{F}$ es haz, $\exists!\, s \in \mathcal{F}(X) = \Gamma(X,\mathcal{F})$ tq $s|_{U_i} = s_i$ $\forall i\in I$. Así, $\check{H}^0(X,\mathcal{F}) = \check{H}^0(\mathcal{U},\mathcal{F}) \cong \Gamma(X,\mathcal{F})$ para todo $\mathcal{U} = (U_i)_{i\in I}$!

**Importante**: Para $p \geq 1$, los grupos $\check{H}^p(\mathcal{U},\mathcal{F})$ pueden depender del cubrimiento $\mathcal{U}=(\mathcal{U}_i)_{i\in I}$ de $X$. (9)
Pero si $\mathcal{V} < \mathcal{U}$ es un refinamiento (i.e, $\forall V_j \in \mathcal{V}$, $\exists \mathcal{U}_i \in \mathcal{U}$ tq $V_j \subseteq \mathcal{U}_i$) entonces hay restricciones naturales $C^p(\mathcal{U},\mathcal{F}) \to C^p(\mathcal{V},\mathcal{F})$ que inducen morfismos de grupos $\check{H}^p(\mathcal{U},\mathcal{F}) \to \check{H}^p(\mathcal{V},\mathcal{F})$. Luego, se puede definir de manera canónica

$$\check{H}^p(X,\mathcal{F}) := \varinjlim_{\mathcal{U} \text{ cubr. de } X} \check{H}^p(\mathcal{U},\mathcal{F}),$$

que en términos prácticos nos dice que $s \in \check{H}^p(\mathcal{U},\mathcal{F})$ y $t \in \check{H}^p(\mathcal{V},\mathcal{F})$ son iguales en $\check{H}^p(X,\mathcal{F})$ si existe un refinamiento común $\mathcal{W} < \mathcal{U}$ y $\mathcal{W} < \mathcal{V}$ tal que $s|_{\mathcal{W}} = t|_{\mathcal{W}}$.

⚠ Veremos que para variedades algebraicas $X$ podemos considerar cualquier cubrimiento afín (!) $\mathcal{U}=(\mathcal{U}_i)_{i\in I}$ de $X$ y tendremos que $\check{H}^p(X,\mathcal{F}) = \check{H}^p(\mathcal{U},\mathcal{F})$ siempre que $\mathcal{F}$ sea un haz coherente. Más aún, $H^p(X,\mathcal{F}) = \check{H}^p(\mathcal{U},\mathcal{F})$ en ese caso, donde $H^p(X,\mathcal{F})$ es la "verdadera" cohomología (que definiremos más adelante usando functores derivados !).

**Ejemplo importante**: Sea $X$ variedad alg. irreducible. Veamos que $\mathrm{Div}(X)/\mathrm{PDiv}(X) \cong \mathrm{Pic}(X) \cong \check{H}^1(X,\mathcal{O}_X^*)$.
En efecto, un fibrado en rectas $L \in \mathrm{Pic}(X)$ está det. por un cubrimiento $\mathcal{U}=(\mathcal{U}_i)_{i\in I}$ de $X$ y por funciones de transición $g_{ij} \in \mathcal{O}_X^*(\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j)$ que verifican $g_{ij}\,g_{jk}\,g_{ki} = 1$ (condición de cociclo).
Por otro lado, $g=(g_{ij}) \in C^1(\mathcal{U},\mathcal{O}_X^*)$ con $g_{ij} \in \mathcal{O}_X^*(\mathcal{U}_i\cap\mathcal{U}_j)$ (grupo multiplicativo !) cumple $d^1 g = 0$ si y sólo si $g_{ij}\,g_{jk}\,g_{ki} = 1$ en $\mathcal{O}_X^*(\mathcal{U}_i\cap\mathcal{U}_j\cap\mathcal{U}_k)$ ✓ Además, $\mathrm{Im}(d^0)$ corresponde (por definición) a divisores de Cartier principales ✓ Luego, $\mathrm{Pic}(X) \cong \check{H}^1(X,\mathcal{O}_X^*)$.

**Functorialidad**: Recordemos que un morfismo $\varphi: \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ de haces de grupos abelianos en $X$ es una colección de morfismos de grupos $\varphi_{\mathcal{U}}: \mathcal{F}(\mathcal{U}) \to \mathcal{G}(\mathcal{U})$ $\forall \mathcal{U} \subseteq X$ abierto, compatibles con las restricciones. En part, inducen morfismos $C^p(\mathcal{U},\mathcal{F}) \to C^p(\mathcal{U},\mathcal{G})$ que conmutan con los diferenciales $d^p_{\mathcal{F}}$ y $d^p_{\mathcal{G}}$, y luego definen morfismos $\check{H}^p(\mathcal{U},\mathcal{F}) \to \check{H}^p(\mathcal{U},\mathcal{G})$. Tomando límites inductivos obtenemos:

$$\check{H}^p(\varphi): \check{H}^p(X,\mathcal{F}) \longrightarrow \check{H}^p(X,\mathcal{G})$$

morfismos de grupos $\forall p \in \mathbb{N}$, con $\check{H}^0(\varphi) = \Gamma(\varphi): \Gamma(X,\mathcal{F}) \to \Gamma(X,\mathcal{G})$ ✓

**¡Atención!** Para completar nuestro "objetivo" falta verificar si dada $0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{G} \to \mathcal{H} \to 0$ suc. exacta existe una sucesión exacta (larga) en cohomología

$$0 \to \check{H}^0(X,\mathcal{F}) \to \check{H}^0(X,\mathcal{G}) \to \check{H}^0(X,\mathcal{H}) \xrightarrow{\delta^0} \check{H}^1(X,\mathcal{F}) \to \check{H}^1(X,\mathcal{G}) \to \check{H}^1(X,\mathcal{H}) \xrightarrow{\delta^1} \check{H}^2(X,\mathcal{F}) \to \dots$$

se puede verificar que no hay problema para los $\check{H}^p$ con $p \in \{0,1\}$, pero si $X$ no es Hausdorff (eg. top. de Zariski !) esto falla para $\check{H}^p$ con $p \geq 2$ ⇝ No es la "buena" cohomología :(
Por otro lado, veremos que $H^p(X,\mathcal{F})$ definida usando functores derivados sí lo cumple ! :)

⚠ El siguiente resultado (que discutiremos más adelante) permite comparar ambas cohomologías.

**Teorema de Leray**: Sea $X$ un esp. topológico y $\mathcal{F}$ un haz de grupos abelianos en $X$. Sea $\mathcal{U}=(\mathcal{U}_i)_{i\in I}$ cubrimiento abierto de $X$ tal que $H^p(\mathcal{U}_{i_1}\cap\dots\cap\mathcal{U}_{i_k},\mathcal{F}) = 0$ para todos $i_1,\dots,i_k \in I$ y todo $p \geq 1$.
Entonces, $\check{H}^p(\mathcal{U},\mathcal{F}) \cong H^p(X,\mathcal{F})$ isomorfismo para todo $p \geq 0$.

Veremos que las hipótesis anteriores se cumplen para $\mathcal{U}$ cubrimiento afín y $\mathcal{F}$ haz coherente:

**Def**: Sea $X$ una variedad algebraica. Un haz quasi-coherente en $X$ es un $\mathcal{O}_X$-módulo $\mathcal{F}$ tal que para todo $x \in X$ existe $\mathcal{U}$ vecindad abierta de $x$ y una sucesión exacta de $\mathcal{O}_{\mathcal{U}}$-módulos

$$\mathcal{O}_{\mathcal{U}}^{\oplus I} \to \mathcal{O}_{\mathcal{U}}^{\oplus J} \to \mathcal{F}|_{\mathcal{U}} \to 0,$$

donde $I$ y $J$ son conjuntos arbitrarios. En part, si $I$ y $J$ son conjuntos finitos para todo $\mathcal{U}$, diremos que $\mathcal{F}$ es un haz coherente (i.e, $\mathcal{O}_{\mathcal{U}}^{\oplus m} \to \mathcal{O}_{\mathcal{U}}^{\oplus n} \to \mathcal{F}|_{\mathcal{U}} \to 0$ con $m,n \in \mathbb{N}$).

**Ejemplos**: ① Sea $E \to X$ fibrado vectorial de $\mathrm{rg}(E)=r$ y $\mathcal{E}$ su haz de secciones. Si $E|_{\mathcal{U}} \cong \mathcal{U} \times \mathbb{A}^r$ entonces $\mathcal{E}|_{\mathcal{U}} \cong \mathcal{O}_{\mathcal{U}}^{\oplus r}$. Luego, $\mathcal{E}$ es un haz coherente !
② $\mathcal{O}_X^*$ y $\underline{\mathbb{Z}}$ no son quasi-coherentes, pues no son $\mathcal{O}_X$-módulos !

Caso part. importante: Sea $X \subseteq \mathbb{A}^n$ var. alg. afín irreducible, con $A = \mathcal{O}(X) = \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ $k$-álgebra de funciones regulares. Recordemos que si $f \in A$ entonces $\mathcal{U}_f = \{x \in X \text{ tq } f(x) \neq 0\}$ es un abierto ("principal") afín con $\mathcal{O}(\mathcal{U}_f) \cong A_f$ (localización en $f$). Dichos abiertos forman una base de la topología de Zariski de $X$.

Sea $\mathcal{F}$ un $\mathcal{O}_X$-módulo y recordemos que $M := \Gamma(X, \mathcal{F})$ es un $A$-módulo. Además, para todo $A$-módulo $M$ y todo $f \in A$ se define

$$M_f := M \otimes_A A_f = \left\{ \frac{m}{f^p} \text{ con } m \in M \text{ y } p \in \mathbb{N} \right\} / \sim$$

donde $\frac{m}{f^p} \sim \frac{m'}{f^q} \iff \exists\, r \in \mathbb{N}$ tq $f^r(m f^q - m' f^p) = 0$ en $M$.

Teorema: Sea $\mathcal{F}$ un haz coherente en una variedad alg. afín irreducible $X$. Entonces, para toda $f \in \mathcal{O}(X)$ el morfismo $\varphi_f : \Gamma(X, \mathcal{F})_f \xrightarrow{\sim} \Gamma(\mathcal{U}_f, \mathcal{F})$, $\frac{s}{f^p} \mapsto \frac{1}{f^p} \cdot s$ es un isomorfismo.

Dem: La afirmación es local, y luego podemos sup. que existe $\mathcal{O}_X^{\oplus m} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{O}_X^{\oplus n} \xrightarrow{\beta} \mathcal{F} \to 0$ exacta en $X$. Veamos que:

1° $\varphi_f$ inyectiva (i.e., si $s \in \Gamma(X, \mathcal{F})$ es tq $s|_{\mathcal{U}_f} = 0$ entonces $\exists\, p \in \mathbb{N}$ tq $s f^p = 0$ en $X$):
Sea $s \in \Gamma(X, \mathcal{F})$ tq $s|_{\mathcal{U}_f} = 0$. Como $\beta$ morfismo de haces (!) sobreyectivo, existe $X = \bigcup \mathcal{U}_i$ cubr. de $X$ y $\vec{g_i} \in \mathcal{O}_X^{\oplus m}(\mathcal{U}_i)$ tq $\beta(\vec{g_i}) = s|_{\mathcal{U}_i}$. Por otro lado, dado que si $s f^p|_{\mathcal{U}_i} = 0\ \forall i \Rightarrow s f^p = 0$ en $X$, basta tratar el caso $s = \beta(g)$ con $g \in \mathcal{O}_X^{\oplus n}(X) = A^{\oplus n}$. Como $s|_{\mathcal{U}_f} = \beta(g)|_{\mathcal{U}_f} = \beta(g|_{\mathcal{U}_f}) = 0$, tenemos que $g|_{\mathcal{U}_f} \in \ker(\beta) = \operatorname{Im}(\alpha)$. Como antes: existe $\mathcal{U}_f = \bigcup_i \mathcal{U}_{f_i}$ cubr. de $\mathcal{U}_f$ y $g_i \in A^{\oplus m}$ tq $g|_{\mathcal{U}_{f_i}} = \alpha\left(\frac{g_i}{f_i^p}\right)$, i.e., las componentes del vector $f_i^p g - \alpha(g_i)$ son nulas en $\mathcal{U}_f \Rightarrow$ nulas en todo $X$ (pues $\mathcal{U}_f$ denso!). Además, como los $\mathcal{U}_{f_i}$ cubren $\mathcal{U}_f$, los $f_i^p$ no tienen ceros comunes en $\mathcal{U}_f$ y luego (Nullstellensatz) existen $h_i \in A$ tq $\sum_i f_i^p \frac{h_i}{f^q} = 1$ en $A_f$.
$\underset{A \text{ dominio}}{\Rightarrow}$ $f^q s = \beta(f^q g) = \beta\left(\sum_i f_i^p h_i g\right) = \beta\left(\sum_i \alpha(g_i) h_i\right) = 0$, pues $\beta \circ \alpha = 0$ ✓

2° $\varphi_f$ sobreyectiva (i.e., si $s \in \Gamma(\mathcal{U}_f, \mathcal{F})$ entonces existe $p \in \mathbb{N}$ y $\tilde{s} \in \Gamma(X, \mathcal{F})$ tq $s f^p = \tilde{s}|_{\mathcal{U}_f}$):
Veamos primero que $\Gamma(\beta) : A^{\oplus n} \to \Gamma(X, \mathcal{F})$ sobreyectiva: Sea $s \in \Gamma(X, \mathcal{F})$ $\underset{\beta \text{ sobre}}{\Longrightarrow}$ $\exists\, X = \bigcup_i \mathcal{U}_{f_i}$ cubr. de $X$ y $g_i \in A^{\oplus n}$ tq $s|_{\mathcal{U}_{f_i}} = \beta\left(\frac{g_i}{f_i^p}\right)$. Las secciones $f_i^p s$ y $\beta(g_i)$ coinciden en $\mathcal{U}_{f_i}$ y luego 1° implica que $\exists\, q \in \mathbb{N}$ tq $s f_i^{p+q} = \beta(g_i f_i^q)$. Como antes: $\exists \sum_i f_i^{p+q} h_i = 1$ "partición de la unidad"
$\Rightarrow s = \sum_i f_i^{p+q} h_i s = \sum_i h_i \beta(g_i f_i^q) = \beta\left(\sum_i h_i g_i f_i^q\right)$, i.e., $\Gamma(\beta)$ sobreyectivo ✓
El mismo cálculo implica $\Gamma(\mathcal{U}_f, \mathcal{F}) = \beta(\Gamma(\mathcal{U}_f, \mathcal{O}_X)^{\oplus n}) = \beta(A_f^{\oplus n})$, i.e., $s \in \Gamma(\mathcal{U}_f, \mathcal{F})$ se escribe como $s = \beta\left(\frac{g}{f^p}\right)$ y luego $\tilde{s} := \beta(g) \in \Gamma(X, \mathcal{F})$ cumple $\tilde{s}|_{\mathcal{U}_f} = s f^p$. ∎

Conclusión: Un haz coherente $\mathcal{F}$ en una variedad afín $X$ está determinado por el $A$-módulo $\Gamma(X, \mathcal{F})$ de sus secciones globales, donde $A = \mathcal{O}(X)$.

Construcción: Sea $X$ var. alg. afín, con $A = \mathcal{O}(X)$ $k$-álgebra de funciones regulares. Dado un $A$-módulo $M$, definimos un haz $\tilde{M}$ de $\mathcal{O}_X$-módulos mediante: Para todo $f \in A$ se define

$$\Gamma(\mathcal{U}_f, \tilde{M}) \underset{\text{def}}{=} \tilde{M}(\mathcal{U}_f) := M_f$$

Ejercicio: Probar que $\tilde{M}$ es efectivamente un haz (de $\mathcal{O}_X$-módulos) y que $\tilde{M}$ es coherente si $M$ es un $A$-módulo finitamente generado. Además, $\tilde{A} = \mathcal{O}_X$.

Indicación: $M$ fin. gen. sobre $A$ anillo noetheriano implica que $\exists\, r, s \in \mathbb{N}$ tq $A^{\oplus r} \to A^{\oplus s} \to M \to 0$ exacta. Además $M \mapsto \tilde{M}$ envía suc. exactas de $A$-mód. en suc. exactas de $\mathcal{O}_X$-módulos pues la localización preserva la exactitud.

Conclusión: En una variedad alg. afín $X$, las construcciones $\mathcal{F} \mapsto \Gamma(X, \mathcal{F})$ y $M \mapsto \tilde{M}$ son inversas una de la otra. En particular,

$$\mathcal{F} \cong \widetilde{\Gamma(X, \mathcal{F})} \quad \text{y} \quad \Gamma(X, \tilde{M}) \cong M$$

para todo haz coherente $\mathcal{F}$ en $X$ y para todo $A$-módulo $M$ finitamente generado.

La correspondencia anterior permite traducir geométricamente resultados sobre módulos sobre un anillo!

Ejemplo: Sea $X$ variedad algebraica y sea $Y \overset{i}{\hookrightarrow} X$ subvar. Entonces, $\mathcal{I}_Y$ y $i_* \mathcal{O}_Y$ son coherentes en $X$. En efecto, en un abierto afín $\mathcal{U} \subseteq X$ con $\mathcal{O}(\mathcal{U}) = A$ y con $\mathcal{I}(Y \cap \mathcal{U}) = I$, tenemos que $\mathcal{O}(Y \cap \mathcal{U}) =: B \cong A/I$ y $I$ son $A$-módulos finitamente generados.
$\Rightarrow \mathcal{I}_Y|_{\mathcal{U}} \cong \widetilde{I}$ y $(i_* \mathcal{O}_Y)|_{\mathcal{U}} \cong \widetilde{B}$ son haces coherentes $\forall \mathcal{U} \subseteq X$ abierto afín ✓ Similar:

Corolario: Sean $X$ e $Y$ variedades alg. y sea $f : X \to Y$ morfismo regular. Entonces:
① Para todo $\varphi : \mathcal{F}_1 \to \mathcal{F}_2$ morfismo de haces coherentes de $X$, se tiene que $\ker(\varphi)$, $\operatorname{Im}(\varphi)$ y $\operatorname{coker}(\varphi)$ son coherentes en $X$ (ie, la categoría $\underline{\operatorname{Coh}}(X)$ de haces coherentes en $X$ es abeliana!).
② El producto tensorial y suma directa finita de haces coherentes es coherente.
③ Si $\mathcal{G}$ es coherente en $Y$, entonces $f^* \mathcal{G}$ es coherente en $X$.
④ Si $\mathcal{F}$ es quasi-coherente en $X$, entonces $f_* \mathcal{F}$ es quasi-coherente en $X$. Más aún, si $f$ es un morfismo finito (!) y $\mathcal{F}$ coherente en $X$, entonces $f_* \mathcal{F}$ es coherente en $Y$.

Aplicación: Sea $X$ variedad alg. afín con $A = \mathcal{O}(X)$. Entonces, $\Gamma : \underline{\operatorname{Coh}}(X) \to \underline{A\text{-mod}}$, $\mathcal{F} \mapsto \Gamma(X, \mathcal{F})$ es un functor exacto, ie, si $0 \to \mathcal{F} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{G} \xrightarrow{\beta} \mathcal{H} \to 0$ sucesión exacta de haces coherentes en $X$, entonces $0 \to \Gamma(X, \mathcal{F}) \xrightarrow{\Gamma(\alpha)} \Gamma(X, \mathcal{G}) \xrightarrow{\Gamma(\beta)} \Gamma(X, \mathcal{H}) \to 0$ es una sucesión exacta de $A$-módulos.
En efecto, sea $N = \operatorname{Im}(\Gamma(\beta)) \subseteq \Gamma(X, \mathcal{H})$. Entonces, $0 \to \Gamma(X, \mathcal{F}) \to \Gamma(X, \mathcal{G}) \to N \to 0$ es exacta y luego (como la localización es exacta!) $0 \to \widetilde{\Gamma(X, \mathcal{F})} \cong \mathcal{F} \to \widetilde{\Gamma(X, \mathcal{G})} \cong \mathcal{G} \to \widetilde{N} \to 0$ es exacta.
$\Rightarrow \widetilde{N} \cong \mathcal{H}$ y así $N \cong \Gamma(X, \widetilde{N}) \cong \Gamma(X, \mathcal{H})$, de donde se concluye que $\Gamma$ es exacto ✓

Volvamos a nuestra discusión sobre cohomología:

Prop: Sea $X$ variedad algebraica y $\mathcal{F}$ haz coherente en $X$. Sea $\mathcal{U}$ un cubrimiento finito de $X$ por abiertos afines principales (ie, de la forma $\mathcal{U}_f$). Entonces, si $X$ es afín se tiene:
$$\check{H}^p(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = 0 \quad \text{para todo } p \geq 1.$$
En particular, $\check{H}^p(X, \mathcal{F}) = 0$ para todo $p \geq 1$ con $X$ var. alg afín y $\mathcal{F}$ haz coherente en $X$.

Dem: Por simpleza, veamos el caso $p = 1$: Sea $A = \mathcal{O}(X)$ y $M = \Gamma(X, \mathcal{F})$ $A$-módulo. En un cubrimiento $\mathcal{U} = (\mathcal{U}_{f_i})$ toda 1-cocadena $s \in C^1(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ se escribe como $s = (s_{ij})_{i<j}$ con $s_{ij} \in M_{f_i f_j}$ de la forma $s_{ij} = \dfrac{m_{ij}}{f_i^p f_j^p}$, con $p \in \mathbb{N}$ y $m_{ij} \in M$. Por otro lado,
$d^1 s = 0 \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} s_{jk} - s_{ik} + s_{ij} = 0 \Leftrightarrow f_i^p m_{jk} - f_j^p m_{ik} + f_k^p m_{ij} = 0$ en $M_{f_i f_j f_k}$, ie, $\exists q \in \mathbb{N}$ tal que $(f_i f_j f_k)^q (f_i^p m_{jk} - f_j^p m_{ik} + f_k^p m_{ij}) = 0$ en $M \Rightarrow f_k^{p+q} s_{ij} = \dfrac{m_{ik} f_k^q}{f_i^p} - \dfrac{m_{jk} f_k^q}{f_j^p}$ en $M_{f_i f_j}$.
Como siempre, consideramos $\sum_k g_k f_k^{p+q} = 1$ "partición de la unidad", de donde obtenemos que
$s_{ij} = \sum_k g_k f_k^{p+q} s_{ij} = \dfrac{\sum_k g_k m_{ik} f_k^q}{f_i^p} - \dfrac{\sum_k g_k m_{jk} f_k^q}{f_j^p} = s_j - s_i$ en $M_{f_i f_j}$, con $s_i := -\dfrac{\sum_k g_k m_{ik} f_k^q}{f_i^p}$
ie, $(s_{ij})_{i<j}$ está en la imagen de $d^0$ y luego $\check{H}^1(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = 0$. Similar para $\check{H}^p$ con $p \geq 2$. ■

Veremos más adelante que lo mismo ocurre para la "verdadera" cohomología:

Teorema (Serre): Sea $\mathcal{F}$ un haz coherente en una variedad alg. afín. Entonces,
$$H^p(X, \mathcal{F}) = 0 \quad \text{para todo } p \geq 1.$$

Como consecuencia del resultado anterior y el Teorema de Leray, obtenemos el importante:

Teorema: Sea $X$ una variedad algebraica y $\mathcal{F}$ un haz coherente en $X$. Entonces, para todo cubrimiento finito $\mathcal{U}$ de $X$ formado por abiertos afines se tiene que:
$$\check{H}^p(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \cong H^p(X, \mathcal{F}) \quad \text{para todo } p \geq 0.$$

Dem: Sea $\mathcal{U} = (\mathcal{U}_i)$ con $\mathcal{U}_i$ abierto afín. Entonces, como $X$ es separada (!) se tiene que $\mathcal{U}_{i_1} \cap \ldots \cap \mathcal{U}_{i_k}$ es también afín, y luego $H^p(\mathcal{U}_{i_1} \cap \ldots \cap \mathcal{U}_{i_k}, \mathcal{F}) = 0$ $\forall p \geq 1$. ■

Una consecuencia importante de lo anterior es el siguiente resultado que afirma que la cohomología de un cerrado $Y \subseteq X$ se puede calcular en $X$.

**Corolario**: Sea $X$ una variedad algebraica y sea $Y \xhookrightarrow{i} X$ subvariedad. Entonces, para todo haz coherente $\mathcal{F}$ en $Y$ se tiene que $i_*\mathcal{F}$ es coherente en $X$ y además
$$H^p(X, i_*\mathcal{F}) \cong H^p(Y,\mathcal{F}) \quad \text{para todo } p\geq 0 .$$

Dem: Sabemos que $i: Y \hookrightarrow X$ es un morfismo finito (ver §15, pág 49) y luego $i_*\mathcal{F}$ es coherente en $X$. Más explícitamente, si $\mathcal{U}\subseteq X$ abierto afín con $A = \mathcal{O}(\mathcal{U})$ y con $I = \mathcal{I}(Y\cap\mathcal{U})$ ideal en $A$, entonces $M := \Gamma(Y\cap \mathcal{U},\mathcal{F})$ es un $A/I$-módulo fin. gen, y para $f\in A$ se tiene
$$\Gamma(\mathcal{U}_f, i_*\mathcal{F}) \underset{\text{def}}{=} \Gamma(Y\cap\mathcal{U}_f,\mathcal{F}) = M_f \quad (*)$$
ie, $(i_*\mathcal{F})|_{\mathcal{U}} = \widetilde{M}$, donde pensamos a $M$ como $A$-módulo fin. gen (!), y así $i_*\mathcal{F}$ es coherente.
Por otro lado, si $\mathcal{U} = (\mathcal{U}_i)_{i\in I}$ cubrimiento afín de $X$, entonces $\mathcal{V} = (V_i)_{i\in I}$ con $V_i := Y\cap\mathcal{U}_i$ es un cubrimiento afín de $Y$. Luego, gracias al Teorema anterior, basta verificar que $\check{H}^p(\mathcal{U}, i_*\mathcal{F}) \cong \check{H}^p(\mathcal{V},\mathcal{F})$. Esto último se obtiene del hecho que las restricciones de p-cocadenas $C^p(\mathcal{U}, i_*\mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} C^p(\mathcal{V},\mathcal{F})$ son isomorfismos (gracias a (*)) ✓ ■

Como aplicación, podemos probar el siguiente resultado fundamental en un caso particular:

**Teorema de anulación de Grothendieck**: Sea $X$ una variedad algebraica y $\mathcal{F}$ un haz de grupos abelianos en $X$. Entonces,
$$H^p(X,\mathcal{F}) = 0 \quad \text{para todo } p>\dim(X).$$

Dem (caso particular): El caso general se deduce del hecho que toda variedad alg. $X$ de $\dim(X)=n$ se puede cubrir con a lo más $n+1$ abiertos afines (ver libro de Hartshorne p.208 y p.224), de donde obtenemos un cubrimiento $\mathcal{U}$ que cumple $C^p(\mathcal{U},\mathcal{F})=0$ para $p>n$ y luego (por el Teorema de Leray) $H^p(X,\mathcal{F})=0$ si $p>n$ y si $\mathcal{F}$ coherente (el caso abeliano es más delicado).
Supongamos $\mathcal{F}$ coherente y veamos que toda variedad proyectiva $X \hookrightarrow \mathbb{P}^N$ de $\dim(X)=n$ se puede cubrir con a lo más $n+1$ abiertos afines: Como $\dim(X)=n$, existe $\Lambda\subseteq\mathbb{P}^N$ subesp. lineal con $\Lambda\cong\mathbb{P}^{N-n-1}$ tal que $X\cap\Lambda=\emptyset$ (cf. §16, p.54). Si suponemos que $\Lambda$ está dado por $\{x_0=\dots=x_n=0\}$ entonces $X\subseteq \mathcal{U}_0\cup\dots\cup\mathcal{U}_n$, con $\mathcal{U}_i=\{x_i\neq 0\}\cong\mathbb{A}^n$ y donde cada $V_i = X\cap\mathcal{U}_i$ es afín. ■

Ejemplo: Sea $X=\mathbb{P}^1$ y $\mathcal{F}$ haz coherente, entonces $H^i(\mathbb{P}^1,\mathcal{F})=0$ si $i\geq 2$.

① $\mathcal{F}=\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}$: $H^0(\mathbb{P}^1,\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1})\simeq k$ ✓ Calculemos $H^1(\mathbb{P}^1,\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1})$ usando cohomología de Čech resp. al cubrimiento afín $\mathcal{U}_i=\{x_i\neq0\}$ $(i=0,1)$:
$$C^1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}) = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(\mathcal{U}_0\cap\mathcal{U}_1)\simeq\left\{\frac{f}{x_0^a x_1^b} \text{ con } f \text{ homog. de grado } a+b\right\} = \mathrm{Vect}_k\left\langle \frac{x_0^m x_1^n}{x_0^a x_1^b} \text{ con } m+n=a+b,\ \begin{smallmatrix} m,n\geq0\\ a,b\geq 0\end{smallmatrix}\right\rangle$$
Luego, $m-a = n-b$ implica que $m\geq a$ ó $n\geq b$ y luego $s=\frac{x_0^m x_1^n}{x_0^a x_1^b}$ es regular en $\mathcal{U}_0$ ó en $\mathcal{U}_1$.
⇒ Cada generador está en la imagen de $d^0: C^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}) = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(\mathcal{U}_0)\times\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(\mathcal{U}_1)\longrightarrow\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(\mathcal{U}_0\cap\mathcal{U}_1)$, ie, $H^1(\mathbb{P}^1,\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1})=0$.
$$(s_0,s_1)\longmapsto s_1|_{\mathcal{U}_0\cap\mathcal{U}_1} - s_0|_{\mathcal{U}_0\cap\mathcal{U}_1}$$

② $\mathcal{F}=\omega_{\mathbb{P}^1}\cong\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-2)$: Como antes, tenemos que (cf. §21, pág 72):
$$C^1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-2)) = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-2)(\mathcal{U}_0\cap\mathcal{U}_1)\simeq\left\{\frac{f}{x_0^ax_1^b}\text{ con } f \text{ homog. de grado } a+b-2\right\} = \mathrm{Vect}_k\left\langle\frac{x_0^mx_1^n}{x_0^ax_1^b} \text{ con } m+n=a+b-2\right\rangle$$
Luego, $m-(a-1) = n-(b-1)$ implica que $m\geq a-1$ ó $n\geq b-1$. Si alguna desigualdad es estricta, entonces $s=\frac{x_0^mx_1^n}{x_0^ax_1^b}$ sería regular en algún $\mathcal{U}_0$ ó $\mathcal{U}_1$ y, tal como antes, sería 0 en $H^1(\mathbb{P}^1,\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-2))$. Así, sólo nos queda el caso $m=a-1$ y $n=b-1$, ie, $s=\frac{1}{x_0x_1}$. Dado que $C^2(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-2))=0$ tenemos que $d^1=0$ y $\ker(d^1)=C^1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-2))$. Finalmente, $H^1(\mathbb{P}^1,\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-2))\simeq\mathrm{Vect}_k\left\langle\frac{1}{x_0x_1}\right\rangle\simeq k$.

Ejercicio: Probar que $X_n = \mathbb{A}^n\setminus\{0\}$ no es afín para todo $n\geq 2$.
[Indicación: usar el Teorema de Leray para calcular $H^1(X_2,\mathcal{O}_{X_2})$ vía cohomología de Čech.]