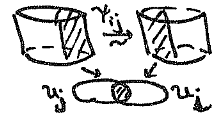
§27. Fibrados proyectivos

En esta sección, X es una var. alg. proyectiva suave e irred. y $E \to X$ fibrado vect. de $rg(E) = r$.

Construcción: Sea $X = \bigcup_{i\in I} \mathcal{U}_i$ cubr. abierto tq $E|_{\mathcal{U}_i} \cong \mathcal{U}_i \times k^r$. Definimos el fibrado proyectivo $\mathbb{P}(E) = \mathbb{P}_X(E)$ como la variedad alg. obtenida mediante el atlas algebraico dado por las $\mathcal{U}_i \times \mathbb{P}(k^r) = \mathcal{U}_i \times \mathbb{P}^{r-1}$ pegadas usando los cambios de carta:

$$(\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j) \times \mathbb{P}^{r-1} \xrightarrow[\sim]{\varphi_{ij}} (\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j) \times \mathbb{P}^{r-1}, \quad (x,[v]) \longmapsto (x, [g_{ij}(x) v])$$



matrices de transición de E.

Notamos que la construcción sólo depende de $[g_{ij}(x)] \in PGL_r(k)$, y que $\mathbb{P}(E)$ admite una proyección $\pi : \mathbb{P}(E) \to X$ con $\pi^{-1}(x) = \mathbb{P}(E_x) \simeq \mathbb{P}^{r-1}$. Decimos que $rg(\mathbb{P}(E)) := r-1$.

Obs: ① $\boxed{\text{Ejercicio}}$ $\mathbb{P}(E)$ es suave e irreducible de $\dim(\mathbb{P}(E)) = \dim(X) + r - 1$.

② Por construcción, para todo $L \in Pic(X)$ se tiene $\mathbb{P}(L) \cong X$ y $\mathbb{P}(E \otimes L) \cong \mathbb{P}(E)$.

③ $\mathbb{P}(E) \underset{bir}{\simeq} X \times \mathbb{P}^{r-1}$ y luego $\kappa(\mathbb{P}(E)) = -\infty$ si $r \geq 2$.

④ $\boxed{\text{Ejercicio}}$ Sea $E \cong \mathcal{O}_X^{\oplus r}$ fibrado trivial, entonces $\mathbb{P}(E) \cong X \times \mathbb{P}^{r-1}$.

Ejemplo: En $X = \mathbb{P}^1$, sea $E = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-1)$ con $g_{ij}(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & x_i/x_j \end{pmatrix}$. Luego, $S = \mathbb{P}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-1))$ se obtiene al pegar los $V_i := \mathcal{U}_i \times \mathbb{P}^1 \simeq \mathbb{A}^1 \times \mathbb{P}^1$ $(i = 0, 1)$ usando el cambio de cartas

$$(\mathbb{A}^1 \setminus \{0\}) \times \mathbb{P}^1 \xrightarrow[\sim]{\varphi} (\mathbb{A}^1 \setminus \{0\}) \times \mathbb{P}^1, \quad (s, [u,v]) \longmapsto (\tfrac{1}{s}, [u, sv])$$

Por otro lado, si $p = [1,0,0]$ entonces $Bl_p(\mathbb{P}^2) = \{[x,y,z],[t_1,t_2] \text{ tq } y t_2 = z t_1\} \subseteq \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^1$. Notamos que hay isomorfismos

$$V_0 \cong \mathbb{A}^1 \times \mathbb{P}^1 \xrightarrow{\sim} \{t_2 \neq 0\} \cap Bl_p(\mathbb{P}^2), \quad (s,[u,v]) \mapsto ([u, sv, v], [s,1]) \quad \leftarrow \text{Aquí: } y = z t_1 !$$

$$V_1 \cong \mathbb{A}^1 \times \mathbb{P}^1 \xrightarrow{\sim} \{t_1 \neq 0\} \cap Bl_p(\mathbb{P}^2), \quad (s,[u,v]) \mapsto ([u, v, sv], [1,s]) \quad \leftarrow \text{Aquí: } z = y t_2 !$$

que son compatibles con φ. Luego, $\mathbb{P}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-1)) \cong Bl_p(\mathbb{P}^2)$.

$\boxed{\text{Ejercicio}}$ Sea $\Lambda \cong \mathbb{P}^{k-1} \subseteq \mathbb{P}^n$. Probar que $Bl_\Lambda(\mathbb{P}^n) \cong \mathbb{P}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n-k}}^{\oplus k} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n-k}}(-1))$ (cf. §16, pág 55).

Terminología: $\mathbb{F}_m := \mathbb{P}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-m))$ es la m-ésima superficie de Hirzebruch, con $m \in \mathbb{Z}$.

Def: Sea $\pi : \mathbb{P}(E) \to X$ fibrado proyectivo con $rg(E) = r \geq 2$, y sea $\pi^* E$ el fibrado vect. de rango r en $\mathbb{P}(E)$ con $(\pi^* E)_y = E_x$, donde $y = (x,[\ell]) \in \pi^{-1}(x) = \mathbb{P}(E_x)$. Definimos el subfibrado en rectas tautológico de $\mathbb{P}(E)$, denotado $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(E)}(-1)$, mediante $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(E)}(-1)_{(x,[\ell])} := \ell \simeq k$. Así, si $E|_{\mathcal{U}} \cong \mathcal{U} \times k^r$ y $\pi^{-1}(\mathcal{U}) \cong \mathcal{U} \times \mathbb{P}^{r-1}$ entonces $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(E)}(-1)|_{\pi^{-1}(\mathcal{U})} \cong pr_2^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{r-1}}(-1)$.

Prop: Sea $\pi : \mathbb{P}(E) \to X$ fibrado proyectivo con $rg(E) = r \geq 2$, entonces:

$$\omega_{\mathbb{P}(E)} \cong \pi^*(\omega_X \otimes \det(E^\vee)) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(E)}(-r) \quad \text{en } Pic(\mathbb{P}(E)).$$

Dem: Consideramos la sucesión exacta $0 \to T_{\mathbb{P}(E)/X} \hookrightarrow T_{\mathbb{P}(E)} \xrightarrow{d\pi} \pi^* T_X \to 0$ $(*)$ (ver §25, p.87), donde $(T_{\mathbb{P}(E)/X})|_{\mathbb{P}(E_x)} \cong T_{\mathbb{P}(E_x)} \cong T_{\mathbb{P}^{r-1}}$. Por otro lado, $0 \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}(E_x)} \hookrightarrow E_x \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(E_x)}(1) \twoheadrightarrow T_{\mathbb{P}(E_x)} \to 0$ (sucesión de Euler) se reescribe como $0 \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}(E)}|_{\mathbb{P}(E_x)} \hookrightarrow (\pi^* E \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(E)}(1))|_{\mathbb{P}(E_x)} \twoheadrightarrow (T_{\mathbb{P}(E)/X})|_{\mathbb{P}(E_x)} \to 0$, de donde obtenemos la sucesión de Euler relativa en $\mathbb{P}(E)$:

$$0 \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}(E)} \hookrightarrow \pi^* E \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(E)}(1) \twoheadrightarrow T_{\mathbb{P}(E)/X} \to 0 \quad (**).$$

Luego, $\det(**)$ nos da: $\det(T_{\mathbb{P}(E)/X}) \cong \det(\pi^* E \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(E)}(1)) \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}(E)}(r) \otimes \det(\pi^* E) \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}(E)}(r) \otimes \pi^*(\det E)$.
Además, $\det(*)$ nos da: $\omega_{\mathbb{P}(E)}^\vee \underset{def}{:=} \det(T_{\mathbb{P}(E)}) \cong \det(T_{\mathbb{P}(E)/X}) \otimes \det(\pi^* T_X)$ y reemplazando nos da $\omega_{\mathbb{P}(E)}^\vee \cong (\mathcal{O}_{\mathbb{P}(E)}(r) \otimes \pi^*(\det E)) \otimes \pi^* \omega_X^\vee$, i.e., $\omega_{\mathbb{P}(E)} \cong \pi^*(\omega_X \otimes \det(E^\vee)) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(E)}(-r)$. ■

$\boxed{\text{¡Atención!}}$ En muchos textos, se usa la convención de Grothendieck $\mathbb{P}(E_x) := \{\text{hiperplanos en } E_x\}$ (que corresp. a nuestro $\mathbb{P}(E^\vee)$!) y luego $\omega_{\mathbb{P}(E)} \cong \pi^*(\omega_X \otimes \det(E)) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(E)}(-r)$ en tal caso.

Cultura general: Usando la convención de Grothendieck, decimos que $E \to X$ fibrado vect. de $rg(E) \geq 2$ es amplio (resp. big, nef, etc) si $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(E)}(1) \in Pic(\mathbb{P}(E))$ lo es. Por ejemplo, se puede probar usando la sucesión de Euler que $T_{\mathbb{P}^n}$ es amplio (ver Lazarsfeld, "Positivity in Alg Geom").

Teorema (Mori, 1979): Sea X var. alg proy suave e irred. Entonces, T_X amplio $\iff X \cong \mathbb{P}^n$.