§26. Divisor canónico y dimensión de Kodaira

En esta sección presentamos a "la estrella de la película": el divisor (o fibrado en rectas) canónico.

Def: Sea X var. algebraica suave e irreducible. Definimos el fibrado (en rectas) canónico de X como $\omega_X := \det(\Omega^1_X) \cong \Lambda^{\dim(X)} \Omega^1_X$. Además, un divisor canónico es cualquier K_X en $\mathrm{Div}(X) \cong \mathrm{WDiv}(X)$ tal que $\omega_X \cong \mathcal{O}_X(K_X)$. El dual $\omega_X^\vee$ (resp. $-K_X$) es el fibrado (resp. divisor) anti-canónico.

Ejemplos: ① Dado que $T_{\mathbb{A}^n} \cong \Omega^1_{\mathbb{A}^n} \cong \mathcal{O}_{\mathbb{A}^n}^{\oplus n}$ es trivial, tenemos $\omega_{\mathbb{A}^n} \cong \mathcal{O}_{\mathbb{A}^n}$ es trivial y $K_{\mathbb{A}^n} = 0$.

② Más generalmente, si G es un grupo algebraico irreducible entonces $\omega_G \cong \mathcal{O}_G$ es trivial. En particular, si $A \hookrightarrow \mathbb{P}^N$ variedad abeliana entonces $\omega_A \cong \mathcal{O}_A$ (ver §25, pág 88).

③ La sucesión exacta de Euler $0 \to \Omega^1_{\mathbb{P}^n} \hookrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-1)^{\oplus(n+1)} \twoheadrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n} \to 0$ implica (ver §24, pág 86) que $\det(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-1)^{\oplus(n+1)}) \cong \det(\Omega^1_{\mathbb{P}^n}) \otimes \det(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}) \iff \omega_{\mathbb{P}^n} \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-n-1)$. Así, tenemos que $K_{\mathbb{P}^n} = -(n+1)H$ es un divisor canónico de $\mathbb{P}^n$, donde $H \cong \mathbb{P}^{n-1}$ es un hiperplano.

Teorema (Fórmula de Adjunción): Sea X var. algebraica suave e irreducible y $E \to X$ fibrado vectorial de $\mathrm{rg}(E) = r \leq \dim(X) = n$. Sup. que $s \in H^0(X,E)\setminus\{0\}$ es una sección global no-nula tal que $Y := V(s) \subseteq X$ es suave de $\dim(Y) = n-r$. Entonces:

$$\omega_Y \cong \omega_X|_Y \otimes \det(N_{Y/X}).$$

En part, si $Y \subseteq X$ es una hipersuperficie y $L \cong \mathcal{O}_X(Y)$ en $\mathrm{Pic}(X)$ (ie, $r=1$), entonces se tiene $\omega_Y \cong (\omega_X \otimes L)|_Y$ en $\mathrm{Pic}(Y)$, ie, $K_Y = (K_X + Y)|_Y$ en $\mathrm{Div}(Y) \cong \mathrm{WDiv}(Y)$.

Dem: Dado que $s: X \to E$ es transversal a la sección nula, tenemos $N_{Y/X} \cong E|_Y$ (ver §25, pág 89). Por otra parte, la sucesión exacta $0 \to N^\vee_{Y/X} \hookrightarrow \Omega^1_X|_Y \twoheadrightarrow \Omega^1_Y \to 0$ implica que tenemos
$\omega_X|_Y = \det(\Omega^1_X|_Y) \cong \det(N^\vee_{Y/X}) \otimes \det(\Omega^1_Y) = \det(N_{Y/X})^\vee \otimes \omega_Y$, ie, $\omega_Y \cong \omega_X|_Y \otimes \det(N_{Y/X})$ ∎

Ejercicio Sean $L_1, \dots, L_r \in \mathrm{Pic}(X)$ fibrados en rectas y sea $s_i \in H^0(X, L_i)\setminus\{0\}$ sección no-nula para $i = 1, \dots, r$ tal que $Y = V(s_1, \dots, s_r) \subseteq X$ es suave de $\mathrm{codim}_X(Y) = r$. Probar que se cumple $\omega_Y \cong (\omega_X \otimes L_1 \otimes \dots \otimes L_r)|_Y$, ie, $K_Y = (K_X + Y_1 + \dots + Y_r)|_Y$ con $Y_i = V(s_i)$ divisor.

Notación y Terminología: Sea $X \subseteq \mathbb{P}^n$ subvar. irreducible, entonces para $d \in \mathbb{Z}$ denotamos $\mathcal{O}_X(d) := \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d)|_X$ en $\mathrm{Pic}(X)$. En part, $\mathcal{O}_X(1)$ es muy amplio y $\varphi_{\mathcal{O}_X(1)}: X \hookrightarrow \mathbb{P}^n$ es la inclusión de X en $\mathbb{P}^n$ (ver §22, pág 74). Más generalmente, una polarización en X es fijar un fibrado en rectas (muy) amplio L en X y decimos que el par (X, L) es una var. polarizada.

Ejemplo: Sea $X \subseteq \mathbb{P}^n$ hipersuperficie suave e irreducible de grado d. Entonces, por adjunción:

$$\omega_X \cong (\omega_{\mathbb{P}^n} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(X))|_X = (\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-n-1) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d))|_X = \mathcal{O}_X(d-n-1).$$

Más generalmente, si $X = X_{d_1,\dots,d_r} \subseteq \mathbb{P}^n$ es una intersección completa suave e irreducible dada por $V(f_1, \dots, f_r)$ con $\deg(f_i) = d_i$, entonces el Ejercicio anterior implica $\omega_X \cong \mathcal{O}_X\left(\sum_{i=1}^r d_i - n - 1\right)$.

Subejemplo: Sea $C \subseteq \mathbb{P}^2$ curva proy. suave e irred. de grado d, entonces $\omega_C \underset{\mathrm{def}}{=} \Omega^1_C \cong \mathcal{O}_C(d-3)$. En part, si C es una variedad abeliana entonces necesariamente $d = 3$. Recíprocamente, se puede probar que si $d = 3$ entonces C posee estructura de grupo abeliano: decimos que es una curva elíptica!

Cultura general: Sea X variedad alg. proyectiva suave e irred. Decimos que X es:

$$\left\{\begin{array}{l}\text{Fano}\\ \text{Calabi-Yau}\\ \text{canónicamente polarizada}\end{array}\right\} \text{ si } \left\{\begin{array}{l}\omega_X^\vee = \mathcal{O}_X(-K_X) \text{ es amplio}\\ \omega_X \cong \mathcal{O}_X \text{ es trivial}\\ \omega_X \cong \mathcal{O}_X(K_X) \text{ es amplio}.\end{array}\right.$$

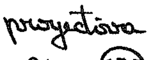
Por ejemplo, $X_{d_1,\dots,d_r} \subseteq \mathbb{P}^n$ intersección completa del Ejemplo anterior es de Fano (resp. de CY, resp. canónicamente polarizada) si $\sum_{i=1}^r d_i \leq n$ (resp. $= n+1$, resp. $\geq n+2$).

Ejercicio Determinar las posibles $X_{d_1,\dots,d_r} \subseteq \mathbb{P}^n$ inter. completas de CY de dimensión ≤ 3.

Ejercicio Sea X variedad de Fano y sup. que existe $Y \in |-K_X|$ divisor anti-canónico suave. Probar que Y es una variedad de Calabi-Yau.

Para medir la "positividad" de ω_X consideramos los siguientes invariantes:

Def: Sea X var. algebraica proyectiva suave e irreducible. Para todo $m \in \mathbb{N}^{\geq 1}$ definimos el m-ésimo plurigénero de X como
$$P_m = P_m(X) := \dim_k H^0(X, \omega_X^{\otimes m}) = \dim_k H^0(X, \mathcal{O}_X(mK_X)).$$
Para $m=1$, escribimos $p_g = p_g(X) := \dim_k H^0(X, \omega_X)$ en lugar de P_1, y decimos que $p_g(X)$ es el género geométrico de X. Más aún, en el caso de una curva C escribimos $g(C)$ en lugar de $p_g(C)$ y decimos que $g(C) := \dim_k H^0(C, \Omega^1_C)$ es el género de C.

Obs importante: Si $k = \mathbb{C}$, una curva alg. proyectiva suave e irred. $C \subseteq \mathbb{P}^N$ puede verse como una superficie real compacta orientable: $C \underset{homeo}{\approx}$  ó , y se puede probar (usando Teoría de Hodge) que $g(C)$ es el número de "agujeros" de C (vista como superficie).

Ejercicio: Sea X variedad de Fano (resp. de Calabi-Yau). Probar que $P_m(X) = 0$ (resp. $=1$) $\forall m \geq 1$.

Indicación: Probar que si $L \in \mathrm{Pic}(X)$ con $L \cong \mathcal{O}_X(D)$ es amplio, entonces $H^0(X, \mathcal{O}_X(-mD)) = 0$ $\forall m \geq 1$, usando que si $\mathcal{O}_X(m_0 D)$ muy amplio para cierto $m_0 \geq 1$ entonces $\mathcal{O}_X(m m_0 D)$ también y usando que si $s \in H^0(X, \mathcal{O}_X(-mD))$ no-nula entonces $s^{\otimes m_0} \in H^0(X, \mathcal{O}_X(-m m_0 D))$ no-nula.

Teorema: Sean X e Y variedades alg. proyectivas suaves e irreducibles. Supongamos que $X \underset{bir}{\simeq} Y$ son birracionales, entonces
$$H^0(X, \omega_X^{\otimes m}) \cong H^0(Y, \omega_Y^{\otimes m}) \quad \forall m \geq 1.$$
En particular, los plurigéneros $P_m(X) = P_m(Y)$ son invariantes birracionales.

Dem: $\boxed{\text{Paso 1}}$ Sea $L \in \mathrm{Pic}(X)$ fibrado en rectas y $Z \subseteq X$ cerrado tal que $\operatorname{codim}_X(Z) \geq 2$, entonces la aplicación lineal $H^0(X, L) \xrightarrow[\sim]{res} H^0(X \setminus Z, L|_{X \setminus Z})$ es un isomorfismo (cf. Teo. de Hartogs):
La inyectividad se obtiene considerando secciones como divisores de Weil efectivos (ver §23, pág 79) ✓
Para la sobreyectividad consideramos $s \in H^0(X \setminus Z, L|_{X \setminus Z})$ y $z \in Z$: trivializamos $L|_{\mathcal{U}} \cong \mathcal{U} \times \mathbb{A}^1$ en una vecindad $\mathcal{U}$ de $z \in Z$ y tenemos que $s(x) = (x, f(x))$ con $f : \mathcal{U} \setminus Z \to k$ regular, que induce $f : \mathcal{U} \dashrightarrow k$ racional. Notamos que $\operatorname{div}(f) \geq 0$ efectivo en $\operatorname{Div}(\mathcal{U})$ (pues los polos están en codim 1) $\underset{\mathcal{U} \text{ suave}}{\Longrightarrow}$ f es regular ✓ Así, existe $\tilde{s} \in H^0(X, L)$ tq $\tilde{s}|_{X \setminus Z} = s$.

$\boxed{\text{Paso 2}}$ Sea $f : \mathcal{U} \xrightarrow{\sim} V$ isomorfismo regular entre var. alg. suaves e irred. Entonces, f induce un isomorfismo k-lineal $F^* : H^0(V, \omega_V) \xrightarrow{\sim} H^0(\mathcal{U}, \omega_{\mathcal{U}})$:
Por functorialidad, f induce $df : T_{\mathcal{U}} \xrightarrow{\sim} f^* T_V$ y ${}^t df : f^* \Omega^1_V \xrightarrow{\sim} \Omega^1_{\mathcal{U}} \Rightarrow \Lambda^p({}^t df) : f^* \Omega^p_V \xrightarrow{\sim} \Omega^p_{\mathcal{U}}$ para todo $p \geq 1$. Además, f induce $\Gamma(f) : H^0(V, \Omega^p_V) \xrightarrow{\sim} H^0(\mathcal{U}, f^* \Omega^p_V)$. Así, componiendo $\Gamma(f)$ y $\Lambda^p({}^t df)$ obtenemos $F^* : H^0(V, \Omega^p_V) \xrightarrow{\sim} H^0(\mathcal{U}, \Omega^p_{\mathcal{U}})$ isomorfismo $\forall p \geq 1$. En part, para $p = \dim(\mathcal{U}) = \dim(V)$ obtenemos $F^* : H^0(V, \omega_V) \xrightarrow{\sim} H^0(\mathcal{U}, \omega_{\mathcal{U}})$ isomorfismo ✓
Similar: $(F^*)^{\otimes m} : H^0(V, \omega_V^{\otimes m}) \xrightarrow{\sim} H^0(\mathcal{U}, \omega_{\mathcal{U}}^{\otimes m})$ isomorfismo $\forall m \geq 1$.

$\boxed{\text{Paso 3}}$ $f : X \dashrightarrow Y$ aplicación birracional induce $H^0(Y, \omega_Y^{\otimes m}) \xrightarrow{\sim} H^0(X, \omega_X^{\otimes m})$ isomorfismo $\forall m \geq 1$:
Sabemos que existe $Z \subseteq X$ cerrado tq $\operatorname{codim}_X(Z) \geq 2$ y $f|_{\mathcal{U}} : \mathcal{U} \to Y$ regular con $\mathcal{U} := X \setminus Z$ (ver §17, pág 60). Así, $f|_{\mathcal{U}}$ induce $H^0(Y, \omega_Y^{\otimes m}) \xrightarrow{\varphi} H^0(\mathcal{U}, \omega_{\mathcal{U}}^{\otimes m}) \cong H^0(X, \omega_X^{\otimes m})$. El mismo argumento aplicado a $g = f^{-1} : Y \dashrightarrow X$ nos da $H^0(X, \omega_X^{\otimes m}) \to H^0(Y, \omega_Y^{\otimes m})$, la inversa de φ. ∎

Consecuencia: Dado que $\mathbb{P}^n$ variedad de Fano, $P_m(\mathbb{P}^n) = 0$ $\forall m \geq 1$ y luego $X_d \subseteq \mathbb{P}^{n+1}$ hipersup. suave irred. de grado d no es racional (ie, $X_d \underset{bir}{\not\simeq} \mathbb{P}^n$) para $d \geq n+2$.

Obs: La demostración también prueba que los $H^0(X, \Omega^p_X)$ son invariantes birracionales $\forall p \geq 1$.

Def: Sea X variedad alg. proyectiva suave e irred. La dimensión de Kodaira de X, denotada $\kappa(X)$, es la dimensión de Iitaka de ω_X (cf. §22, p.77):
$$\kappa(X) = \begin{cases} \max_{m \in \mathbb{N}^{\geq 1}} \dim\left(\overline{\varphi_{\omega_X^{\otimes m}}(X)}\right) & \text{si } \exists m_0 \geq 1 \text{ tq } P_{m_0}(X) \neq 0 \\ -\infty & \text{si } P_m(X) = 0 \ \forall m \geq 1. \end{cases}$$
En part, $\kappa(X) \in \{-\infty, 0, 1, \dots, \dim(X)\}$ y decimos que X es de tipo general si $\kappa(X) = \dim(X)$, ie, si ω_X es big.

Ejemplos: ① si $X \underset{\text{bir}}{\simeq} Y$ entonces $\kappa(X) = \kappa(Y)$. En part, $\kappa(Bl_Z(X)) = \kappa(X)$.

② sea $X \underset{\text{bir}}{\simeq} \mathbb{P}^n$ variedad racional, entonces $\kappa(X) = -\infty$.

③ sea $C_d \subseteq \mathbb{P}^2$ <u>curva</u> proy. suave e irred. de grado $d \geq 1$, entonces $\kappa(C_d) = \begin{cases} -\infty & \text{si } d \leq 2 \\ 0 & \text{si } d = 3 \\ 1 & \text{si } d \geq 4 \end{cases}$

④ sea X variedad de Fano (resp. CY, resp. Can. Pol.) entonces $\kappa(X) = -\infty$ (resp. $= 0$, resp. $\dim(X)$).

⑤ $\boxed{\text{Ejercicio}}$ Probar que $\omega_{X \times Y} \cong \omega_X \boxtimes \omega_Y$ (cf. §21, pág 72) y deducir que $\kappa(X \times Y) = \kappa(X) + \kappa(Y)$, con $-\infty + d := -\infty$ para $d \in \mathbb{N} \cup \{-\infty\}$. En part, $\kappa(X \times \mathbb{P}^n) = -\infty$.

Prop: sea $X = V(f) \subseteq \mathbb{P}^n$ hipersuperficie <u>suave</u> e irreducible de grado d. Entonces:

$$P_g(X) = \begin{cases} 0 & \text{si } d \leq n \\ \binom{d-1}{n} & \text{si } d \geq n+1 \end{cases}$$

En part, $g(C_d) = \dfrac{(d-1)(d-2)}{2}$ para $C_d \subseteq \mathbb{P}^2$ <u>curva</u> proy. suave e irreducible de grado d.

Dem: En $\mathcal{U} = \mathcal{U}_0 = \{x_0 \neq 0\} \cong \mathbb{A}^n$ tenemos $X \cap \mathcal{U} = V(g)$ con $g(x) = g(x_1, .., x_n) = f(1, x_1, .., x_n)$. Sea $V_i := \{x \in \mathcal{U} \text{ tq } \frac{\partial g}{\partial x_i}(x) \neq 0\} \subseteq \mathcal{U}$ y notar que $\mathcal{U} = \bigcup_{i \in I} V_i$ (pues X suave) y que $x_1, \dots, \widehat{x_i}, \dots, x_n$ (se omite x_i) son coord. locales de $X \cap \mathcal{U}_0$ en V_i (pues Euler $\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial g}{\partial x_j} dx_j = 0$ (E) permite despejar dx_i). Luego, $dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \dots \wedge dx_n$ generador de $H^0(X \cap V_i, \omega_{X \cap V_i})$ como $\mathcal{O}_X(X \cap V_i)$-módulo, y reescalando:

$$\omega_i = \omega_i^0 := \frac{(-1)^{i-1}}{(\partial g / \partial x_i)} dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \dots \wedge dx_n \quad (*)$$

En $V_i \cap V_j$, la relación (E) $\wedge (dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \dots \wedge \widehat{dx_j} \wedge \dots \wedge dx_n) = 0$ equivale a $\omega_i = \omega_j$, ie, $\omega^0 = \{\omega_i^0\}_{i \in I}$ define una sección de ω_X en $X \cap (\bigcup_{i \in I} V_i) = X \cap \mathcal{U}_0$. Veamos qué ocurre en otra carta: En $\mathcal{U}_1 = \{x_1 \neq 0\} \cong \mathbb{A}^n$ con coord. $y_0, y_2, \dots, y_n$ (donde $y_0 = \frac{1}{x_1}$, $y_2 = \frac{x_2}{x_1}, \dots, y_n = \frac{x_n}{x_1}$ en $\mathcal{U}_0 \cap \mathcal{U}_1$ y luego $dy_0 = -\frac{1}{x_1^2} dx_1$ y $dy_j = \frac{1}{x_1} dx_j - \frac{x_j}{x_1^2} dx_1$ si $j = 2, \dots, n$), tenemos que $X \cap \mathcal{U}_1 = V(h)$ donde $h(y) = h(y_0, y_2, .., y_n)$ es $f(y_0, 1, y_2, .., y_n)$. Así, h define $\omega^1 \in H^0(X \cap \mathcal{U}_1, \omega_{X \cap \mathcal{U}_1})$ que en $\{y \in \mathcal{U}_1 \text{ tq } \frac{\partial h}{\partial y_n}(y) \neq 0\}$ está dada por:

$$\omega_n^1 = \frac{(-1)^{n-1}}{(\partial h / \partial y_n)} dy_0 \wedge dy_2 \wedge \dots \wedge dy_{n-1} \iff \omega_n^1 = \frac{(-1)^{n-1}}{(\partial h / \partial y_n)} \cdot \frac{1}{x_1^n} dx_1 \wedge \dots \wedge dx_{n-1} \quad (**)$$

Por otro lado, $h(y) = f(y_0, 1, y_2, .., y_n) = y_0^d f(1, \frac{1}{y_0}, \dots, \frac{y_n}{y_0}) = y_0^d f(1, x_1, \dots, x_n) = y_0^d g(x) \Rightarrow \frac{\partial h}{\partial y_n} = y_0^d \cdot \frac{1}{y_0} \frac{\partial g}{\partial y_n} = \frac{1}{x_1^{d-1}} \frac{\partial g}{\partial y_n}$

$\underset{(*)+(**)}{\Longrightarrow} \omega^1 = (-1)^* x_1^{d-n-1} \omega^0$ en $\mathcal{U}_0 \cap \mathcal{U}_1$. Finalmente, $s \in H^0(X, \omega_X)$ define $s|_{X \cap \mathcal{U}_i} = P_i \omega^i$ con P_i un polinomio en n variables, con $P_0(x) = (-1)^* x_1^{d-n-1} P_1(\frac{1}{x_1}, \frac{x_2}{x_1}, \dots, \frac{x_n}{x_1}) = (-1)^* x_1^{d-n-1} \frac{Q(x_1, .., x_n)}{x_1^{\deg P_1}} \leftarrow$ homogéneo

$\Rightarrow H^0(X, \omega_X) \cong \left\{ \begin{matrix} \text{pol. homog. en } n \text{ variables} \\ \text{de grado} \leq d - n - 1 \end{matrix} \right\}$ de donde se calcula $P_g(X) = \dim_k H^0(X, \omega_X)$. ∎

El "Teorema de factorización débil" de Wlodarczyk (ver §17, p.61) nos motiva a estudiar blow-ups:

Prop: sea X variedad alg. <u>suave</u> e irred. y sea $Z \subseteq X$ subvar. <u>suave</u> e irred. de $\text{codim}_X(Z) = r \geq 2$. Sea $\varepsilon: \widetilde{X} \to X$ el blow-up de $Z \subseteq X$ con $E = \varepsilon^{-1}(Z) \subseteq \widetilde{X}$ divisor excepcional. Entonces:

$$\omega_{\widetilde{X}} \cong \varepsilon^* \omega_X \otimes \mathcal{O}_{\widetilde{X}}((r-1)E), \text{ ie, } K_{\widetilde{X}} = \varepsilon^* K_X + (r-1)E.$$

Dem: Sabemos que $\text{Pic}(\widetilde{X}) = \varepsilon^* \text{Pic}(X) \oplus \mathbb{Z} \mathcal{O}_X(E)$ (ver §23, p.83) y luego $\omega_{\widetilde{X}} = \varepsilon^* L \otimes \mathcal{O}_{\widetilde{X}}(mE)$ para ciertos $L \in \text{Pic}(X)$ y $m \in \mathbb{Z}$: Notamos que $\omega_X|_{X \setminus Z} \cong \omega_{\widetilde{X}}|_{\widetilde{X} \setminus E} \cong \varepsilon^* L|_{\widetilde{X} \setminus E} \cong L|_{X \setminus Z} \underset{\text{codim}(Z) \geq 2}{\Longrightarrow} L \cong \omega_X$ ✓

Basta calcular $m \in \mathbb{Z}$: sean $u_1, \dots, u_n$ coord. locales en X tq $Z \underset{\text{loc}}{=} \{u_1 = \dots = u_r = 0\}$. Entonces (ver §17, p.61), $\widetilde{X}$ está dado localmente por $u_i y_j = u_j y_i$ con $i, j = 1, \dots, r$ y donde $y = [y_1, .., y_r] \in \mathbb{P}^{r-1}$. Para $y_1 \neq 0$ obtenemos $u_j = y_j u_1$ $(j = 2, .., r)$ y $E \underset{\text{loc}}{=} \{u_1 = 0\}$. Finalmente, calculamos que $\varepsilon^*(du_1 \wedge \dots \wedge du_n) \overset{\text{dy}}{=} du_1 \wedge d(y_2 u_1) \wedge \dots \wedge d(y_r u_1) \wedge du_{r+1} \wedge \dots \wedge du_n = u_1^{r-1} du_1 \wedge dy_2 \wedge \dots \wedge dy_r \wedge \dots \wedge du_n$, ie, $m = r - 1$. ∎

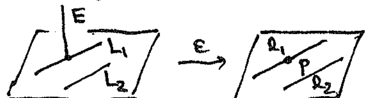
Consecuencias:

① S <u>superficie</u> suave irred y $\varepsilon: \widetilde{S} = Bl_{p_1, .., p_r}(S) \to S$, entonces $K_{\widetilde{S}} = \varepsilon^* K_S + E_1 + \dots + E_r$, $E_i \cong \mathbb{P}^1$ curva excepc.

② si $Z = \{p\}$ punto, $E = \varepsilon^{-1}(p) \cong \mathbb{P}^{n-1}$ y luego $\omega_E \cong \omega_{\mathbb{P}^{n-1}} \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n-1}}(-n)$. Por otro lado, la fórmula de adjunción $\omega_E \cong (\omega_{\widetilde{X}} \otimes \mathcal{O}_{\widetilde{X}}(E))|_E = \omega_{\widetilde{X}}|_E \otimes \mathcal{O}_{\widetilde{X}}(E)|_E$ y la fórmula $\omega_{\widetilde{X}}|_E \cong (\varepsilon^* \omega_X \otimes \mathcal{O}_{\widetilde{X}}((n-1)E))|_E \cong \mathcal{O}_{\widetilde{X}}((n-1)E)|_E$ implican $\omega_E \cong \mathcal{O}_{\widetilde{X}}(nE)|_E \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n-1}}(-n)$. Luego, $\mathcal{O}_E(E) := \mathcal{O}_{\widetilde{X}}(E)|_E \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n-1}}(-1) \cong \mathcal{N}_{E/\widetilde{X}}$.

③ <u>Caso particular importante</u>: S <u>superficie</u> proy. suave irred y $\varepsilon: \widetilde{S} = Bl_p(S) \to S$, con $E = \varepsilon^{-1}(p) \cong \mathbb{P}^1$. Entonces, la "auto-intersección" $E^2 := E \cdot E \underset{\text{dy}}{=} \deg(\mathcal{O}_{\widetilde{S}}(E)|_E) = \deg(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-1)) = -1$.

<u>Importante</u> (cultura general): En 1901, Castelnuovo y Enriques prueban que si S superficie proy. <u>suave</u> irred y $C \subseteq S$ con $C \cong \mathbb{P}^1$ y $C^2 = -1$, entonces existe S' superficie proy. <u>suave</u> irred tal que $S \cong Bl_p(S')$ y $E = C$.



$$\begin{matrix} \varepsilon^* \ell_1 = L_1 + E \\ \| \\ \varepsilon^* \ell_2 = L_2 \end{matrix} \Big/ \cdot E \rightsquigarrow \begin{matrix} 1 + E^2 \\ \| \\ 0 \end{matrix}, \text{ ie, } E^2 = -1.$$