§25. Fibrado tangente, cotangente y normal

Durante toda esta sección, fijamos X variedad algebraica suave e irreducible de dimensión n. Así, $\dim_k(T_xX) = \dim(X) = n$ para todo $x \in X$.

Construcción (fibrado tangente): Veamos dos formas de construir T_X fibrado vectorial tal que $\forall x \in X$ se tiene $T_{X,x} \cong T_xX \cong (\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2)^*$ (ver §17):

① Usando el espacio cotangente $\Omega^1_{X,x} := T^*_{X,x} \cong \mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2$:

Sea $\{\mathcal{U}_i\}_{i\in I}$ cubrimiento abierto de X y, para cada $i \in I$, sean $u_1^i, \dots, u_n^i \in \mathcal{O}(\mathcal{U}_i)$ coord. locales, i.e., las diferenciales $d_x u_1^i, \dots, d_x u_n^i$ forman una base de $\Omega^1_{X,x}$ $\forall x \in \mathcal{U}_i$ (ver §17, p. 60). En $\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j$, consideramos la matriz $g_{ij}(x) \in Gl_n(k)$ de cambio de base que permite pasar de $\{d_x u_1^j, \dots, d_x u_n^j\}$ a $\{d_x u_1^i, \dots, d_x u_n^i\}$ $\forall x \in \mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j$. En part, dichas matrices verifican la condición de cociclo $g_{ij}\, g_{jk} = g_{ik}$ y por ende definen un fibrado vectorial Ω^1_X en X, donde $\Omega^1_{X,x}$ es el espacio cotangente en $x \in X$, y donde $T_X := (\Omega^1_X)^\vee$ cumple $T_{X,x} \cong T_xX$ $\forall x \in X$.

② Usando abiertos afines:

Sea $\{\mathcal{U}_i\}_{i\in I}$ cubrimiento abierto de X donde, para cada $i \in I$, $\mathcal{U}_i \cong \mathcal{U} \hookrightarrow \mathbb{A}^N$ var. alg. afín donde $I(\mathcal{U}) = \langle f_1, \dots, f_m \rangle \subseteq \mathcal{O}(\mathbb{A}^N)$ y donde podemos asumir $m = N - n$ (ver §17, p. 60). Además, para todo $x \in \mathcal{U}$ tenemos que (ver §17, pág 57):

$$T_xX \underset{\text{df}}{\cong} T_x\mathcal{U} \cong \ker(d_x f)$$

donde $f : \mathbb{A}^N \to \mathbb{A}^m$, $x \mapsto (f_1(x), \dots, f_m(x))$ y donde $d_x f : T_x\mathbb{A}^N \simeq k^N \to T_{f(x)}\mathbb{A}^m \simeq k^m$.
En part, $\operatorname{rg}(d_x f) = N - \dim_k \ker(d_x f) = N - n = m$ pues X es suave, i.e., $d_x f$ sobreyectiva $\forall x \in \mathcal{U}$.
Luego, si consideramos el morfismo de fibrados vectoriales triviales en $\mathcal{U}$

$$df : \mathcal{U} \times k^N \to \mathcal{U} \times k^m, \quad (x, v) \mapsto (x, (d_x f)(v))$$

tenemos que $T_X|_{\mathcal{U}} = T_{\mathcal{U}} := \ker(df)$ es un fibrado vectorial en $\mathcal{U}$ (ver §24, p. 85), que verifica $T_{\mathcal{U},x} \cong T_x\mathcal{U} \cong T_xX$ $\forall x \in X$. Finalmente, el atlas algebraico $\{\mathcal{U}_i\}_{i\in I}$ induce un atlas algebraico que permite "pegar" los $T_{\mathcal{U}_i}$ en un fibrado vectorial T_X en X.

Def: Los fibrados vectoriales T_X y Ω^1_X en X, ambos de rango $\dim(X)$, son llamados el fibrado tangente y fibrado cotangente de X, respectivamente. Además, para $\mathcal{U} \subseteq X$ abierto no-vacío, las secciones de $H^0(\mathcal{U}, T_X|_{\mathcal{U}})$ y $H^0(\mathcal{U}, \Omega^1_X|_{\mathcal{U}})$ son llamadas campos de vectores (o vectores tangentes) y 1-formas en $\mathcal{U}$, respectivamente.

Terminología: Más generalmente, para $p \in \{1, \dots, \dim(X)\}$ definimos $\Omega^p_X := \Lambda^p \Omega^1_X$ el fibrado de p-formas diferenciales en X (ver §20, p. 71 y cf. §4, p. 17). Concretamente, si $u_1, \dots, u_n \in \mathcal{O}_X(\mathcal{U})$ son coordenadas locales en $\mathcal{U} \subseteq X$, entonces $s \in H^0(\mathcal{U}, \Omega^p_X|_{\mathcal{U}})$ es de la forma

$$s(x) = \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_p \leq n} f_{j_1,\dots,j_p}(x)\, d_x u_{j_1} \wedge \dots \wedge d_x u_{j_p} \quad \text{con } f_{j_1,\dots,j_p} \in \mathcal{O}_X(\mathcal{U}).$$

Luego, $\operatorname{rg}(\Omega^p_X) = \binom{n}{p}$, con $n = \dim(X)$.

Importante (Functorialidad): Sea $f : X \to Y$ un morfismo regular entre var. alg. suaves e irred. Entonces, la diferencial $d_x f : T_xX \to T_{f(x)}Y \underset{\text{df}}{=} (f^*T_Y)_x$ induce un morfismo

$$df : T_X \to f^*T_Y$$

de fibrados vectoriales en X, que también llamamos la diferencial de f.

Obs: Por definición, $f : X \to Y$ es un morfismo suave si $df : T_X \twoheadrightarrow f^*T_Y$ sobreyectivo (ver §18, p. 62). En tal caso, hay una sucesión exacta $0 \to T_{X/Y} \hookrightarrow T_X \xrightarrow{df} f^*T_Y \to 0$ de fibrados vectoriales en X, donde $T_{X/Y} := \ker(df)$ es el fibrado tangente relativo (también denotado T_f) y donde $(T_{X/Y})_x \cong T_x(f^{-1}(f(x)))$ para todo $x \in X$ (ver §18, p. 63). Por definición, $\Omega^1_{X/Y} := (T_{X/Y})^\vee$, y se tiene $0 \to f^*\Omega^1_Y \hookrightarrow \Omega^1_X \twoheadrightarrow \Omega^1_{X/Y} \to 0$ por dualidad.

Ejemplos: ① Sean X e Y var. alg. suaves e irreducibles, entonces $T_{X\times Y} \cong T_X \oplus T_Y$ (ver §17, p. 56).
② Para $\mathbb{A}^n$, tenemos que $T_{\mathbb{A}^n} \cong \mathbb{A}^n \times k^n$ es el fibrado trivial de rango n. En efecto, si identificamos $T_{\mathbb{A}^n}$ con su haz de secciones (ver §21, p. 73) y consideramos coordenadas (globales!) de $\mathbb{A}^n$, entonces los campos de vectores $\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \in H^0(\mathbb{A}^n, T_{\mathbb{A}^n})$, con $\frac{\partial}{\partial x_i} : \mathcal{O}_{X,p} \to k$, $f \mapsto \frac{\partial f}{\partial x_i}(p)$ $\forall p \in \mathbb{A}^n$, generan $H^0(\mathcal{U}, T_{\mathbb{A}^n}|_{\mathcal{U}})$ para todo abierto $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{A}^n$ (ver §17, p. 56). En otras palabras, $T_{\mathbb{A}^n} \cong \mathcal{O}_{\mathbb{A}^n}^{\oplus n}$.

Terminología: Acuñando el término de geometría diferencial, decimos que una variedad alg. suave e irreducible X es paralelizable si $T_X \cong X \times k^{\dim(X)}$ es el fibrado trivial (o equivalentemente, si $T_X \cong \mathcal{O}_X^{\oplus \dim(X)}$ en términos de haces de secciones).

Prop: Sea G un grupo algebraico irreducible. Entonces, G es paralelizable.

Dem (Mumford): Recordemos que todo grupo algebraico es suave (ver §17, p. 59). Sea $e \in G$ el neutro de G y sea $\mathfrak{g} := T_e G$ ("álgebra de Lie de G"), para cada $g \in G$ consideramos el morfismo regular $L_g : G \to G$, $h \mapsto gh$ con diferencial $d_e L_g : \mathfrak{g} \to T_g G$. Veamos que

$$\varphi : G \times \mathfrak{g} \xrightarrow{\sim} T_G, \quad (g, v) \mapsto (d_e L_g)(v)$$

es un isomorfismo de fibrados vectoriales: Sea $E = G \times \mathfrak{g}$ y $F = T_G$, y sean $\mathcal{E}$ y $\mathcal{F}$ los haces de secciones respectivos. Entonces, $\varphi_x : E_x \xrightarrow{\sim} F_x$ isomorfismo de k-ev $\forall x \in G$ (pues G suave). Por otro lado, $E_x \cong \mathcal{E}_x / \mathfrak{m}_x \mathcal{E}_x$ y $F_x \cong \mathcal{F}_x / \mathfrak{m}_x \mathcal{F}_x$ (ver §21, p. 73), y luego el Lema de Nakayama (ver §22, p. 76) implica que $\varphi_x : \mathcal{E}_x \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}_x$ isomorfismo de tallos $\forall x \in G$. Como $\mathcal{E}$ y $\mathcal{F}$ son haces, tenemos que $\varphi : \mathcal{E} \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}$ es un isomorfismo de haces (ver §3, p. 13), i.e., $T_G \cong G \times \mathfrak{g}$ es trivial. ■

Ejemplos: Los grupos algebraicos $\mathbb{G}_a^n = (k^n, +) \cong \mathbb{A}^n$, $\mathbb{G}_m^n = ((k^*)^n, \cdot)$, $GL_n(k)$, $PGL_n(k)$, etc. son paralelizables. Además, si A es una variedad abeliana (i.e., A grupo alg. irreducible proyectivo, ver §16, p. 55) entonces $T_A \cong \mathcal{O}_A^{\oplus \dim(A)}$ es trivial.

Obs (cultura general): Sea X var. alg. proyectiva suave e irreducible tq T_X es trivial. Si $\mathrm{car}(k) = 0$, entonces X es una variedad abeliana, pero no necesariamente si $\mathrm{car}(k) = p > 0$. Más detalles en "Varieties in positive characteristic with trivial tangent bundle" (Compositio Math., 1987) por Mehta & Srinivas.

Prop: Sea $V \cong k^{n+1}$ un k-ev y $\mathbb{P}(V) \cong \mathbb{P}^n$. Entonces, hay una sucesión exacta de fibrados vectoriales en $\mathbb{P}(V)$, llamada la sucesión exacta de Euler

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)} \hookrightarrow V \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)}(1) \twoheadrightarrow T_{\mathbb{P}(V)} \longrightarrow 0,$$

o equivalentemente,

$$0 \longrightarrow \Omega^1_{\mathbb{P}(V)} \hookrightarrow V \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)}(-1) \twoheadrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)} \longrightarrow 0.$$

Aquí, $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)}$ fibrado en rectas trivial y $V \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)}(1) \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)^{\oplus(n+1)}$.

Dem: En $V \cong \mathbb{A}^{n+1}$ con coord. $x_0, \dots, x_n$ tenemos a $\frac{\partial}{\partial x_0}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}$ generadores de $T_{\mathbb{A}^{n+1}}$. Sin embargo, si $f, g \in \mathcal{O}(\mathbb{A}^{n+1})$ homogéneos de grado d, entonces dado que $\frac{\partial f}{\partial x_i}, \frac{\partial g}{\partial x_i}$ homogéneos de grado $d-1$ $\overset{\text{Leibniz}}{\Longrightarrow}$ $\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{f}{g}\right)(\lambda x) = \frac{\lambda^{d+d-1}}{\lambda^{2d}} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{1}{\lambda} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{f}{g}\right)(x)$ y luego $\frac{\partial}{\partial x_i}$ no está bien definido en $\mathbb{P}^n$, pero $x_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ sí lo está! Más precisamente:

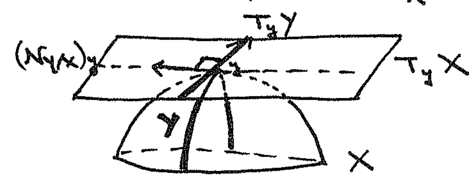
Sea $x = [\ell] \in \mathbb{P}(V)$ con $\ell \simeq k$ recta en V. Por definición, $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)}(-1)_{[\ell]} := \ell$ y luego $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)}(1)_{[\ell]} = \ell^*$ es el dual $\ell^* = \{\varphi : \ell \to k \text{ lineal}\}$ de ℓ. Construyamos $\Phi : V \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(1) \to T_{\mathbb{P}(V)}$ como sigue:
Para $v \in V$ y $\varphi \in \mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)}(1)_{[\ell]} = \ell^*$ definimos $\partial_{v \otimes \varphi} \in T_{\mathbb{P}(V),[\ell]}$ como la aplicación k-lineal que a $f \in \mathcal{O}_{\mathbb{P}(V),[\ell]}$ cociente de pol. homogéneos del mismo grado le asigna $\partial_{v\otimes\varphi}(f) := \varphi(X) \frac{\partial f}{\partial v}(X)$, que es independiente del vector $X \in \ell \setminus \{0\}$ (bien definido!).
Notar que Φ sobreyectivo, pues en $\mathcal{U}_0 = \{x_0 \neq 0\}$ consideramos $\varphi_0 = x_0 = 1$ y los $\frac{\partial}{\partial v} = \frac{\partial}{\partial x_i}$ con $v = e_i$ generan $T_{\mathcal{U}_0} \cong T_{\mathbb{A}^n}$. Similar para los otros $\mathcal{U}_i = \{x_i \neq 0\} \cong \mathbb{A}^n$ ✓

Luego, $L := \ker(\Phi)$ es un fibrado vectorial de rango $rg(L) = \dim(V) - \dim(\mathbb{P}(V)) = 1$, i.e., $L \in Pic(\mathbb{P}(V))$.
Finalmente, sea $s := \sum_{i=0}^{n} e_i \otimes e_i^*$ sección global nunca nula, y notamos $\Phi(s) = \sum_{i=0}^{n} x_i \frac{\partial}{\partial x_i} = 0$ pues $\sum_{i=0}^{n} x_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = df$ (Euler) es 0 para toda $f \in \mathcal{O}_{\mathbb{P}(V),[x]}$ cociente de pol. homog. del mismo grado!
$\Rightarrow \exists\, s \in H^0(\mathbb{P}(V), L)$ sección nunca nula, i.e., $L \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)}$ fibrado en rectas trivial. ■

Terminemos esta sección introduciendo la noción de fibrado normal:
Sea $Y \overset{i}{\hookrightarrow} X$ subvariedad suave (e irreducible) de X (que también lo es!). Entonces, para todo $y \in Y$ la aplicación lineal $d_y i : T_y Y \hookrightarrow T_y X \underset{dy}{=} (i^* T_X)_y \underset{dy}{=} (T_X|_Y)_y$ es inyectiva, y luego $di : T_Y \hookrightarrow T_X|_Y$ subfibrado.

Def: Dadas $Y \overset{i}{\hookrightarrow} X$ como en la discusión anterior, definimos el fibrado normal de Y en X como el cociente $N_{Y/X} = \mathrm{coker}(di) = (T_X|_Y)/T_Y$, de $rg(N_{Y/X}) = \dim(X) - \dim(Y) = \mathrm{codim}_X(Y)$.
Luego, hay una sucesión exacta

$$0 \to T_Y \hookrightarrow T_X|_Y \twoheadrightarrow N_{Y/X} \to 0$$



de fibrados vectoriales en Y. Equivalentemente, por dualidad:

$$0 \to N_{Y/X}^\vee \hookrightarrow \Omega_X^1|_Y \overset{{}^t di}{\twoheadrightarrow} \Omega_Y^1 \to 0,$$

donde $N_{Y/X}^\vee$ es el fibrado conormal de Y en X.

Construcción: Sea $E \to X$ fibrado vectorial de $rg(E) = r$ y $s \in H^0(X,E)\setminus\{0\}$ sección no-nula. En una trivialización $E|_{\mathcal{U}} \cong \mathcal{U} \times \mathbb{A}^r$, escogemos $(e_1, \dots, e_r)$ marco de referencia (i.e., $(e_1(x), \dots, e_r(x))$ base de $E_x \cong k^r$ $\forall x \in \mathcal{U}$) y escribimos $s = \sum_{i=1}^{r} f_i e_i$, con $f_i \in \mathcal{O}_X(\mathcal{U})$ regular. Luego, $V(s) = \{x \in X \text{ tq } s(x) = 0\} \subseteq X$ cerrado, cumple que $V(s)|_{\mathcal{U}} = V(f_1, \dots, f_r)$.
Luego, para $x \in V(s)$, definimos $d_x s : T_x X \to E_x$ como la aplicación k-lineal dada (en $\mathcal{U}$) por $d_x s := \sum_{i=1}^{r} d_x f_i \, e_i(x)$, la cual no depende de los f_i y e_i si $x \in V(s)$.
Terminología: Decimos que $s : X \to E$ es transversal a la sección nula si $d_x s : T_x X \twoheadrightarrow E_x$ es sobreyectiva $\forall x \in V(s)$. En part, $rg(E) \le \dim(X)$ en tal caso.

Teorema: Sea $E \to X$ fibrado vectorial de $rg(E) = r \le \dim(X) = n$ y sea $s \in H^0(X,E)\setminus\{0\}$.
Entonces:
1. s es transversal a la sección nula $\Leftrightarrow V(s) \subseteq X$ subvar. suave de $\dim(V(s)) = n - r$.
Más aún, en tal caso: $N_{V(s)/X} \cong E|_{V(s)}$.
2. Sup. $car(k) = 0$ y $M \subseteq H^0(X,E)$ globalmente generado (i.e., $ev_x : M \twoheadrightarrow E_x$, $s \mapsto s(x)$ es sobreyectivo $\forall x \in X$). Entonces, para $s \in M$ general la subvar. $V(s) \subseteq X$ es suave.

Dem: Para 1 consideramos $V(s)|_{\mathcal{U}} = V(f_1, \dots, f_r)$ como antes, y sup. que $s : X \to E$ es transversal a la sección nula $\Rightarrow$ los $d_x f_i$ son l.i., y luego existen $u_1, \dots, u_n$ coord. locales en $\mathcal{U}$ tq $u_1 = f_1, \dots, u_r = f_r \Rightarrow V(f_1, \dots, f_r)$ suave de dimensión $n-r$ (ver §17, p. 60) ✓ Recíprocamente, si $Y = V(s)$ es suave de $\dim(Y) = n - r$ entonces $\dim_k T_y Y = n - r$ $\forall y \in Y$, y $T_y Y \cong \ker(d_y s)$.
Luego, el Teo. del rango implica que $d_y s$ es sobreyectiva $\forall y \in Y$ ✓. Más aún, en tal caso:

$$E_y = \mathrm{Im}(d_y s) \cong T_y X / \ker(d_y s) \cong T_y X / T_y Y \underset{dy}{=} (N_{Y/X})_y \quad \forall y \in Y \iff N_{Y/X} \cong E|_Y.$$

Para 2 notamos que, por suavidad genérica, existe $\mathcal{U} \subseteq M$ abierto denso tq $\forall s \in \mathcal{U}$ se tiene que $V(s) \subseteq X$ es suave (mismo argumento usado en §22, p. 76). ■

Ejemplo Típico: Sup. $E = L_1 \oplus \dots \oplus L_r$ suma de fibrados en rectas. Si $s_i \in H^0(X, L_i)\setminus\{0\}$ sección no-nula tq $Y := V(s_1, \dots, s_r) \subseteq X$ suave (e irreducible) de $\mathrm{codim}_X(Y) = r$ (i.e., Y intersección completa)
$\Rightarrow N_{Y/X} \cong (L_1 \oplus \dots \oplus L_r)|_Y \cong L_1|_Y \oplus \dots \oplus L_r|_Y$ fibrado normal de Y en X.
En part, si $r = 1$ e $Y = V(s)$ hipersuperficie suave, entonces $N_{Y/X} \cong L|_Y$, con $L \cong \mathcal{O}_X(Y)$.

¡Atención! Por abuso de notación, a veces $\mathcal{O}_X(Y)|_Y \in Pic(Y)$ se escribe "$Y|_Y$" en algunos textos.