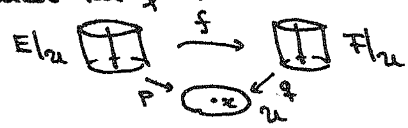
§24. Subfibrados y fibrados cocientes:

Durante esta sección, fijamos una variedad algebraica X.

<u>Recuerdo</u>: Sean $E \xrightarrow{p} X$ y $F \xrightarrow{q} X$ fibrados vectoriales de $\mathrm{rg}(E)=r$ y $\mathrm{rg}(F)=s$. Un <u>morfismo</u> de fibrados vectoriales entre E y F es $f: E \to F$ morfismo regular tal que:

① $q \circ f = p$.

② $f_x : E_x \cong k^r \to F_x \cong k^s$ es k-lineal $\forall x \in X$.



Denotamos $\ker(f) := \bigcup_{x\in X} \ker(f_x) \subseteq E$ e $\mathrm{Im}(f) = \bigcup_{x\in X} \mathrm{Im}(f_x) \subseteq F$.

$\boxed{\text{Ejercicio}}$ Dar un ejemplo de $f: E \to F$ tal que $\dim_k \ker(f_x)$ <u>no</u> sea constante en X.
(<u>Obs</u>: En términos sofisticados: "<u>Vect</u>(X) <u>no</u> es una categoría abeliana" !).

<u>Prop</u>: Sea $f: E \to F$ morfismo de fibrados vectoriales tal que $\mathrm{rg}(f) := \mathrm{rg}(f_x)$ es constante $\forall x \in X$. Entonces, $\ker(f)$ e $\mathrm{Im}(f)$ son fibrados vectoriales en X.

<u>Dem</u>: La afirmación es local en X, por lo que en una trivialización común de E y F podemos suponer que $E = X \times k^r$ y $F = X \times k^s$, y que f está dada por $(x,v) \mapsto (x, M(x)v)$ donde $M(x) \in M_{s\times r}(k)$. Sea $x_0 \in X$ fijo y escojamos subesp. complementarios:

$$E_{x_0} = \ker(f_{x_0}) \oplus G_{x_0} \quad \text{y} \quad F_{x_0} = \mathrm{Im}(f_{x_0}) \oplus H \qquad (*).$$

Dado que E y F están trivializados, $E \cong X \times E_{x_0}$ y $F \cong X \times F_{x_0}$ y luego $(*)$ da una descomposición de fibrados triviales en suma directa: $E = K \oplus G$ y $F = I \oplus H$.
Así, f está dada por la matriz por bloques

$$M(x) = \begin{array}{cc} \begin{array}{cc} K & G \end{array} & \\ \left(\begin{array}{c|c} A(x) & B(x) \\ \hline C(x) & D(x) \end{array}\right) & \begin{array}{c} I \\ H \end{array} \end{array} \quad \text{donde } M(x_0) = \left(\begin{array}{c|c} 0 & B(x_0) \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) \text{ y } B(x_0) \ \underset{\text{invertible}}{\overset{\mathrm{Im}(f_{x_0}) \cong E_{x_0}/\ker(f_{x_0})}{\downarrow}} .$$

En part, existe una vecindad abierta U de x_0 tal que $B(x)$ invertible $\forall x \in U$. Restringiéndonos a U, podemos suponer $B(x)$ invertible $\forall x \in X$. Por otra parte,
$\ker(f) = \{(u,v) \in K \oplus G \text{ tq } Au + Bv = 0,\ Cu + Dv = 0\} \Rightarrow v = -B^{-1}Au$ y $(C - DB^{-1}A)u = 0$.
Así, $\ker(f) \cong \{u \in K \text{ tq } (C - DB^{-1}A)u = 0\}$. Dado que $\dim_k \ker(f_x) = \dim_k \ker(f_{x_0}) = \mathrm{rg}(K)$ $\forall x \in X$, tenemos que $C - DB^{-1}A = 0$, i.e., $C = DB^{-1}A$.
$\Rightarrow \ker(f) = \{(u, -B^{-1}Au),\ u \in K\} \underset{\text{grafo!}}{\cong} K$ y luego $\ker(f)$ es un fibrado (loc.) trivial ✓
Similar, $\mathrm{Im}(f) = \{(Au + Bv, Cu + Dv) \text{ con } u \in K, v \in G\}$. Dado que $Cu + Dv = DB^{-1}(\underbrace{Au + Bv}_{w})$
$\Rightarrow \mathrm{Im}(f) \subseteq \{(w, DB^{-1}w),\ w \in I\} \cong I$. Como $\mathrm{rg}(f_x) = \mathrm{rg}(f_{x_0}) = \mathrm{rg}(I)$ $\forall x \in X$ obtenemos que $\mathrm{Im}(f) \cong I$ es un fibrado (localmente) trivial ✓ ∎

<u>Caso particular importante</u>: Sea $f: E \to F$ un morfismo de fibrados vectoriales.

① Si f es <u>inyectivo</u>: entonces $\mathrm{Im}(f) \cong E$ es un fibrado vectorial, y decimos que E es un <u>subfibrado</u> de F, y escribimos $0 \to E \xrightarrow{f} F$ o simplemente $E \subseteq F$.

② Si f es <u>sobreyectivo</u>: entonces $\ker(f)$ es un fibrado vectorial y es un subfibrado de E.

⚠ <u>Importante</u>: En términos de matrices de transición, si $E \overset{i}{\hookrightarrow} F$ es un subfibrado y si trivializamos E y F simultaneamente (eg. eligiendo una base local de $E|_U$ y completándola en una base de $F|_U$) obtenemos matrices de transición de F por bloques:

$$g_{ij} = \left(\begin{array}{c|c} a_{ij} & b_{ij} \\ \hline 0 & c_{ij} \end{array}\right) \quad \text{donde } a_{ij} \text{ matriz de transición de } E.$$

La condición de cociclo $g_{ij}\, g_{jk} = g_{ik}$ para F se separa en:
i) $a_{ij}\, a_{jk} = a_{ik}$ (cond. de cociclo de E)
ii) $a_{ij}\, b_{jk} + b_{ij}\, c_{jk} = b_{ik}$ (cond. mixta)
iii) $c_{ij}\, c_{jk} = c_{ik}$ ← Condición de cociclo de un fibrado vectorial Q de $\mathrm{rg}(Q) = \mathrm{rg}(F) - \mathrm{rg}(E)$!
El fibrado vectorial Q es el <u>fibrado cociente</u> $Q = F/E$ y se tiene una proyección natural $\pi: F \twoheadrightarrow Q$ sobreyectiva que cumple $\ker(\pi) \cong E$.

En otras palabras, tenemos una sucesión exacta de fibrados vectoriales en X:

$$0 \longrightarrow E \overset{i}{\hookrightarrow} F \overset{\pi}{\twoheadrightarrow} Q \longrightarrow 0 \qquad (S)$$

Observaciones útiles: ① $\det(g_{ij}) = \det(a_{ij})\det(c_{ij})$ implica que $\det(F) \cong \det(E) \otimes \det(Q)$ en $\mathrm{Pic}(X)$
② Si $L \in \mathrm{Pic}(X)$ tiene funciones de transición h_{ij} entonces (en una trivialización común) las matrices de transición de $F \otimes L$ son $g_{ij} \otimes h_{ij} = \begin{pmatrix} a_{ij}h_{ij} & b_{ij}h_{ij} \\ 0 & c_{ij}h_{ij} \end{pmatrix}$ y luego la sucesión

$$0 \to E \otimes L \hookrightarrow F \otimes L \twoheadrightarrow Q \otimes L \to 0 \qquad (S) \otimes L$$

es exacta. De manera similar, se prueba:
③ $\boxed{\text{Ejercicio}}$ La sucesión dual $0 \to Q^\vee \overset{{}^t\pi}{\hookrightarrow} F^\vee \overset{{}^t i}{\twoheadrightarrow} E^\vee \longrightarrow 0$ $(S)^\vee$ es exacta.
④ $\boxed{\text{Ejercicio}}$ Sea $\varphi : Y \to X$ un morfismo regular, entonces el pullback $\varphi^*(S)$ dado por
$0 \to \varphi^* E \hookrightarrow \varphi^* F \twoheadrightarrow \varphi^* Q \to 0$ es una sucesión exacta de fibrados vectoriales en Y.

Ejemplo: Sea $V \cong k^n$ un k-ev y $1 \leq r \leq n-1$. Recordemos (ver §20, pág 69) que en la variedad grassmanniana $G = Gr(r, V)$ se tiene el subfibrado tautológico $S \subseteq V_G$, donde $V_G = G \times V$ es el fibrado trivial de rango n y donde

$$S = \{([\Lambda], x) \in G \times V \text{ tal que } x \in \Lambda\} \xrightarrow{pr_1} G$$

con $rg(S) = r$. La construcción anterior nos permite definir el cociente $Q := V_G/S$, que es un fibrado vectorial en G de $rg(Q) = n - r$ llamado el cociente tautológico. Por definición, $Q_{[\Lambda]} \cong V/\Lambda$ y la sucesión

$$0 \longrightarrow S \hookrightarrow V_G \twoheadrightarrow Q \longrightarrow 0$$

es exacta.

Aplicación: Sea $E \to X$ fibrado vectorial de $rg(E) = r$ y sea $V \subseteq H^0(X, E)$ subev. de secciones globales tal que $\dim_k(V) = n > r$. Entonces, tal como para sistemas lineales de secciones de un fibrado en rectas (ver §22, pág 74), podemos definir una aplicación racional

$$\varphi_V : X \dashrightarrow Gr(n-r, V)$$

$$x \longmapsto K_x := \{s \in V \text{ tal que } s(x) = \underset{\substack{\uparrow \\ (0,\dots,0) \in E_x \cong k^r}}{0_{E_x}}\}$$

que está bien definida en $x \in X$ si y sólo si para $ev_x : V \to E_x$, $s \mapsto s(x)$ se tiene que $\dim_k(\ker(ev_x)) = n - r \iff rg(ev_x) = r \iff ev_x : V \twoheadrightarrow E_x$ sobreyectiva. Es decir, cuando $0 \to K_x = \ker(ev_x) \hookrightarrow V \longrightarrow E_x \to 0$ es una sucesión exacta de k-ev.

Def: Sea $E \to X$ un fibrado vectorial y $V \subseteq H^0(X, E)$ subev de dimensión finita. Decimos que V es globalmente generado si $ev_x : V \twoheadrightarrow E_x$ sobreyectiva $\forall x \in X$, ie, $\varphi_V : X \to Gr(n-r, V)$ es un morfismo regular, donde $r = rg(E)$ y $\dim_k(V) = n > r$. Más aún, decimos que E es globalmente generado si $\dim_k H^0(X, E)$ es finita y $H^0(X, E)$ es globalmente generado.

Obs: Sea $V \subseteq H^0(X, E)$ globalmente generado y $\varphi_V : X \to Gr(n-r, V)$ el morfismo regular asociado. Entonces, el pullback de la sucesión exacta tautológica en $G = Gr(n-r, V)$

$$0 \longrightarrow S \hookrightarrow V_G \twoheadrightarrow Q \longrightarrow 0 \quad , \text{ con } rg(Q) = r,$$

a X vía φ_V está dada por:

$$0 \longrightarrow K = \ker(ev) \hookrightarrow V_X \twoheadrightarrow E \longrightarrow 0.$$

En particular, tenemos que $\varphi_V^* Q \cong E$.

$\boxed{\text{Ejercicio}}$ Usar lo anterior para dar una nueva demostración del hecho que si $L \in \mathrm{Pic}(X)$ y $M \subseteq H^0(X, L)$ es un sistema lineal globalmente generado, entonces $\varphi_M^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}(M^*)}(1) \cong L$.
$\boxed{\text{Ejercicio útil}}$ Probar que si $L_1, \dots, L_r$ son fibrados en rectas glob. generados, $E = L_1 \oplus \dots \oplus L_r$ lo es también.