§23. Divisores de Weil y divisores de Cartier

En esta sección, veremos como el lenguaje de "divisores" (introducido por Dedekind y Weber) nos permite en muchos casos calcular $\mathrm{Pic}(X)$.

Recuerdo (ver §19): Sea X una variedad alg. irreducible y sea $Y \subseteq X$ una hipersuperficie irreducible. Supongamos que:

$$(*) \quad \mathrm{codim}_X(\mathrm{Sing}(X)) \geq 2 \quad (\text{eg. } X \text{ es normal}).$$

Luego, $X_{reg} \cap Y \neq \emptyset$ y podemos considerar $y \in Y$ punto suave en X. Así, existe una vecindad afín $\mathcal{U} \subseteq X$ de $y \in X$ y un elemento irreducible (ecuación local) $u \in \mathcal{O}(\mathcal{U})$ tal que $\mathcal{I}(Y \cap \mathcal{U}) = \langle u \rangle$. En particular, dado que $k(X) \cong k(\mathcal{U}) \cong \mathrm{Fr}(\mathcal{O}(\mathcal{U}))$, se tiene que toda función racional no-nula $f : X \dashrightarrow k$ puede escribirse como

$$f = \frac{g}{h} = \frac{u^a g'}{u^b h'} = u^m \frac{g'}{h'}, \quad \text{donde } m = a-b \in \mathbb{Z} \text{ y } g', h' \notin \mathcal{I}(Y \cap \mathcal{U}).$$

Además, $m \geq 0$ si $f \in \mathcal{O}_{X,y}$ es regular en $y \in X$.

Luego, definimos la <u>multiplicidad</u> de $f \in k(X) \setminus \{0\}$ a lo largo de Y como $\nu_Y(f) := m \in \mathbb{Z}$.

Decimos que f tiene un <u>cero</u> (resp. <u>polo</u>) a lo largo de Y si $\nu_Y(f) > 0$ (resp. $\nu_Y(f) < 0$).

La discusión anterior motiva la siguiente definición:

Def: Sea X variedad alg. irreducible normal (o tal que $(*)$). Un <u>divisor de Weil</u> es una expresión de la forma

$$D = \sum_{\text{finita}} n_Y \cdot Y, \quad \text{con } n_Y \in \mathbb{Z} \text{ e } Y \subseteq X \text{ hipersuperficie irreducible.}$$

En otras palabras, es una combinación lineal entera "formal" de hipersuperficies irreducibles de X. Denotamos por $\mathrm{WDiv}(X)$ al grupo abeliano de divisores de Weil en X.

Lema: Sea X variedad alg. irreducible normal (o tal que $(*)$) y sea $f \in k(X) \setminus \{0\}$. Entonces, existen <u>finitas</u> hipersuperficies irreducibles $Y \subseteq X$ tal que $\nu_Y(f) \neq 0$.

Dem: Sea $\mathcal{U} = \mathrm{Dom}(f) \subseteq X$ el abierto denso donde f es regular, y sea $Y \subseteq X$ hipersup. irreducible. Entonces:

<u>Caso 1</u>: $Y \subseteq X \setminus \mathcal{U} := Z$ cerrado, y luego tiene finitas componentes irreducibles ✓

<u>Caso 2</u>: $Y \cap \mathcal{U} \neq \emptyset$ y luego $\nu_Y(f) \geq 0$ por definición. Además, $\nu_Y(f) > 0$ implica que $Y \subseteq V(f)$, y este último tiene finitas componentes irreducibles ✓ ■

<u>Ejemplo principal</u>: Sea X variedad alg. irreducible normal y sea $f \in k(X) \setminus \{0\}$. Definimos el divisor de Weil asociado a f como

$$\mathrm{div}(f) := \sum_{\substack{Y \subseteq X \\ \text{hip. irred}}} \nu_Y(f) \cdot Y = \underbrace{\mathrm{div}(f)_+}_{\text{ceros de } f} - \underbrace{\mathrm{div}(f)_-}_{\text{polos de } f}$$

Notar que si $g \in k(X) \setminus \{0\}$, entonces $\mathrm{div}(fg) = \mathrm{div}(f) + \mathrm{div}(g)$ $\boxed{\text{Ejercicio}}$. Así, obtenemos un morfismo de grupos abelianos $\mathrm{div} : k(X)^* \longrightarrow \mathrm{WDiv}(X)$, cuya imagen es

$$\mathrm{PrWDiv}(X) := \{ D \in \mathrm{WDiv}(X) \text{ tq } \exists f \in k(X)^* \text{ con } D = \mathrm{div}(f) \}$$

es subgrupo (normal) de <u>divisores</u> (de Weil) <u>principales</u>.

⚠ <u>Importante</u>: Más generalmente, si $L \xrightarrow{p} X$ es un fibrado en rectas y $s : X \dashrightarrow L$ es una <u>sección racional</u> (ie, s aplicación racional tq $p \circ s = \mathrm{Id}_X$) no-nula, entonces podemos asociarle un divisor de Weil $\mathrm{div}(s)$ (que no necesariamente es principal si $L \ncong \mathcal{O}_X$):

s está dada por $\{ s_i \in k(\mathcal{U}_i) \}_{i \in I}$ donde $X = \bigcup_{i \in I} \mathcal{U}_i$ (trivialización de L) y donde

$$s_i = g_{ij} s_j \text{ en } \mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j \Rightarrow \nu_{Y|_{\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j}}(s_i) = \underbrace{\nu_{Y|_{\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j}}(g_{ij})}_{=0} + \nu_{Y|_{\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j}}(s_j) \text{ bien definido!}$$

Ejemplos: ① En $\mathbb{P}^n$, denotamos por $H_i = \{x_i = 0\} \cong \mathbb{P}^{n-1}$ hiperplano. Entonces, el divisor principal asociado a la función racional $f(x) = \frac{x_i}{x_j}$ es $\mathrm{div}(f) = H_i - H_j$. Por otra parte, el divisor asociado a la sección $s = x_i \in H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1))$ es $\mathrm{div}(s) = H_i$ que no es principal!

② En el cono $X = \{(x,y,z) \in \mathbb{A}^3 \text{ tq } z^2 = xy\}$, el divisor principal asociado a la función regular $f = x \in \mathcal{O}(X)$ es $\mathrm{div}(f) = 2L$, donde $L \subseteq X$ es la recta de ecuaciones $x = z = 0$.

Ejercicio importante: Sea X una variedad alg. suave e irreducible y sea $f \in k(X) \setminus \{0\}$. Probar que $f \in \mathcal{O}(X)$ es regular si y sólo si todos los coeficientes de $\mathrm{div}(f)$ son ≥ 0. Deducir que para todo $d \in \mathbb{N}^{\geq 1}$ el divisor dH_0 en $\mathbb{P}^n$ no es principal.

Terminología: Sea $Y \subseteq X$ una hipersuperficie irreducible, entonces el divisor de Weil $Y := 1 \cdot Y \in \mathrm{WDiv}(X)$ es llamado un divisor primo. Más generalmente, decimos que un divisor de Weil $D = \sum n_i Y_i$ es un divisor efectivo si $n_i \geq 0$ para todo i: "$D \geq 0$".

Es natural tratar de medir si todo divisor de Weil es principal o no:

Def: Sea X variedad alg. irreducible normal (o tal que (★)). Definimos el grupo de clases de X mediante

$$\mathrm{Cl}(X) := \mathrm{coker}(\mathrm{div}) = \mathrm{WDiv}(X) / \mathrm{PrWDiv}(X).$$

Más aún, decimos que $D_1, D_2 \in \mathrm{WDiv}(X)$ son linealmente equivalentes si existe $f \in k(X)^*$ tal que $D_1 - D_2 = \mathrm{div}(f)$ (ie, $[D_1] = [D_2]$ en $\mathrm{Cl}(X)$), y escribimos $D_1 \sim D_2$.

Ejemplos: ① En $\mathbb{P}^n$, $H_i \sim H_j$. Más generalmente, si $Y_d = V(P) \subseteq \mathbb{P}^n$ hipersuperficie irred. definida por P homogéneo de grado d, entonces $f(x) = P(x)/x_0^d \in k(\mathbb{P}^n)$ y tenemos $\mathrm{div}(f) = Y_d - dH_0$, ie, $Y_d \sim dH_0$. Luego, $\mathrm{Cl}(\mathbb{P}^n) = \mathbb{Z}[H_0]$ está generado por la clase del hiperplano H_0. Como $[dH_0] \neq 0 \ \forall d \in \mathbb{N}^{\geq 1}$, tenemos que $\mathrm{Cl}(\mathbb{P}^n) \cong \mathbb{Z}$.

② En $\mathbb{A}^n$, sea $Y \subseteq \mathbb{A}^n$ hipersuperficie irreducible. Entonces, $\mathcal{I}(Y) = \langle u \rangle$ es un ideal principal (primo) de $\mathcal{O}(\mathbb{A}^n)$. Por definición, $\nu_Y(u) = 1$ y $\mathrm{div}(u) = Y$. Luego, todo divisor de Weil de $\mathbb{A}^n$ es principal, ie, $\mathrm{Cl}(\mathbb{A}^n) = \{0\}$. Más generalmente, si X variedad alg. normal irreducible afín, entonces $\mathrm{Cl}(X) = \{0\} \iff \mathcal{O}(X)$ es un dominio de factorización única.

Prop: Sea X variedad alg. irreducible normal (o tal que (★)). Sea $Z \subsetneq X$ un cerrado propio y sea $\mathcal{U} = X \setminus Z$ abierto denso. Entonces:

① La restricción $\mathrm{Cl}(X) \xrightarrow{\text{res}} \mathrm{Cl}(\mathcal{U})$, $D = \sum n_i Y_i \mapsto D|_{\mathcal{U}} := \sum n_i (Y_i \cap \mathcal{U})$ es sobreyectiva, donde $n_i = 0$ en $D|_{\mathcal{U}}$ si $Y_i \cap \mathcal{U} = \emptyset$.

② Si $\mathrm{codim}_X(Z) \geq 2$, entonces $\mathrm{Cl}(X) \cong \mathrm{Cl}(\mathcal{U})$.

③ Si $Y_1, \ldots, Y_r$ son las componentes irreducibles de codimensión 1 de Z, entonces la sucesión

$$\bigoplus_{i=1}^{r} \mathbb{Z}[Y_i] \xrightarrow{i} \mathrm{Cl}(X) \xrightarrow{\text{res}} \mathrm{Cl}(\mathcal{U}) \to 0$$

es exacta. (subgrupo generado por $[Y_i]$)

Dem: Para ① notamos que si $Y \subseteq X$ divisor primo, entonces $Y \cap \mathcal{U}$ es vacío o bien un divisor primo en $\mathcal{U}$. Además, si $f \in k(X)^*$ con $\mathrm{div}(f) = \sum n_i Y_i$, entonces al considerar $f \in k(\mathcal{U})^*$ se tiene $\mathrm{div}(f) = \sum n_i (Y_i \cap \mathcal{U})$ en $\mathrm{WDiv}(\mathcal{U})$, y luego obtenemos un morfismo $\mathrm{Cl}(X) \xrightarrow{\text{res}} \mathrm{Cl}(\mathcal{U})$. Dicho morfismo es sobreyectivo, pues si $Y_{\mathcal{U}} \subseteq \mathcal{U}$ divisor primo entonces $Y_{\mathcal{U}} = Y|_{\mathcal{U}}$, con $Y = \overline{Y_{\mathcal{U}}} \subseteq X$ ✓

Para ② y ③ notamos que $\mathrm{WDiv}(X)$ y $\mathrm{Cl}(X)$ dependen sólo de subconjuntos cerrados de codimensión 1, y que el kernel de $\mathrm{Cl}(X) \twoheadrightarrow \mathrm{Cl}(\mathcal{U})$ está generado por los $Y_1, \ldots, Y_r$. ■

Ejemplos: ① Sea $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{A}^n$ abierto no-vacío, entonces $Cl(\mathcal{U})=\{0\}$.

② Sea $Y_d\subseteq\mathbb{P}^n$ hipersuperficie de grado d. Entonces, $Y_d\sim dH$ y la sucesión exacta $\mathbb{Z}[Y_d]\cong d\mathbb{Z}\to Cl(\mathbb{P}^n)\cong\mathbb{Z}\to Cl(\mathbb{P}^n\setminus Y_d)\to 0$ implica que $Cl(\mathbb{P}^n\setminus Y_d)\cong\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$.

③ En $\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1$, consideramos las rectas $L_2=\mathbb{P}^1\times\{pt\}$ y $L_1=\{pt\}\times\mathbb{P}^1$. Entonces, $(\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1)\setminus(L_1\cup L_2)=:\mathcal{U}$ es isomorfo a $\mathbb{A}^2$ $\Rightarrow\{0\}=Cl(\mathcal{U})\cong Cl(\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1)/(\mathbb{Z}[L_1]\oplus\mathbb{Z}[L_2])$, i.e., $Cl(\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1)$ está generado por $[L_1]$ y $[L_2]$ (Obs: veremos después que $Cl(\mathbb{P}^n\times\mathbb{P}^m)\cong\mathbb{Z}^2$).

④ Sea X var. alg. suave e irreducible y sea $Z\subseteq X$ subvar. suave e irreducible tal que $\operatorname{codim}_X(Z)\geq 2$. Si $\varepsilon:Bl_Z(X)\to X$ es el blow-up de $Z\subseteq X$ con divisor excepcional $E=\varepsilon^{-1}(Z)$, entonces $Cl(X)\cong Cl(X\setminus Z)\cong Cl(Bl_Z(X)\setminus E)$ y luego $Cl(Bl_Z(X))\cong Cl(X)\oplus\mathbb{Z}[E]$.

$\boxed{\text{Ejercicio}}$ Sea $X=\{(x,y,z)\in\mathbb{A}^3 \text{ tq } z^2=xy\}$ cono en $\mathbb{A}^3$ y $L=\{x=z=0\}$ recta en X. Probar que $Cl(X)\cong\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ generado por $[L]$ (que cumple $[2L]=0$ en $Cl(X)$).
[Indicación: Probar que L no es un divisor principal (cf. §17, pág 60) y que $X\setminus L\cong\mathcal{U}\subseteq\mathbb{A}^2$ abierto.]

Para relacionar los grupos $Cl(X)$ y $Pic(X)$ se requiere la noción de divisor de Cartier:

Def: Sea X una variedad alg. irreducible. Una familia $(\mathcal{U}_i,f_i)_{i\in I}$ dada por $\{\mathcal{U}_i\}_{i\in I}$ cubrimiento abierto de X y $f_i\in k(\mathcal{U})^*$ funciones racionales no-nulas es admisible si
$$f_i/f_j\in\mathcal{O}_X^*(\mathcal{U}_i\cap\mathcal{U}_j)\quad\forall i,j\in I,$$
i.e., f_i/f_j es una función regular que no se anula en $\mathcal{U}_i\cap\mathcal{U}_j$. Más aún, diremos que dos familias admisibles son equivalentes si su unión es admisible.
Un divisor de Cartier en X es $D=[(\mathcal{U}_i,f_i)_{i\in I}]$ una clase de equivalencia de familias admisibles, y denotamos por $Div(X)$ al conjunto de divisores de Cartier en X.

⚠ Importante: Si $D=[(\mathcal{U}_i,f_i)_{i\in I}]$ es un divisor de Cartier y $\bigcup_{j\in J}V_j=X$ cubrimiento abierto de X, entonces $(\mathcal{U}_i,f_i)_{i\in I}\sim(\mathcal{U}_i\cap V_j,f_i|_{\mathcal{U}_i\cap V_j})_{(i,j)\in I\times J}$. En particular, siempre podemos suponer que dos divisores de Cartier están definidos en el mismo cubrimiento. Con ello, observamos que $Div(X)$ es un grupo abeliano:

Dados $D=[(\mathcal{U}_i,f_i)]$, $D'=[(\mathcal{U}_i,g_i)]$ en $Div(X)$, definimos

i) $-D:=[(\mathcal{U}_i,1/f_i)]$.
ii) $D+D':=[(\mathcal{U}_i,f_ig_i)]$.
iii) $0:=[(X,1)]$. $\boxed{\text{Ejercicio}}$ $D=0\iff f_i\in\mathcal{O}_X^*(\mathcal{U}_i)\ \forall i\in I$.

$\Big\}$ $Div(X)\cong\Gamma(X,\mathcal{K}_X^*/\mathcal{O}_X^*)$ ¡haz cociente!

Más aún, decimos que D es un divisor efectivo si $f_i\in\mathcal{O}_X(\mathcal{U}_i)$ es regular $\forall i\in I$: $D\geq 0$.

Def: Sea X una variedad alg. irreducible y $D=[(\mathcal{U}_i,f_i)_{i\in I}]$ un divisor de Cartier. Diremos que D es un divisor (de Cartier) principal si $D=[(X,f)]$ para cierta $f\in k(X)^*$, y denotamos por $PDiv(X)$ al subgrupo (normal) de divisores principales. Más aún, si $D'\in Div(X)$, decimos que D y D' son linealmente equivalentes si $D-D'$ es un divisor principal y en tal caso escribimos $D\sim D'$.

Teorema: Sea X una variedad alg. irreducible normal (o tal que (✱)). Entonces, hay un morfismo de grupos inyectivo $\varphi:Div(X)\hookrightarrow WDiv(X)$ que además cumple que la imagen de un divisor principal es principal, i.e., $\varphi(PDiv(X))\subseteq PrWDiv(X)$.
Más aún, si X es suave entonces $Div(X)\cong WDiv(X)$.

Dem: Sea $D=[(\mathcal{U}_i,f_i)_{i\in I}]\in Div(X)$ un divisor de Cartier. Consideremos $\widehat{D}\in WDiv(X)$

divisor de Weil, definido por $\hat{D} := \sum_{Y\subseteq X} n_Y \cdot Y$ donde $n_Y := \nu_Y(f_i)\in\mathbb{Z}$ para cualquier $i\in I$ tq $Y\cap\mathcal{U}_i\neq\emptyset$ (indep. de $i\in I$ pues $f_i/f_j\in\mathcal{O}_X^*(\mathcal{U}_i\cap\mathcal{U}_j)$). Obtenemos así $\varphi:\mathrm{Div}(X)\to\mathrm{WDiv}(X),\ D\mapsto\hat D$.
Más aún, si $D=[(X,f)]$ es principal, entonces $\hat D = \mathrm{div}(f)$ es principal ✓ Por otro lado, (*) implica que si $\nu_Y(f_i)=0\ \forall Y\subseteq X$ divisor primo $\Rightarrow f_i\in\mathcal{O}_X^*(\mathcal{U}_i)$, ie, $D=0$ en $\mathrm{Div}(X)$ ✓
Finalmente, si X es suave y $Y\subseteq X$ divisor primo: Dado que $\mathcal{O}_{X,x}$ es factorial $\forall x\in X$, existe un cubrimiento abierto $\{\mathcal{U}_i\}_{i\in I}$ de X tq $\mathcal{I}(Y\cap\mathcal{U}_i)=\langle f_i\rangle$ ideal principal. Así, el divisor de Cartier $D_Y=[(\mathcal{U}_i,f_i)]$ verifica $\varphi(D_Y)=Y$. En part, todo divisor de Weil efectivo es de Cartier. Por otro lado, todo divisor de Weil es diferencia de divisores de Weil efectivos. ■

Ejercicio Sea $X=\{(x,y,z)\in\mathbb{A}^3$ tq $z^2=xy\}$ cono y $L=\{x=z=0\}$ recta en X. Probar que $L\in\mathrm{WDiv}(X)$ no es de Cartier (ie, no es "localmente principal"), pero $2L$ sí es de Cartier.

Obs: Una variedad alg irreducible X es localmente factorial si $\mathcal{O}_{X,x}$ es factorial $\forall x\in X$ (eg. X suave). En tal caso, $\mathrm{Div}(X)\cong\mathrm{WDiv}(X)$. Más generalmente, X es $\mathbb{Q}$-factorial si para todo $D\in\mathrm{WDiv}(X)$ existe $m=m(D)\in\mathbb{N}^{\geq 1}$ tal que mD es de Cartier.

Construcción ($\mathcal{O}_X(D)$ y $s_D: X\dashrightarrow\mathcal{O}_X(D)$):
Sea X var. alg. irreducible y $D=[(\mathcal{U}_i,f_i)_{i\in I}]\in\mathrm{Div}(X)$ divisor de Cartier. En $\mathcal U_i\cap\mathcal U_j$ definimos $g_{ij}:=f_i/f_j\in\mathcal{O}_X^*(\mathcal U_i\cap\mathcal U_j)$. Entonces, $g_{ij}\,g_{jk}=g_{ik}$ (cond. de cociclo) y luego D define un fibrado en rectas $\mathcal{O}_X(D)\in\mathrm{Pic}(X)$.
Por otro lado, recordemos que una sección racional de $L=\mathcal O_X(D)$ es $s: X\dashrightarrow \mathcal O_X(D)$ dada por $\{s_i\in k(\mathcal U_i)\}_{i\in I}$ con $s_i=g_{ij}s_j$ en $\mathcal U_i\cap\mathcal U_j$. Luego, los $s_i := f_i\in k(\mathcal U_i)$ definen tautológicamente una sección racional $s_D: X\dashrightarrow \mathcal O_X(D)$.

Teorema: Sea X variedad alg. irreducible. Entonces, $\pi:\mathrm{Div}(X)\to\mathrm{Pic}(X),\ D\mapsto\mathcal O_X(D)$ induce un isomorfismo $\hat\pi:\mathrm{Div}(X)/\mathrm{PDiv}(X)\xrightarrow{\cong}\mathrm{Pic}(X)$. En part, $D_1\sim D_2\iff\mathcal O_X(D_1)\cong\mathcal O_X(D_2)$.

Dem: Si $D=[(X,f)]$ es principal, entonces $g_{ij}=1$, ie, $\mathcal O_X(D)\cong\mathcal O_X$ es trivial en $\mathrm{Pic}(X)$.
$\Rightarrow \pi$ induce $\hat\pi:\mathrm{Div}(X)/\mathrm{PDiv}(X)\to\mathrm{Pic}(X),\ [D]\mapsto\mathcal O_X(D)$. Veamos que:
i) $\hat\pi$ inyectiva: Sea $D=[(\mathcal U_i,f_i)_{i\in I}]\in\mathrm{Div}(X)$ tal que $\mathcal O_X(D)\cong\mathcal O_X$ es trivial. Entonces, existe $s\in H^0(X,\mathcal O_X(D))$ sección que no se anula nunca, ie, está dada por $\{s_i\}_{i\in I}$ con $s_i\in\mathcal O_X^*(\mathcal U_i)$ tq $s_i=g_{ij}s_j \underset{\text{def}}{=} \frac{f_i}{f_j}s_j$ en $\mathcal U_i\cap\mathcal U_j \Rightarrow f:=\frac{f_i}{s_i}=\frac{f_j}{s_j}$ define una función racional $f\in k(X)^*$ que (por construcción) verifica $[(X,f)]=D$, ie, D es principal ✓
ii) $\hat\pi$ sobreyectiva: Sea $L\in\mathrm{Pic}(X)$ dado por funciones de transición $g_{ij}\in\mathcal O_X^*(\mathcal U_i\cap\mathcal U_j)$ en una trivialización $\{\mathcal U_i\}_{i\in I}$. Fijamos un índice $k\in I$ y definimos $f_i:=g_{ik}\in k(\mathcal U_i)^*$. Consideramos $D=[(\mathcal U_i,f_i)_{i\in I}]$ divisor de Cartier, con $\mathcal O_X(D)$ def. por $h_{ij}=f_i/f_j=g_{ik}/g_{jk}\overset{\text{cociclo}}{=}g_{ij}$, ie, $\mathcal O_X(D)\cong L$ ■

Resumen: Sea X una variedad alg. irreducible normal (o tal que (*)). Entonces:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal O_X(D) & \mathrm{Pic}(X)=\{\text{fibr. en rectas}\}/\text{isom.} \arrow[r, "\cong"] & \{\text{Haces invertibles}\} \\
& & L \longmapsto \mathcal L,\ \text{con } \mathcal L(\mathcal U):=H^0(\mathcal U, L_{\mathcal U}) \\
{[D]} \arrow[uu, mapsto] & \mathrm{Div}(X)/\mathrm{PDiv}(X) \arrow[uu, "\cong"] \arrow[r, hook, "(**)"] & Cl(X):=\mathrm{WDiv}(X)/\mathrm{PrWDiv}(X) \\
\Gamma(X,\mathcal K_X^*/\mathcal O_X^*)\cong & \mathrm{Div}(X)=\{\text{Div. de Cartier}\} \arrow[u, two heads] \arrow[r, hook, "(**)"] & \mathrm{WDiv}(X)=\{\text{Div. de Weil}\} \arrow[u, two heads]
\end{tikzcd}$$

$$D=[(\mathcal U_i,f_i)]\longmapsto\hat D=\sum\nu_Y(f_i)\,Y$$

Más aún, si X es suave (o localmente factorial) entonces (**) son isomorfismos.

Terminemos la sección con algunas observaciones importantes, ejemplos y aplicaciones de lo anterior:

<u>Observaciones importantes</u>: Sean X e Y variedades alg. irreducibles.

① Si $\varphi : Y \to X$ morfismo regular y $D = [(\mathcal{U}_i, f_i)_{i\in I}] \in \mathrm{Div}(X)$ divisor de Cartier. Entonces, podemos considerar el pullback $\varphi^* \mathcal{O}_X(D) \in \mathrm{Pic}(Y)$ como fibrado en rectas. Por otro lado, la familia $(\varphi^{-1}(\mathcal{U}_i), \varphi^*(f_i))_{i\in I}$ define un divisor de Cartier $\varphi^* D \in \mathrm{Div}(Y)$ en Y siempre y cuando $\varphi^*(f_i) \underset{\text{def}}{=} f_i \circ \varphi \neq 0$ en $\varphi^{-1}(\mathcal{U}_i)$. Esto último ocurre, por ejemplo, si φ es dominante (pues $\varphi^* : k(X) \hookrightarrow k(Y)$ en ese caso). Además, por construcción, si $\varphi^* D$ está bien definido entonces $\varphi^* \mathcal{O}_X(D) \cong \mathcal{O}_Y(\varphi^* D)$ en $\mathrm{Pic}(Y)$.

② Históricamente, si $D = [(\mathcal{U}_i, f_i)_{i\in I}] \in \mathrm{Div}(X)$ divisor de Cartier, entonces el k-ev dado por $H^0(X, \mathcal{O}_X(D))$ es llamado el <u>espacio de Riemann-Roch</u> de D (pues dicho Teorema busca calcular $\dim_k H^0(X, \mathcal{O}_X(D))$ o dar estimaciones): Notar que si $s \in H^0(X, \mathcal{O}_X(D)) \setminus \{0\}$ está dada por las $\{s_i\}_{i\in I}$ con $s_i \in \mathcal{O}_X(\mathcal{U}_i)$ tq $s_i = g_{ij} s_j \underset{\text{def}}{=} \frac{f_i}{f_j} s_j$ en $\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j \Rightarrow f := \frac{s_i}{f_i} = \frac{s_j}{f_j} \in k(X)^*$ es una función racional en X. Más aún, se tiene $f = s/s_D$ (cf. pág 81).
Sup. que X es normal (o tq (*)), entonces $\mathrm{Div}(X) \hookrightarrow \mathrm{WDiv}(X)$, $D \mapsto \hat{D} := D$ inyectivo, y notamos que $\mathrm{div}(f) = \mathrm{div}(s) - \mathrm{div}(s_D) = \mathrm{div}(s) - D$. Así, $D \sim \mathrm{div}(s) \geq 0$ y en particular $\mathcal{O}_X(D) \cong \mathcal{O}_X(\mathrm{div}(s))$. Recíprocamente, si $D \sim D'$ entonces existe $f \in k(X)^*$ tq $D' - D = \mathrm{div}(f)$ $\Rightarrow s := f s_D$ es una sección racional de $\mathcal{O}_X(D)$ tal que $\mathrm{div}(s) = \mathrm{div}(f) + \mathrm{div}(s_D) = D'$.
Además, s es <u>regular</u> si y sólo si $\mathrm{div}(s) \geq 0$ es efectivo. En resumen:

$$H^0(X, \mathcal{O}_X(D)) \cong \{ f \in k(X)^* \text{ tal que } \mathrm{div}(f) + D \geq 0 \} \cup \{0\}.$$

<u>Caso particular importante</u>: si además X es <u>proyectivo</u>, entonces para $f, g \in k(X)^*$ se tiene que $\mathrm{div}(f) = \mathrm{div}(g) \Leftrightarrow \mathrm{div}(f/g) = 0 \Leftrightarrow f/g$ regular (constante!) no-nula $\Leftrightarrow f = \lambda g$ cierto $\lambda \in k^*$. Luego, $\mathbb{P}H^0(X, \mathcal{O}_X(D)) \cong \{ E \geq 0 \text{ efectivo tal que } E \sim D\}$ en este caso. Clásicamente, este último conjunto es denotado $|D|$ y se llama el <u>sistema lineal</u> del divisor D.

③ Sup. que $Y \overset{i}{\hookrightarrow} X$ divisor primo. Entonces, hay una sucesión exacta de $\mathcal{O}_X$-módulos

$$0 \longrightarrow \mathcal{I}_Y \longrightarrow \mathcal{O}_X \longrightarrow \mathcal{O}_Y \longrightarrow 0$$

donde $\mathcal{O}_Y := i_* \mathcal{O}_Y$ por abuso de notación (cf. §7, pág 24). Si X es <u>suave</u> podemos considerar $D = [(\mathcal{U}_i, f_i)_{i\in I}]$ divisor de Cartier asociado a Y, donde $\mathcal{I}(\mathcal{U}_i \cap Y) = \langle f_i \rangle$. Entonces, el fibrado en rectas $\mathcal{O}_X(D) \cong \mathcal{O}_X(Y)$ tiene funciones de transición $g_{ij} := f_i / f_j$ y su dual $L := \mathcal{O}_X(-D)$ tiene funciones $h_{ij} = 1/g_{ij} = f_j / f_i$.
$\Rightarrow$ Una sección (local) $s \in \mathcal{L}(\mathcal{U}) := H^0(\mathcal{U}, \mathcal{O}_X(-D)|_{\mathcal{U}})$ está dada por $\{s_i\}_{i\in I}$ con $s_i \in \mathcal{O}_X(\mathcal{U} \cap \mathcal{U}_i)$ tq $s_i = h_{ij} s_j = \frac{f_j}{f_i} s_j$, y luego s define $f_s := s_i f_i = s_j f_j$ <u>regular</u> que se anula en Y (i.e., $f_s \in \mathcal{I}_Y(\mathcal{U})$). Así, obtenemos un morfismo inyectivo de $\mathcal{O}_X$-módulos $\mathcal{L} \hookrightarrow \mathcal{O}_X$, $s \mapsto f_s$ cuya imagen es $\mathcal{I}_Y$. En part, si identificamos $\mathcal{I}_Y \cong \mathcal{L} \cong \mathcal{O}_X(-D)$ obtenemos la sucesión exacta de $\mathcal{O}_X$-módulos

$$0 \to \mathcal{O}_X(-D) \to \mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_D \to 0.$$

Más generalmente, si $D = \sum m_i Y_i$ divisor <u>efectivo</u> entonces se tiene la misma sucesión exacta, pero $\mathcal{O}_D$ es el cociente de $\mathcal{O}_X$ por el ideal de funciones regulares que se anulan en Y_i con multiplicidad $\geq m_i$ (cf. $H^0(X, \mathcal{O}_X(-D)) \cong \{ f \in k(X)^* \text{ tq } \mathrm{div}(f) \geq D \} \cup \{0\}$ por ②).

<u>Ejemplos y cálculos explícitos</u>: Podemos reinterpretar los ejemplos de las páginas 79 y 80:

① Sea $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{A}^n$ abierto no-vacío, entonces $\mathrm{Pic}(\mathcal{U}) \cong \{0\}$. (cf. Teorema de Quillen-Suslin 1976).

② $\mathrm{Pic}(\mathbb{P}^n) \cong \mathrm{Cl}(\mathbb{P}^n) = \mathbb{Z}[H] \cong \mathbb{Z}$, donde $H \subseteq \mathbb{P}^n$ hiperplano. Explícitamente, para $d \in \mathbb{N}^{\geq 1}$, si $s \in H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d)) \setminus \{0\}$ define $Y_d = V(s) \subseteq \mathbb{P}^n$ hipersup. de grado $d \Rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(Y_d) \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d)$ y luego $\mathrm{Pic}(\mathbb{P}^n)$ está generado por $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(H) \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)$. Más aún, el sistema lineal

$$|Y_d| = \{ E \geq 0 \text{ tq } E \sim Y_d \} \cong \mathbb{P}H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d))$$

parametriza hipersuperficies de grado d en $\mathbb{P}^n$. Además, $\mathrm{Pic}(\mathbb{P}^n \setminus Y_d) \cong \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$.

③ Sea $S = \mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1$ con coord. $([x_0,x_1],[y_0,y_1])$ y consideramos los fibrados en rectas $L_i := pr_i^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1)$
$\Rightarrow H^0(S,L_1)\cong \mathrm{Vect}_k\langle x_0,x_1\rangle$ y $H^0(S,L_2)\cong\mathrm{Vect}_k\langle y_0,y_1\rangle$. En part, $L_i^{\otimes m}\neq 0$ en $\mathrm{Pic}(S)$ (pues $H^0(S,\mathcal{O}_S)\cong k$). Además, si $s_i\in H^0(S,L_i)\setminus\{0\}$ entonces $V(s_1)=\{pt\}\times\mathbb{P}^1$ y $V(s_2)=\mathbb{P}^1\times\{pt\}$ son rectas que generan $\mathrm{Cl}(\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1)\cong\mathrm{Pic}(\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1)$ (ver Ejemplo ③ en pág 81). Luego, tenemos que $\mathbb{Z}^2\xrightarrow{\sim}\mathrm{Pic}(\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1)$, $(a,b)\mapsto\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1}(a,b):=pr_1^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(a)\otimes pr_2^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(b)$ es un isomorfismo.

$\boxed{\text{Ejercicio}}$ Probar que $\mathrm{Pic}(\mathbb{P}^n\times\mathbb{P}^m)\cong\mathbb{Z}^2$.

④ Sea X var. alg. suave e irreducible, y sea $Z\subseteq X$ subvar. suave e irreducible tal que $\mathrm{codim}_X(Z)\geq 2$. Si $\varepsilon:\tilde{X}=\mathrm{Bl}_Z(X)\to X$ es el blow-up de $Z\subseteq X$ con divisor excepcional $E=\varepsilon^{-1}(Z)$, entonces el Ejemplo ④ en pág. 81 implica que el morfismo

$$\mathrm{Pic}(X)\oplus\mathbb{Z}\twoheadrightarrow\mathrm{Pic}(\tilde{X}),\ (L,m)\mapsto\varepsilon^*L\otimes\mathcal{O}_{\tilde{X}}(mE)$$

es sobreyectivo. De hecho, es un isomorfismo pues $\forall m\in\mathbb{N}^{\geq1}$ se tiene que $\mathcal{O}_{\tilde{X}}(mE)\neq 0$ en $\mathrm{Pic}(\tilde{X})\cong\mathrm{Cl}(\tilde{X})$: si $g\in k(\tilde{X})^*$ es tal que $\mathrm{div}(g)=mE$ en $\mathrm{WDiv}(\tilde{X})$, entonces el isom. $\varepsilon^*: k(X)\xrightarrow{\sim}k(\tilde{X})$ permite considerar $G:=(\varepsilon^*)^{-1}(g)\in k(X)^*$ que cumple $\mathrm{div}(G)=0$ en $\mathrm{WDiv}(X)$
$\Rightarrow G$ es regular y no se anula nunca, y luego $g=\varepsilon^*(G)=G\circ\varepsilon$ también, ie, $m=0$.
Así, tenemos que $\mathrm{Pic}(\tilde{X})=\varepsilon^*\mathrm{Pic}(X)\oplus\mathbb{Z}\,\mathcal{O}_{\tilde{X}}(E)$. Por ejemplo, $\mathrm{Pic}(\mathrm{Bl}_{p_1,\dots,p_r}(\mathbb{P}^2))\cong\mathbb{Z}^{r+1}$.

⑤ Sea X var. alg. proyectiva suave e irreducible. Sup. que existe $\mathcal{U}\subseteq X$ abierto no-vacío tq $\mathcal{U}\cong V\subseteq\mathbb{A}^n$ abierto (ie, X es racional: ver §13, pág 46) y sup. que $D:=X\setminus\mathcal{U}$ es una hipersuperficie irreducible. Entonces, la sucesión exacta

$$\mathbb{Z}\,\mathcal{O}_X(D)\xrightarrow{i}\mathrm{Pic}(X)\xrightarrow{res}\underbrace{\mathrm{Pic}(\mathcal{U})}_{\cong\{0\}}\longrightarrow 0$$

implica que $\mathrm{Pic}(X)$ está generado por $\mathcal{O}_X(D)$. Más aún, dado que X es proyectiva existe $L\in\mathrm{Pic}(X)$ muy amplio y en particular $L^{\otimes m}\neq 0$ en $\mathrm{Pic}(X)$ $\forall m\in\mathbb{N}^{\geq1}$. Así, $\mathrm{Pic}(X)\cong\mathbb{Z}$ es cíclico infinito generado por $\mathcal{O}_X(D)$. En part, $\mathcal{O}_X(D)$ es amplio!

$\boxed{\text{Ejercicio}}$ a) Sea $X=\{(x,y,z)\in\mathbb{A}^3$ tq $z^2=xy\}$ cono en $\mathbb{A}^3$. Probar que $\mathrm{Pic}(X)\cong\{0\}$.
b) Probar que $\mathrm{Pic}(\mathrm{Gr}(k,n))\cong\mathbb{Z}$.
c) Sea $Q^n\subseteq\mathbb{P}^{n+1}$ cuádrica suave de dimensión $n\geq3$. Probar que $\mathrm{Pic}(Q^n)\cong\mathbb{Z}$. ¿$Q^1$ y Q^2?
[Indicación: En a) usar $\mathrm{Pic}(X)\hookrightarrow\mathrm{Cl}(X)\cong\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. En b) y c) usar Ejemplo ⑤ y §13, pág 46.]

Aplicaciones geométricas:

① Automorfismos de $\mathbb{P}^n$: Veamos que $\mathrm{Aut}(\mathbb{P}^n)\cong\mathrm{PGL}_{n+1}(k)$. Sea $f:\mathbb{P}^n\to\mathbb{P}^n$ automorfismo (birregular). Por un lado, f induce $f^*:\mathrm{Pic}(\mathbb{P}^n)\xrightarrow{\sim}\mathrm{Pic}(\mathbb{P}^n)$ automorfismo de $\mathrm{Pic}(\mathbb{P}^n)\cong\mathbb{Z}$ y luego $f^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)=\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(\pm1)$ es un generador. Por otro lado, f induce un isomorfismo de k-ev $\Gamma(f): H^0(\mathbb{P}^n,\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1))\xrightarrow{\sim}H^0(\mathbb{P}^n,f^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1))$ y luego, dado que $H^0(\mathbb{P}^n,\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1))\cong k^{n+1}$ y $H^0(\mathbb{P}^n,\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-1))=\{0\}$, necesariamente $f^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)=\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)$.
Finalmente, vimos en §22 pág 74 que f está determinado por $L=f^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)=\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)$, y luego $f=\varphi_L$ es lineal! Así, $\mathrm{GL}_{n+1}(k)\twoheadrightarrow\mathrm{Aut}(\mathbb{P}^n)$ y por ende $\mathrm{Aut}(\mathbb{P}^n)\cong\mathrm{PGL}_{n+1}(k)$.

② Divisores en curvas suaves: Sean C y C' curvas alg. proyectivas suaves e irreducibles. Así, un divisor de Weil en C es $D=\sum_{i=1}^r n_i\,p_i$ con $p_i\in C$ punto y $n_i\in\mathbb{Z}$. Definimos el grado de D como $\deg(D):=\sum_{i=1}^r n_i\in\mathbb{Z}$.

Por otro lado, si $f:C\to C'$ morfismo regular sobreyectivo, definimos el grado de f como el grado $[k(C):k(C')]$ de la extensión de cuerpos $f^*:k(C')\hookrightarrow k(C)$ (ie, como la $\dim_{k(C')}(k(C))=:\deg(f)<+\infty$).

El siguiente hecho algebraico (ver Hartshorne, Ch. II, Prop 6.9) dice que el número de puntos de una fibra $f^{-1}(y)$, contados con multiplicidad, es constante:

[<u>Hecho</u>: $\deg(f^*D) = \deg(f)\deg(D)$ para todo divisor $D \in \mathrm{Div}(C') \cong \mathrm{WDiv}(C')$.]

[<u>Prop</u>: Para todo $D \in \mathrm{PDiv}(C)$ se tiene $\deg(D) = 0$. En particular, deg induce un morfismo de grupos sobreyectivo $\deg : \mathrm{Pic}(C) \cong \mathrm{Div}(C)/\mathrm{PDiv}(C) \twoheadrightarrow \mathbb{Z}$, $L \cong \mathcal{O}_C(D) \mapsto \deg(L) := \deg(D)$

<u>Dem</u>: Sea $f : C \dashrightarrow k \cong \mathbb{A}^1 \cong \mathcal{U}_0 \subseteq \mathbb{P}^1$ y $F : C \dashrightarrow \mathbb{P}^1$ la aplicación racional inducida. Dado que C es suave tenemos que $F : C \to \mathbb{P}^1$ es regular (ver §17, pág 60). Veamos que $\deg(\mathrm{div}(f))$ es 0: si f es constante, $\mathrm{div}(f) = 0$ y $\deg(\mathrm{div}(f)) = 0$ ✓ Sino, F es sobreyectivo y basta notar que $\mathrm{div}(f) = F^*(0-\infty)$ ($\underset{\text{Hecho}}{\Rightarrow} \deg(\mathrm{div}(f)) = \deg(F)\cdot\deg(0-\infty) = \deg(F)\cdot 0 = 0$ ✓): sean $\mathcal{U}_i = \{x_i \neq 0\} \cong \mathbb{A}^1$ $(i = 0,1)$ abiertos estándar de $\mathbb{P}^1$. Entonces, el divisor de Cartier 0 en $\mathbb{P}^1$ está definido por la familia admisible $((\mathcal{U}_0, x_1/x_0), (\mathcal{U}_1, 1))$ y luego F^*0 está definido por $((F^{-1}(\mathcal{U}_0), f), (F^{-1}(\mathcal{U}_1), 1))$. Del mismo modo, $F^*\infty = ((F^{-1}(\mathcal{U}_0), 1), (F^{-1}(\mathcal{U}_1), 1/f))$ y luego $F^*(0-\infty)$ está dado por $((F^{-1}(\mathcal{U}_0), f), (F^{-1}(\mathcal{U}_1), f))$, ie, por $\mathrm{div}(f)$. ∎

<u>Consecuencias</u>: ⓐ $\deg : \mathrm{Pic}(C) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}$ isomorfismo $\Leftrightarrow C \cong \mathbb{P}^1$:

En efecto, si deg es inyectivo y $p, q \in C$ distintos, entonces $\deg(\mathcal{O}_C(p-q)) = 0$ implica que $p \sim q$, ie, existe $f : C \dashrightarrow k$ no-nula tq $\mathrm{div}(f) = p - q$. Como antes, $F : C \to \mathbb{P}^1$ verifica $F^*0 = p$ y $F^*\infty = q$ $\underset{\text{Hecho}}{\Rightarrow} \underbrace{\deg(F^*0)}_{=1} = \deg(F)\underbrace{\deg(0)}_{=1} \Rightarrow \deg(F) = 1$. $\Leftrightarrow k(C) \cong k(\mathbb{P}^1) \Leftrightarrow C \cong \mathbb{P}^1$ ✓

Así, si consideramos $\mathrm{Pic}^0(C) := \ker(\deg)$ entonces para $C \not\cong \mathbb{P}^1$ y $p_0 \in C$ fijo, la <u>aplicación de Abel-Jacobi</u> $\varphi : C \hookrightarrow \mathrm{Pic}^0(C)$, $p \mapsto \mathcal{O}_C(p - p_0)$ es inyectiva!

ⓑ Dado que C es proyectiva, para $L \cong \mathcal{O}_C(D)$ en $\mathrm{Pic}(C)$ tenemos que

$$|D| = \{E \geq 0 \text{ efectivo tq } D \sim E\} \cong \mathbb{P}H^0(X, L).$$

Luego, si L es globalmente generado (resp. muy amplio) entonces $\dim_k H^0(X,L) \geq 1$ (resp. ≥ 2) y existe $E \geq 0$ (resp. > 0) tal que $E \sim D$ y por ende $\deg(L) = \deg(D) = \deg(E) \geq 0$ (resp. > 0). Más aún, dado que $\deg(L^{\otimes m}) = m\deg(L)$, tenemos que $\deg(L) > 0$ si L es <u>amplio</u>.

③ <u>Equivalencia numérica y grupo de Néron-Severi</u>: Sea X var. alg. <u>proyectiva</u> irreducible. Dados $D \in \mathrm{Div}(X)$ divisor de Cartier y $C \subseteq X$ curva <u>suave</u> e irreducible, definimos el <u>número de intersección</u> entre D y C como el entero $D \cdot C := \deg(\mathcal{O}_X(D)|_C) \in \mathbb{Z}$.

Más generalmente, si C no es suave, consideramos la normalización $\nu : C^\nu \to C$ y se define $D \cdot C := \deg(\nu^*(\mathcal{O}_X(D)|_C))$. En part, si $D_1 \sim D_2$ entonces $D_1 \cdot C = D_2 \cdot C$ $\forall C \subseteq X$.

[<u>Def</u>: Sean D_1 y D_2 divisores de Cartier en X. Decimos que D_1 y D_2 son <u>numéricamente equivalentes</u> si $D_1 \cdot C = D_2 \cdot C$ $\forall C \subseteq X$ curva irred, y escribimos $D_1 \equiv D_2$. El grupo cociente $NS(X) := \mathrm{Div}(X)/\equiv$ es llamado el <u>grupo de Néron-Severi</u> de X.

El siguiente resultado de Néron (1952) y Severi (1934) se conoce como el "Teorema de base":

[<u>Teorema</u>: El grupo abeliano $NS(X)$ es finitamente generado. En part, $NS(X) \cong \mathbb{Z}^r \oplus \text{Torsión}$. El entero $r = \mathrm{rg}(NS(X)) =: \rho(X)$ se llama el <u>número de Picard</u> de X.

<u>Ejemplos</u>: $\rho(C) = 1$ si C curva, $\rho(\mathbb{P}^n) = 1$, $\rho(\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m) = 2$, $\rho(\mathrm{Bl}_Z(X)) = \rho(X) + 1$.

<u>Obs</u>: Sea $L \cong \mathcal{O}_X(D)$ fibrado en rectas <u>amplio</u>. Entonces, $L|_C$ es amplio para toda $C \subseteq X$ curva irreducible. Usando métodos de cohomología, se prueba que como $\nu : C^\nu \to C$ es un morfismo <u>finito</u> entonces ν^*L es amplio en C^ν. Luego, $D \cdot C > 0$ $\forall C \subseteq X$ curva irred.

[<u>Terminología</u>: Sea $L \cong \mathcal{O}_X(D)$ fibrado en rectas. Decimos que L es <u>nef</u> ("numéricamente efectivo") si $D \cdot C \geq 0$ para toda $C \subseteq X$ curva irreducible.]