§22. Sistemas lineales y amplitud

Sea X una variedad algebraica y $L \in \mathrm{Pic}(X)$ un fibrado en rectas, definido en un cubrimiento abierto $X = \bigcup_{i\in I} \mathcal{U}_i$ por funciones de transición $\{g_{ij}\}_{i,j\in I}$.

Construcción: sean $s_0, \dots, s_m \in H^0(X,L)\setminus\{0\}$ secciones globales no-nulas, donde cada s_j está definida por $s_{j,i} \in \mathcal{O}(\mathcal{U}_i)$ en $\mathcal{U}_i$. Así, para cada $x \in \mathcal{U}_i$ definimos

$$\varphi_L : X \dashrightarrow \mathbb{P}^n, \quad x \mapsto [s_{0,i}(x), \dots, s_{m,i}(x)]$$

aplicación racional.

Notamos que la definición de φ_L es independiente del abierto $\mathcal{U}_i$ escogido, pues al pasar de $\mathcal{U}_i$ a $\mathcal{U}_j$ cada coordenada se multiplica por el mismo factor no-nulo $g_{ji}(x)$. Luego, escribimos simplemente $\varphi_L(x) = [s_0(x), \dots, s_m(x)]$ y así $\varphi_L : X \dashrightarrow \mathbb{P}^n$ está bien definida fuera del cerrado $Z = \{x \in X \text{ tq } s_i(x) = 0 \ \forall i \in I\} \subseteq X$.

Caso particular importante: si las secciones $s_0, \dots, s_m$ no tienen ceros comunes (ie, $Z = \emptyset$), entonces $\varphi_L : X \to \mathbb{P}^n$ es un morfismo regular. Más aún, en este caso $\varphi_L^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1) \cong L$:
En efecto, basta notar que por definición de pullback se tiene que $\varphi_L^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-1) \cong L^\vee$, pues el fibrado $\varphi_L^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-1)$ está determinado por los abiertos $X_i := \varphi_L^{-1}(\mathcal{U}_i) = \{x \in X \text{ tq } s_i(x) \neq 0\}$ (donde $\mathcal{U}_i = \{x_i \neq 0\} \subseteq \mathbb{P}^n$) y, dado que $\varphi_L(x) = \left[\frac{s_0(x)}{s_j(x)}, \dots, \frac{s_m(x)}{s_j(x)}\right]$ para $x \in X_j$, las funciones de transición h_{ij} de $\varphi_L^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-1)$ son $h_{ij} = \frac{s_j(x)}{s_i(x)} = \frac{\cancel{s_j(x)}}{g_{ij}(x)\cancel{s_j(x)}} = \frac{1}{g_{ij}(x)} = g_{ji}(x)$, ie, $\varphi_L^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-1) \cong L^\vee$.

Recíprocamente, dado un morfismo regular $f : X \to \mathbb{P}^n$, $x \mapsto [f_0(x), \dots, f_m(x)]$ consideramos $L := f^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)$ y la aplicación lineal

$$\Gamma(f) : H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)) \to H^0(X,L), \quad x_i \mapsto \Gamma(f)(x_i) := s_i$$

Luego, $f = \varphi_L$ pues $s_j(x) = (x_j \circ f)(x) = f_j(x)$. En resumen:

Teorema: sea X una variedad algebraica. Entonces, hay una biyección

$$\left\{ \begin{matrix} f : X \to \mathbb{P}^n \\ \text{morfismo regular} \end{matrix} \right\} \overset{1:1}{\longleftrightarrow} \left\{ \begin{matrix} L \in \mathrm{Pic}(X) \text{ junto con secciones} \\ s_0, \dots, s_n \in H^0(X,L) \text{ sin ceros comunes} \end{matrix} \right\}$$

$$f \longmapsto (L = f^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1) \ \text{ y } \ s_i = \Gamma(f)(x_i))$$

$$\varphi_L \longleftarrow (L; s_0, \dots, s_m)$$

Def: Sea $L \in \mathrm{Pic}(X)$ fibrado en rectas en X. Un sistema lineal M en X es un sub-ev. $M \subseteq H^0(X,L)$ de dimensión finita. En particular, si $\dim_{\mathbb{K}} H^0(X,L) < +\infty$ decimos que el sistema lineal $H^0(X,L)$ es un sistema lineal completo.

Notación: Dado un sistema lineal $M \subseteq H^0(X,L)$ denotamos por $|M| := \mathbb{P}(M^*) = \{\text{hiperplanos} \subseteq M\}$ al espacio proyectivo dual de M. Con esta notación, podemos formular la versión sin coordenadas del Teorema anterior:

Dado un sistema lineal $M \subseteq H^0(X,L)$ definimos la aplicación racional

$$\varphi_M : X \dashrightarrow |M| = \mathbb{P}(M^*), \quad x \mapsto \{s \in M \text{ tal que } s(x) = 0_{L_x}\} =: M_x$$

Luego, φ_M está definida en $x \in X$ (ie, M_x es un hiperplano en M) si y sólo si existe $s \in M$ tal que $s(x) \neq 0$. Más aún, si $s_0, \dots, s_m$ es una base de M y escribimos $s = \sum_{i=0}^{m} \lambda_i s_i$, entonces el hiperplano $M_x \in |M|$ está dado por la ecuación $\lambda_0 s_0(x) + \dots + \lambda_m s_m(x) = 0$ y corresponde al punto $[s_0(x), \dots, s_m(x)] \in |M| \cong \mathbb{P}^n$, ie, $\varphi_M : X \dashrightarrow |M| \cong \mathbb{P}^n$ en coordenadas.

$$x \longmapsto [s_0(x), \dots, s_m(x)]$$

Def: Sea $M \subseteq H^0(X,L)$ un sistema lineal. Definimos el lugar de base de M mediante
$$Bs(M) = \{x \in X \text{ tal que } s(x) = 0 \ \forall s \in M\}.$$
Diremos que M es libre de puntos de base (o globalmente generado) si $Bs(M) = \emptyset$, ie, $\varphi_M : X \to |M| = \mathbb{P}(M^*)$ es un morfismo regular. Equivalentemente, el morfismo de evaluación
$$ev : X \times M \longrightarrow L \ , \ (x,s) \mapsto s(x)$$
es sobreyectivo.

Luego, tenemos una biyección
$$\left\{\begin{array}{l} f : X \to \mathbb{P}^n \\ \text{morfismo regular}\end{array}\right\} \overset{1:1}{\longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{l} L \in \mathrm{Pic}(X) \text{ junto con } M \subseteq H^0(X,L) \text{ sistema lineal} \\ \text{de } \dim_k(M) = n+1 \text{ sin puntos de base}\end{array}\right\}$$

Ejemplos:

① Clásicamente, si $\dim_k(M) = 2$ (ie, $|M| \cong \mathbb{P}^1$) se dice que $f : X \dashrightarrow |M| \cong \mathbb{P}^1$ es un pincel de hipersuperficies en X.

② Las inclusiones $M \subseteq N \subseteq H^0(X,L)$ inducen aplicaciones racionales
$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, dashed, "\varphi_N"] \arrow[dr, dashed, "\varphi_M"'] & \mathbb{P}(N^*) \arrow[d, dashed, "\pi"] \\ & \mathbb{P}(M^*) \end{tikzcd}$$
donde π es la proyección lineal inducida por $N^* \twoheadrightarrow M^*$. En coord, si $s_0, \dots, s_n$ base de N tq $s_0, \dots, s_m$ base de M $\Rightarrow \pi([s_0, \dots, s_m, s_{m+1}, \dots, s_n]) = [s_0, \dots, s_m]$.

Tipicamente, puede ocurrir que $H^0(X,L)$ sea sin puntos de base, pero $M \subseteq H^0(X,L)$ no lo sea.

③ Sea $X = \mathbb{P}^n$ y $L = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d)$ con $d \geq 1$. Entonces, $H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d)) \cong k[x_0, \dots, x_n]_d$ polinomios homogéneos de grado d y luego
$$\varphi_L = \nu_d : \mathbb{P}^n \hookrightarrow \mathbb{P}(H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d))^*) \cong \mathbb{P}^N \ , \text{ con } N = \binom{n+d}{d} - 1$$
es el incrustamiento de Veronese (ver §11, pág 39). En part, $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d)$ es globalmente generado.

④ En $\mathbb{P}^2$, si consideramos $M := \mathrm{Vect}_k\langle yz, xz, xy\rangle \subseteq H^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(2))$ sistema lineal. Entonces, $\varphi_M : \mathbb{P}^2 \dashrightarrow \mathbb{P}^2$, $[x,y,z] \mapsto [yz, xz, xy]$ es la involución de Cremona (ver §13, p. 45).

⑤ Sea $\varphi : Gr(r,V) \hookrightarrow \mathbb{P}(\Lambda^r V) \cong \mathbb{P}^N$ el incrustamiento de Plücker, con $N = \binom{n}{r} - 1$. Denotamos por $\mathcal{O}_{Gr(r,V)}(1) := \varphi^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}(1)$ fibrado en rectas globalmente generado.

$\boxed{\text{Ejercicio}}$ Sean $a, b \in \mathbb{Z}$. En $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$, definimos $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m}(a,b) := \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(a) \boxtimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^m}(b) \in \mathrm{Pic}(\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m)$. Probar que sistema lineal completo definido por $L = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m}(1,1)$ induce un morfismo regular $\varphi_L : \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m \hookrightarrow |L| \cong \mathbb{P}^N$ que coincide con la incrustación de Segre.

Pregunta: Dado un sistema lineal libre de puntos de base M, ¿cuándo $\varphi_M : X \to |M| \cong \mathbb{P}^n$ es un incrustamiento cerrado? Para responder, necesitamos el siguiente resultado:

Teorema: Sea $f : X \to Y$ un morfismo finito entre variedades algebraicas tal que:
① f separa puntos, ie, f es inyectivo.
② f separa tangentes, ie, $d_x f : T_x X \hookrightarrow T_{f(x)} Y$ inyectiva para todo $x \in X$.
Entonces, f es un incrustamiento cerrado (ie, $X \cong f(X) \subseteq Y$).

Dem: Reemplazando Y por $f(X)$, podemos suponer que f es biyectivo. Sea $g := f^{-1} : Y \to X$ aplicación continua (pues f cerrado) y veamos que es regular:
Para ello podemos suponer que X e Y son afines, y luego basta probar que el pullback $f^* : \mathcal{O}(Y) \longrightarrow \mathcal{O}(X)$ es un isomorfismo. Inyectividad: OK pues f dominante ✓
Notamos además que si $\mathrm{Im}(f^*) = \mathcal{O}(X)$ entonces $\mathcal{O}(Y) = \mathrm{Im}(\mathrm{Id}_{\mathcal{O}(Y)}) = \mathrm{Im}(g^* \circ f^*) = (g^*)(\mathcal{O}(X))$.

En part, $(g^*)(\mathcal{O}(x)) \subseteq \mathcal{O}(y)$ y luego g es regular ✓ Veamos que $\mathrm{Im}(f^*) = \mathcal{O}(X)$:

Recuerdo (Lema de Nakayama): sea $(A,\mathfrak{m})$ anillo local con $A/\mathfrak{m} \cong k$ y sea M un A-módulo finitamente generado. Si $u_1,\dots,u_m \in M$ son tales que $[u_1],\dots,[u_m] \in M/\mathfrak{m}M$ son generadores de dicho $k \cong A/\mathfrak{m}$-ev $\Rightarrow u_1,\dots,u_m$ generan M como A-módulo.

Aquí, sabemos que $f^*: \mathfrak{m}_y/\mathfrak{m}_y^2 \twoheadrightarrow \mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2$ es sobreyectivo, donde $y = f(x)$. Luego, si $u_1,\dots,u_m \in \mathfrak{m}_y$ son generadores, entonces $[f^*u_1],\dots,[f^*u_m]$ son generadores de $\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2$ $\underset{\text{Nakayama}}{\Longrightarrow}$ $f^*u_1,\dots,f^*u_m$ generan $\mathfrak{m}_x \subseteq \mathcal{O}_{X,x}$, i.e., $\mathfrak{m}_x = \langle f^*\mathfrak{m}_y \rangle \subseteq \mathcal{O}_{X,x}$.

Por otro lado, como f es un morfismo finito, $\mathcal{O}_{X,x}$ es un $\mathcal{O}_{Y,y}$-módulo fin. gen. (vía f^*). Como $[1]$ es generador de $\mathcal{O}_{X,x}/\mathfrak{m}_x \cong k$ y $f^*: \mathcal{O}_{Y,y}/\mathfrak{m}_y \twoheadrightarrow \mathcal{O}_{X,x}/\langle f^*\mathfrak{m}_y\rangle = \mathcal{O}_{X,x}/\mathfrak{m}_x$ $\underset{\text{Nakayama}}{\Longrightarrow}$ 1 genera $\mathcal{O}_{X,x}$ como $\mathcal{O}_{Y,y}$-módulo (vía f^*), i.e., $\mathcal{O}_{X,x} = f^*\mathcal{O}_{Y,f(x)}$ $\forall x \in X$.
Luego, obtenemos un isomorfismo de haces y en particular $\mathcal{O}(X) = \mathrm{Im}(f^*)$. ■

Obs: En part, todo morfismo finito étale biyectivo es un isomorfismo. En general, existe un grupo "fundamental étale" $\pi_1^{\text{ét}}(X)$ que mide los posibles $Y \to X$ étale.

Corolario: sea $M \subseteq H^0(X,L)$ un sistema lineal. Entonces, $\varphi_M: X \hookrightarrow \mathbb{P}(M^*)$ es un imountamiento cerrado si y sólo si:

① M separa puntos, i.e., para todos $x,y \in X$ con $x \neq y$ existe $s \in M$ tq $s(x) = 0$ y $s(y) \neq 0$. En part, M es libre de puntos de base.

② M separa tangentes, i.e., para todo $x \in X$ y todo $v \in T_xX$ existe $s \in M$ tal que $s(x) = 0$ y $(d_x s)(v) \neq 0$.

Dem: Usando métodos de cohomología ("Teorema de Grauert-Grothendieck"), veremos más adelante que si $f: X \hookrightarrow Y$ morfismo regular inyectivo con Y variedad proyectiva (eg. $Y = \mathbb{P}(M^*)$), entonces f es un morfismo finito.
Luego, basta verificar que $d_x\varphi_M$ es inyectivo $\forall x \in X \Leftrightarrow$ ②: sea $x_0 \in X$ fijo y sea $s_0,\dots,s_m$ una base de M tq $s_0(x_0) \neq 0$ y $s_i(x_0) = 0$ $\forall i > 0$ (i.e., $\varphi_M(x_0) = [1,0,\dots,0]$).
Luego, para x en $X_{s_0} = \{x \in X \text{ tq } s_0(x) \neq 0\}$ se tiene que

$$\varphi_M(x) = \left[1, \frac{s_1(x)}{s_0(x)}, \dots, \frac{s_m(x)}{s_0(x)}\right] \in \mathcal{U}_0 = \{x_0 \neq 0\} \cong \mathbb{A}^n$$

Así, obtenemos $\varphi_M: X_{s_0} \to \mathbb{A}^n$ definida por $\varphi_M(x) = \left(\frac{s_1(x)}{s_0(x)}, \dots, \frac{s_m(x)}{s_0(x)}\right)$ y debemos calcular $d_{x_0}\varphi_M: T_{x_0}X \longrightarrow T_{\varphi_M(x_0)}\mathbb{A}^n$, $v \longmapsto (d_x\varphi_M)(v)$. Para ello, notamos que $s_i = g_{ij}s_j$ implica que $d_x s_i(v) = g_{ij}(x)(d_x s_j)(v) + \underbrace{(d_x g_{ij})(v)\cdot s_j(x)}_{=0 \text{ en } x = x_0 \text{ pues } s_j(x_0) = 0}$. $\rightsquigarrow d_{x_0}s_i(v)$ bien definido!

$$\Rightarrow (d_{x_0}\varphi_M)(v) \overset{\text{Leibniz}}{=} \left(\frac{(d_{x_0}s_1)(v)}{s_0(x_0)}, \dots, \frac{(d_{x_0}s_m)(v)}{s_0(x_0)}\right)$$
y luego $d_{x_0}\varphi_M$ inyectiva $\Leftrightarrow$ ②. ■

Usando el lenguaje de sistemas lineales, podemos generalizar el Teorema de Bertini:

Teorema: Sup. que $\mathrm{car}(k) = 0$, y sea X una variedad algebraica suave. Sea $M \subseteq H^0(X,L)$ un sistema lineal. Entonces, para $s \in M$ sección general la variedad

$$V(s) := \{x \in X \text{ tq } s(x) = 0\} \subseteq X$$

es suave si M es libre de puntos de base.

Dem: Consideremos la variedad de incidencia

$$\begin{array}{ccc} & I = \{(s,x) \in M \times X \text{ tq } s(x) = 0\} & \\ \swarrow^{p_1} & & \searrow^{p_2} \\ M & & X \end{array}$$

Como M sin puntos de base, $p_2^{-1}(x) = M_x \in |M|$ hiperplano $\simeq \mathbb{P}^{n-1}$ $\forall x \in X$. Además, $p_2 : I \to X$ es localmente trivial (ie, existe $X = \bigcup_{i\in I} \mathcal{U}_i$ cubrimiento abierto tq $p_2^{-1}(\mathcal{U}_i) \cong \mathcal{U}_i \times \mathbb{P}^{n-1}$) $\Rightarrow I$ es suave. Luego, por el Teorema de suavidad genérica, la fibra $p_1^{-1}(s) = V(s)$ es suave para $s \in M \cong \mathbb{A}^{n+1}$ general. ■

<u>Ejemplo</u> (Bertini): Sea $X \overset{f}{\hookrightarrow} \mathbb{P}^n$ variedad proyectiva suave de $\dim(X) \geq 1$ y consideremos $L = f^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1) := \mathcal{O}_X(1)$. Entonces, la restricción de secciones define un sistema lineal

$$M := \operatorname{Im}\left(\Gamma(f) : H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)) \cong k^{n+1} \longrightarrow H^0(X, L)\,,\ s \mapsto s|_X\right) \text{ sin puntos de base.}$$

$\Rightarrow V(s) = X \cap H_s$ sección hiperplana, es suave para $s \in M$ general.

<u>Terminología</u>: En Geometría Algebraica, el término "Positividad" suele asociarse al estudio de sistemas lineales con "muchas secciones". A continuación algunas nociones importantes:

<u>Def</u>: Sea X una variedad algebraica y $L \in \operatorname{Pic}(X)$ fibrado en rectas, con $\varphi_L : X \dashrightarrow \mathbb{P}(H^0(X,L)^*)$ la aplicación racional asociada. Decimos que L es:

① <u>Globalmente generado</u> (o libre de puntos de base): si φ_L es un morfismo regular, ie, si $\operatorname{Bs}(L) = \{x \in X \text{ tq } s(x) = 0\ \forall s \in H^0(X,L)\} = \emptyset$.

② <u>Semi-amplio</u>: si $L^{\otimes m}$ es globalmente generado para cierto $m \in \mathbb{N}^{\geq 1}$.

③ <u>Muy amplio</u>: si $\varphi_L : X \hookrightarrow \mathbb{P}(H^0(X,L)^*)$ incrustamiento cerrado, ie, L separa puntos y tangentes.

④ <u>Amplio</u>: si $L^{\otimes m}$ es muy amplio para cierto $m \in \mathbb{N}^{\geq 1}$.

Aquí, suponemos que $\dim_k H^0(X,L)$ es finita. En general, decimos que L es amplio (resp. muy amplio, etc) si existe $M \subseteq H^0(X,L)$ sistema lineal amplio (resp. muy amplio, etc).

<u>Conclusión</u>: Una variedad algebraica X es proyectiva si y sólo si existe $L \in \operatorname{Pic}(X)$ <u>amplio</u>.

$\boxed{\text{Ejercicio}}$ Sean $L, M \in \operatorname{Pic}(X)$ fibrados en recta en una variedad alg. X. Probar que si L es muy amplio y M globalmente generado, entonces $L \otimes M$ es muy amplio.

<u>Definición</u> (Iitaka, 1970): Sea X una variedad algebraica y $L \in \operatorname{Pic}(X)$ fibrado en rectas. Definimos la <u>dimensión de Iitaka</u> de L por

$$\kappa(L) = \begin{cases} \max\limits_{m \in \mathbb{N}^{\geq 1}} \dim\left(\overline{\varphi_{L^{\otimes m}}(X)}\right) & \text{si existe } m_0 \in \mathbb{N}^{\geq 1} \text{ tq } H^0(X, L^{\otimes m_0}) \neq \{0\} \\ -\infty & \text{si } H^0(X, L^{\otimes m}) = \{0\} \text{ para todo } m \in \mathbb{N}^{\geq 1}. \end{cases}$$

Luego, $\kappa(L) \in \{-\infty, 0, 1, \dots, \dim(X)\}$ y decimos que L es <u>big</u> si $\kappa(L) = \dim(X)$.

En general, tenemos que:

$$\begin{array}{ccccc} \text{Globalmente generado} & \Rightarrow & \text{Semi-amplio} & \Rightarrow & \kappa(L) \geq 0 \\ \Uparrow & & \Uparrow & & \Uparrow \\ \text{Muy amplio} & \Rightarrow & \text{Amplio} & \Rightarrow & \text{Big} \end{array}$$

<u>Cultura general</u> (Resultado importante, sin demostración):

<u>Teorema</u> (Zariski, 1962): Sea X una variedad algebraica proyectiva normal y $L \in \operatorname{Pic}(X)$ un fibrado en rectas tal que $\operatorname{Bs}(L)$ es un conjunto <u>finito</u>. Entonces, L es semi-amplio.

En general, decimos que un fibrado en rectas $L \in \operatorname{Pic}(X)$ es <u>móvil</u> si $\operatorname{codim}_X(\operatorname{Bs}(L)) \geq 2$. Luego, el resultado anterior nos dice que en una <u>superficie</u> proyectiva normal, todo fibrado en rectas móvil es semi-amplio.