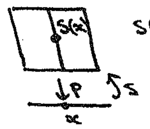
§21. Secciones y haces localmente libres

Def: Sea X una variedad alg. y $E \xrightarrow{p} X$ un fibrado vectorial de rango r. Una *sección* de E es un morfismo regular $s : X \to E$ tal que $p \circ s = Id_X$, i.e., $s(x) \in E_x \simeq k^r$ $\forall x \in X$.

Importante: El conjunto $H^0(X,E) := \{s : X \to E \text{ sección}\}$ de *secciones globales* de E (que también se denota $\Gamma(X,E)$) es un $\Gamma(X,\mathcal{O}_X)$-módulo. En efecto, si $s,t \in H^0(X,E)$ y $\lambda \in \Gamma(X,\mathcal{O}_X) = \mathcal{O}(X)$, definimos:

$$(s+t)(x) := s(x) + t(x) \quad \text{y} \quad (\lambda s)(x) := \lambda(x) s(x).$$



$s(x) \in E_x \simeq k^r$

k-e.v.

En part, $H^0(X,E)$ es un k-e.v.

Obs importante: En términos de trivializaciones y matrices de transición tenemos que

$$\begin{tikzcd}
E|_{\mathcal{U}_i} = p^{-1}(\mathcal{U}_i) \arrow[rr, "\sim", "\theta_i"'] \arrow[dr, "p"] & & \mathcal{U}_i \times \mathbb{A}^r \arrow[dl, "pr_1"'] \\
& \mathcal{U}_i \arrow[ul, bend left, "s|_{\mathcal{U}_i}"] \arrow[ur, bend right, "\sigma_i := \theta_i \circ s|_{\mathcal{U}_i}"'] &
\end{tikzcd}$$

$\Rightarrow \sigma_i(x) = (x, s_i(x))$ $\forall x \in \mathcal{U}_i$, donde $s_i(x) = (s_{i,1}(x), \dots, s_{i,r}(x)) \in \mathcal{O}_X(\mathcal{U}_i)^{\oplus r}$

En $\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j$ tenemos:

$$\begin{tikzcd}
(x, s_j(x)) \arrow[rr, bend right, "g_{ij}(x)"'] & s(x) \arrow[l, "\theta_j"'] \arrow[r, "\theta_i"] & (x, s_i(x))
\end{tikzcd}$$

$\Rightarrow \boxed{s_i = g_{ij} s_j \text{ en } \mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j}$

Ejemplos: ① Sea $L = X \times \mathbb{A}^1$ fibrado en rectas *trivial* en X, entonces $g_{ij} = 1$ y luego $H^0(X,L) \cong \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ secciones globales de $\mathcal{O}_X$.

② Similar, si $E = X \times \mathbb{A}^r$ fibrado trivial de rango r, entonces $H^0(X,E) \cong \Gamma(X,\mathcal{O}_X)^{\oplus r}$.

③ $\boxed{\text{Ejercicio}}$ Sea $f : Y \to X$ un morfismo regular y $E \xrightarrow{p} X$ un fibrado vectorial. Entonces $\Gamma(f) : H^0(X,E) \to H^0(Y, f^*E)$, $s \mapsto (y \mapsto (y, s(f(y))))$ es k-lineal.

④ Sea $d \in \mathbb{Z}$ y consideremos $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d)$ fibrado en rectas en $\mathbb{P}^n$, definido por $g_{ij} = \left(\frac{x_j}{x_i}\right)^d$.
Sea $s_i \in \mathcal{O}(\mathcal{U}_i)$ donde $\mathcal{U}_i = \{x_i \neq 0\} \cong \mathbb{A}^n$ con coordenadas $\frac{x_1}{x_i}, \dots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \dots, \frac{x_n}{x_i}$

$\Rightarrow s_i = \frac{P_i}{x_i^{m_i}}$ con P_i homogéneo de grado m_i. Luego, si $s_i = g_{ij} s_j$ en $\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j$

$\Leftrightarrow \frac{P_i}{x_i^{m_i}} = \frac{x_j^d P_j}{x_i^d x_j^{m_j}} \iff P_i x_i^{d-m_i} = P_j x_j^{d-m_j}$. $\forall i,j$.

Así, si $d \geq 0$ entonces $P := P_i x_i^{d-m_i}$ es un polinomio homogéneo de grado d y $s_i = \frac{P}{x_i^d}$ $\forall i$, i.e., $k[x_0, \dots, x_n]_d \xrightarrow{\sim} H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d))$, $P \mapsto \left\{s_i = \frac{P}{x_i^d}\right\}_{i=0,\dots,n}$ es un isomorfismo. Del mismo modo, $H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d)) = \{0\}$ si $d < 0$.

⑤ Sean $E \to X$ y $F \to X$ fibrados vectoriales dados por matrices de transición (en un cubrimiento común) g_{ij} y h_{ij}, respectivamente. Sean $s \in H^0(X,E)$ y $t \in H^0(X,F)$, donde $s_i = g_{ij} s_j$ y $t_i = h_{ij} t_j$ $\Rightarrow s_i \otimes t_i = (g_{ij} s_j) \otimes (h_{ij} t_j) = (g_{ij} \otimes h_{ij})(s_j \otimes t_j)$. Luego, obtenemos $s \otimes t \in H^0(X, E \otimes F)$.

¡Atención! Si $X = \mathbb{P}^n$, $E = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)$ y $F = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-1)$ entonces $E \otimes F \simeq k_X$ trivial y $H^0(X, E \otimes F) \simeq \Gamma(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}) \simeq k \neq H^0(X,E) \otimes_k H^0(X,F) = \{0\}$.

⑥ $\boxed{\text{Ejercicio}}$ Sean $E \to X$ y $F \to Y$ fibrados vectoriales. Probar la *fórmula de Künneth*:
$H^0(X,E) \otimes_k H^0(Y,F) \cong H^0(X \times Y, E \boxtimes F)$, donde $E \boxtimes F := pr_X^*(E) \otimes pr_Y^*(F)$.

<u>Importante</u>: Un fibrado en rectas $L \to X$ es <u>trivial</u> (ie, $L \simeq k_X$) si y sólo si existe una sección global $s \in H^0(X,L)$ que <u>no</u> se anula <u>nunca</u> (ie, $s(x) \neq 0$ en $L_x \simeq k$ $\forall x \in X$).
En efecto, en tal caso definimos un isomorfismo

$$\begin{tikzcd} k_X = X \times \mathbb{A}^1 \arrow[rr, "\sim"] \arrow[dr, "pr_1"'] & & L \arrow[dl, "p"] \\ & X & \end{tikzcd} \qquad \text{mediante } (x,t) \longmapsto t\,s(x).$$

<u>Caso particular</u>: Sea X una variedad alg. irreducible tal que $\Gamma(X,\mathcal{O}_X) \cong k$ (eg. X es proyectiva), y sea $L \to X$ un fibrado en rectas tal que existen dos secciones $s \in H^0(X,L)\setminus\{0\}$ y $t \in H^0(X,L^\vee)\setminus\{0\}$ no-nulas (ie, $\exists x \in X$ tq $s(x) \neq 0$ y $\exists y \in X$ tq $t(y) \neq 0$) entonces L es <u>trivial</u>.
En efecto, el producto $H^0(X,L)\otimes H^0(X,L^\vee) \longrightarrow H^0(X, L\otimes L^\vee) \simeq \Gamma(X,\mathcal{O}_X) \cong k$ define $s\otimes t$ <u>constante</u>, la cual es $\neq 0$ en el abierto donde $s(x) \neq 0$ y $t(x) \neq 0$, y luego es una constante globalmente no-nula $\Rightarrow$ s y t no se anulan <u>nunca</u> y L trivial ✓

<u>Construcción</u> (Haz de secciones):
Sea $E \xrightarrow{p} X$ un fibrado vectorial de rango r, definimos el <u>haz de secciones</u> de E de la manera siguiente: Para cada $\mathcal{U} \subseteq X$ abierto (no-vacío) definimos

$$\mathcal{E}(\mathcal{U}) := H^0(\mathcal{U}, E|_{\mathcal{U}}) = \{ s : \mathcal{U} \to E|_{\mathcal{U}} \text{ regular tal que } p\circ s = \mathrm{Id}_{\mathcal{U}} \}.$$

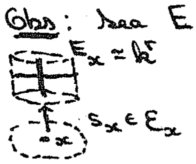
Dado que $\mathcal{E}(\mathcal{U})$ es un $\Gamma(\mathcal{U},\mathcal{O}_{\mathcal{U}}) = \mathcal{O}_X(\mathcal{U})$-módulo, tenemos que $\mathcal{E}$ es un $\mathcal{O}_X$-módulo.
Más aún, las trivializaciones $\theta_i : E|_{\mathcal{U}_i} \xrightarrow{\sim} \mathcal{U}_i \times \mathbb{A}^r$ inducen isomorfismos $\mathcal{E}|_{\mathcal{U}_i} = \mathcal{O}_{\mathcal{U}_i}^{\oplus r}$, ie, $\mathcal{E}$ es un $\mathcal{O}_X$-módulo <u>localmente libre</u> de rango r ! (ver §4, pág 16).
<u>Obs</u>: En part, si $L \to X$ fibrado en rectas entonces $\mathcal{L}$ es un <u>haz invertible</u> !

Recíprocamente, dado un $\mathcal{O}_X$-módulo localmente libre de rango r y un cubrimiento abierto $X = \bigcup_{i\in I} \mathcal{U}_i$ tal que $\varphi_i : \mathcal{E}|_{\mathcal{U}_i} \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_{\mathcal{U}_i}^{\oplus r}$ isomorfismo $\mathcal{O}_{\mathcal{U}_i}$-lineal, entonces en $\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j$

$$\begin{tikzcd} \mathcal{O}_{\mathcal{U}_i\cap\mathcal{U}_j}^{\oplus r} = (\mathcal{O}_{\mathcal{U}_j}^{\oplus r})|_{\mathcal{U}_i\cap\mathcal{U}_j} \arrow[r, "\varphi_j^{-1}"] \arrow[rr, bend right, "g_{ij}"'] & \mathcal{E}|_{\mathcal{U}_i\cap\mathcal{U}_j} \arrow[r, "\varphi_i", "\sim"'] & (\mathcal{O}_{\mathcal{U}_i}^{\oplus r})|_{\mathcal{U}_i\cap\mathcal{U}_j} = \mathcal{O}_{\mathcal{U}_i\cap\mathcal{U}_j}^{\oplus r} \end{tikzcd}$$

con $g_{ij} \in GL_r(\mathcal{O}_{\mathcal{U}_i\cap\mathcal{U}_j})$ verificando la condición de cociclo (pues $g_{ij} = \varphi_i \circ \varphi_j^{-1}$).
$\Rightarrow$ Definimos un fibrado vectorial $E \to X$ a partir de las matrices de transición g_{ij} y por construcción el haz de secciones de E es $\mathcal{E}$. En resumen:

<u>Teorema</u>: Sea X una variedad algebraica conexa (eg. irreducible). Entonces, $E \mapsto \mathcal{E}$ define una equivalencia entre la categoría <u>Vect</u>(X) de fibrados vectoriales en X y la categoría de $\mathcal{O}_X$-módulos localmente libres.

<u>Obs</u>: Sea $E \to X$ un fibrado vectorial y sea $\mathcal{E}$ el haz de secciones asociado.


Para cada $x \in X$, denotamos por $\mathfrak{m}_{X,x}\mathcal{E}_x$ al ideal de $\mathcal{E}_x$ formado por gérmenes de secciones que se anulan en x. Entonces, $\mathcal{E}_x / \mathfrak{m}_{X,x}\mathcal{E}_x \cong E_x$.

En efecto, $ev_x : \mathcal{E}_x \twoheadrightarrow E_x$, $s_x \mapsto s_x(x)$ es sobreyectivo y $\ker(ev_x) = \mathfrak{m}_{X,x}\mathcal{E}_x$.