§ 20. Fibrados en recta y grupo de Picard

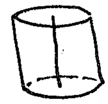
Motivación: Dada una variedad algebraica X, ¿cuándo X es proyectiva? Y en caso de serlo, ¿Cómo construir un incrustamiento cerrado $X \hookrightarrow \mathbb{P}^N$?, ¿"grado" de X en $\mathbb{P}^N$?

Def: Sea X una variedad alg. y $r \in \mathbb{N}^{\geq 1}$. Un fibrado vectorial de rango r en X es una variedad algebraica E junto con un morfismo regular sobreyectivo $p: E \to X$ tal que:

① La fibra $p^{-1}(x) := E_x$ es un k-ev de $\dim_k(E_x) = r$. En part, $E_x \cong \mathbb{A}^r$. $(\forall x \in X)$

② Para todo $x \in X$, existe una vecindad abierta (afín) $\mathcal{U} \subseteq X$ de x y una trivialización de $\mathcal{U}$, ie, un isomorfismo $\Theta_\mathcal{U}: p^{-1}(\mathcal{U}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{U} \times \mathbb{A}^r$ tal que

$$\begin{tikzcd} p^{-1}(\mathcal{U}) := E|_\mathcal{U} \arrow[rr, "\sim", "\Theta_\mathcal{U}"'] \arrow[dr, "p|_{p^{-1}(\mathcal{U})}"'] & & \mathcal{U} \times \mathbb{A}^r \arrow[dl, "pr_1"] \\ & \mathcal{U} & \end{tikzcd}$$



$E_x \cong \mathbb{A}^r$ $\qquad$ $\{x\} \times \mathbb{A}^r$

sea conmutativo.

⚠ Terminología: Un fibrado en rectas en X es un fibrado vectorial $L \xrightarrow{p} X$ de rango 1.

Ejemplos: ① Sea X var. algebraica y V un k-ev de $\dim_k(V) = r$. El fibrado vectorial $V_X := X \times V \cong X \times \mathbb{A}^r \xrightarrow{pr_1} X$ es llamado el fibrado trivial de rango r.

② Sea V un k-ev de $\dim_k(V) = n+1$, y $X = \mathbb{P}(V) \cong \mathbb{P}^n$ espacio proyectivo. Dentro de $V_X = \mathbb{P}(V) \times V$ consideramos la variedad de incidencia

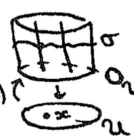
$$L := \{([\ell], x) \in \mathbb{P}(V) \times V \text{ tal que } x \in \ell\} \xrightarrow{p = pr_1} \mathbb{P}(V), \quad ([\ell], x) \mapsto \underbrace{[\ell]}_{\text{punto en } \mathbb{P}(V)}$$

$\Rightarrow p^{-1}([\ell]) = \ell \cong \mathbb{A}^1$ recta en V. Veamos que podemos trivializar $L \xrightarrow{p} \mathbb{P}(V)$:

Sean $[x_0, \ldots, x_n]$ coord. homogéneas en $\mathbb{P}^n \cong \mathbb{P}(V)$ y t coord. en $\ell \cong \mathbb{A}^1$. En $\mathcal{U}_i = \{x_i \neq 0\}$ tenemos:

$$\mathcal{U}_i \times \mathbb{A}^1 \xrightarrow[\sim]{\Theta_i^{-1}} p^{-1}(\mathcal{U}_i), \quad \Big(\overbrace{\Big[\frac{x_0}{x_i}, \ldots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, 1, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \ldots, \frac{x_n}{x_i}\Big]}^{\text{generador de } \ell}, t\Big) \mapsto \Big([x_0, \ldots, x_n], \overbrace{\Big(\frac{t x_0}{x_i}, \ldots, t, \ldots, \frac{t x_n}{x_i}\Big)}^{\text{punto en } \ell}\Big)$$

Obs: Sea $\sigma(x) := \Theta_i^{-1}(x, 1)$. Entonces, $\sigma(x) \in L_x$ $\forall x \in \mathcal{U}_i$ y $L_x = \mathrm{Vect}_k\langle \sigma(x) \rangle$ generador.



σ $\quad$ $O_\mathcal{U} := \mathcal{U} \times \{0\}$ $\quad$ $\sigma(x)$ $\quad$ x $\quad$ $\mathcal{U}$

En general, si $\Theta_\mathcal{U}: E|_\mathcal{U} \xrightarrow{\sim} \mathcal{U} \times \mathbb{A}^r$ trivialización y $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_r)$ es la base canónica de $k^r \cong \mathbb{A}^r$. Entonces, definimos

$$e_i(x) := \Theta_\mathcal{U}^{-1}(x, \varepsilon_i) \quad , i = 1, \ldots, r$$

$\Rightarrow E_x = \mathrm{Vect}_k\langle e_1(x), \ldots, e_r(x) \rangle$ $\forall x \in \mathcal{U}$ y decimos que $(e_1, \ldots, e_r)$ es un marco de referencia de $E|_\mathcal{U}$.

⚠ Importante: El fibrado $L \to \mathbb{P}(V)$ recién construido es llamado el fibrado (en rectas) tautológico de $\mathbb{P}(V) \cong \mathbb{P}^n$, y es denotado $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)}(-1)$ o $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-1)$.

③ $\boxed{\text{Ejercicio}}$ Sea V un k-ev. y $1 \leq r < \dim_k(V) - 1$. Sea $G = Gr(r, V)$ la variedad grassmanniana que parametriza los $\Lambda \cong k^r$ subev de V. Probar que la variedad de incidencia en $V_G = G \times V$ dada por

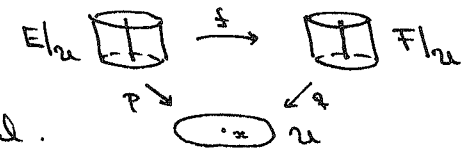
$$S := \{([\Lambda], x) \in Gr(r, V) \times V \text{ tal que } x \in \Lambda\} \xrightarrow{p = pr_1} Gr(r, V)$$

define un fibrado vectorial de rango r, llamado el fibrado tautológico de $Gr(r, V)$.

④ Podemos restringir fibrados vectoriales: sea $E \xrightarrow{p} X$ un fibrado vectorial y $Y \subseteq X$ una subvariedad algebraica, entonces $E|_Y := p^{-1}(Y)$ es un fibrado vectorial en Y, con $rg(E) = rg(E|_Y)$.

⑤ Más generalmente, podemos considerar el pullback de fibrados vectoriales: sea $E \xrightarrow{p} X$ un fibrado vectorial y sea $f: Y \to X$ un morfismo regular, entonces $f^*E := \{(y,z) \in Y \times E$ tales que $f(y) = p(z)\}$ es un fibrado vectorial en Y con $rg(E) = rg(E|_Y)$ y donde $(f^*E)_y \cong E_{f(y)}$.

Def: Sea X una variedad algebraica, y sean $E \xrightarrow{p} X$ y $F \xrightarrow{q} X$ fibrados vectoriales de rangos $rg(E) = r$ y $rg(F) = s$. Un morfismo de fibrados vectoriales es un morfismo regular $f: E \to F$ tal que:



① $q \circ f = p$.

② Para todo $x \in X$, $f_x: E_x \cong k^r \to F_x \cong k^s$ es k-lineal.

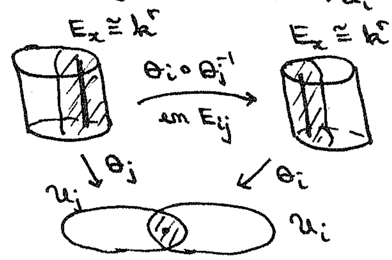
Ejemplo: Un morfismo entre los fibrados triviales $f: X \times k^r \to X \times k^s$ es de la forma $f(x, v) = (x, g(x)v)$, donde $g(x) \in M_{s\times r}(k)$ $\forall x \in X$. Notar que si $s = r$ y $g(x_0)$ es invertible para cierto $x_0 \in X$, entonces $g(x) \in GL_r(k)$ para todo $x \in \mathcal{U}_{x_0}$ vecindad de x_0.

Obs importante: Denotamos por $\underline{Vect}(X)$ la categoría de fibrados vectoriales en X. En part, decimos que dos fibrados son isomorfos si existe un isomorfismo de fibrados vectoriales $E \cong F$.

Construcción (Matrices de transición): Sea $p: E \to X$ un fibrado vectorial y sea $X = \bigcup_{i \in I} \mathcal{U}_i$ un cubrimiento abierto de X tal que cada $\mathcal{U}_i$ trivializa E, ie, $E|_{\mathcal{U}_i} = p^{-1}(\mathcal{U}_i) \xrightarrow[\theta_i]{\sim} \mathcal{U}_i \times \mathbb{A}^r$.

En una intersección $\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j \neq \emptyset$ tenemos:

$$
\begin{tikzcd}
 & E|_{\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j} = p^{-1}(\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j) =: E_{ij} \arrow[dl, "\cong"', "\theta_j|_{E_{ij}}"] \arrow[dr, "\cong", "\theta_i|_{E_{ij}}"'] & \\
(\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j) \times \mathbb{A}^r \arrow[rr, "\theta_i \circ \theta_j^{-1}", "\sim"'] & & (\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j) \times \mathbb{A}^r \\
(x, v) \arrow[rr, mapsto] & & (x, g_{ij}(x) v)
\end{tikzcd}
$$



donde $g_{ij}(x) \in GL_r(k)$ $\forall x \in \mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j$ son llamadas matrices de transición, las cuales verifican $g_{ii}(x) = I_r$ $\forall x \in \mathcal{U}_i$. Más aún, en la triple intersección $\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j \cap \mathcal{U}_k$

$$\boxed{g_{ij}\, g_{jk} = g_{ik}} \qquad \text{(Condición de cociclo)}$$

Obs importante: ① Las matrices de transición dependen de ciertas elecciones:

i) El cubrimiento abierto: podríamos tomar abiertos más pequeños.

ii) Las trivializaciones: Podríamos componer con $\mathcal{U}_i \times \mathbb{A}^r \xrightarrow{\sim} \mathcal{U}_i \times \mathbb{A}^r$, $(x,v) \mapsto (x, h_i(x)v)$ con $h_i(x) \in GL_r(k)$ $\forall x \in \mathcal{U}_i$ y obtendríamos $\tilde{g}_{ij} = h_i\, g_{ij}\, h_j^{-1}$.

② Módulo isomorfismo, E está completamente determinado por un cubrimiento abierto y por las matrices de transición. En efecto, podemos construir E usando el atlas algebraico obtenido al pegar los $\mathcal{U}_i \times \mathbb{A}^r$ usando los isomorfismos (cambios de carta)

$$
\begin{aligned}
(\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j) \times \mathbb{A}^r &\xrightarrow{\sim} (\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j) \times \mathbb{A}^r \qquad \forall i,j \in I \\
(x, v) &\longmapsto (x, g_{ij}(x) v)
\end{aligned}
$$

<u>Ejemplo principal</u>: En el caso particular de un <u>fibrado en rectas</u> $L \to X$ (ie, $rg(L)=1$) obtenemos <u>funciones de transición</u> $g_{ij}(x) \in k^*$ $\forall x \in \mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j$. En otras palabras, si denotamos por $\mathcal{O}_X^*$ el haz de funciones regulares en X que nunca se anulan $\Rightarrow g_{ij} \in \mathcal{O}_X^*(\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j)$ $\forall i,j \in I$, ie, $g_{ij} : \mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j \longrightarrow k^*$ regular.

Por ejemplo, para el fibrado tautológico $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-1)$ de $\mathbb{P}^n$ tenemos $g_{ij}(x) = \frac{x_i}{x_j}$:

$$\begin{tikzcd} & p^{-1}(\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j) \arrow[dr, "\cong\ \theta_i"] & \\ (\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j) \times \mathbb{A}^1 \arrow[ur, "\cong\ \theta_j^{-1}"] \arrow[rr] & & (\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j) \times \mathbb{A}^1 \end{tikzcd}$$

$$(x,t) \longmapsto \left(x, \frac{x_i}{x_j} t\right) = (x,s)$$

$$\theta_j^{-1}(x,t) = \left(x, \left(\frac{t x_0}{x_j}, \ldots, \frac{t x_n}{x_j}\right)\right)$$

$$\theta_i^{-1}(x,s) = \left(x, \left(\frac{s x_0}{x_i}, \ldots, \frac{s x_n}{x_i}\right)\right) \Rightarrow \boxed{g_{ij}(x) = \frac{x_i}{x_j} \text{ en } \mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j}$$

Ejercicio Sea $V_X \cong X \times \mathbb{A}^r$ fibrado trivial. Probar que $g_{ij}(x) = I_r$ $\forall i,j \in I$ son matrices de transición. En part, $g_{ij}(x) \equiv 1$ son funciones de transición de $X \times \mathbb{A}^1$.

<u>Construcción</u>: Las matrices de transición permiten extender a la categoría <u>Vect</u>(X) muchas de las construcciones de álgebra lineal. Las más usadas son:

Sea X una var. algebraica, y sean $E \to X$ y $F \to X$ fibrados vectoriales de rangos $rg(E) = r$ y $rg(F) = s$, dados por matrices de transición (en un cubrimiento abierto común) $g_{ij}(x) \in Gl_r(k)$ y $h_{ij}(x) \in Gl_s(k)$, respectivamente. Definimos:

1. La <u>suma directa</u> $E \oplus F$, de rango $r+s$, mediante $\begin{pmatrix} g_{ij} & 0 \\ 0 & h_{ij} \end{pmatrix} \in Gl_{r+s}(k)$
2. El <u>producto tensorial</u> $E \otimes F$, de rango rs, mediante $g_{ij} \otimes h_{ij} \in Gl_{rs}(k)$.
3. El <u>dual</u> $E^\vee$ (o E^*), de rango r, mediante $g_{ij}^\vee := {}^t g_{ij}^{-1} \in Gl_r(k)$.
4. El fibrado <u>Hom</u>$(E,F) := E^\vee \otimes F$, de rango rs.
5. Para $d \in \mathbb{N}$ (resp. $0 \leq d \leq r$) la <u>potencia simétrica</u> $S^d E$ (resp. <u>potencia exterior</u> $\Lambda^d E$), de rango $\binom{r+d-1}{d}$ (resp. $\binom{r}{d}$), dada por $S^d g_{ij}$ (resp. $\Lambda^d g_{ij}$).
6. Dada una representación $\rho : Gl_r(k) \longrightarrow Gl_N(k)$, definimos E_ρ, de rango N, mediante $\rho(g_{ij})$. En part, $\det : Gl_r(k) \to k^*$ determina un <u>fibrado en rectas</u> $\det(E)$ con funciones de transición $\det(g_{ij})$. Más aún, $\det(E) \cong \Lambda^r E$.

<u>Caso particular importante</u>: Sean $L \to X$ y $M \to X$ <u>fibrados en rectas</u> dados por funciones de transición g_{ij} y h_{ij} (en un cubrimiento abierto común), resp. Entonces:

i) $k_{ij} = g_{ij} h_{ij} = h_{ij} g_{ij}$ satisfacen la condición de cociclo y definen $L \otimes M \cong M \otimes L$ fibrado en rectas!

ii) El fibrado en rectas trivial $k_X = X \times \mathbb{A}^1$ (con $k_{ij} = 1$) verifica $k_X \otimes L \cong L \otimes k_X \cong L$.

iii) El dual $L^\vee$ con funciones de transición $g_{ij}^\vee = 1/g_{ij}$ verifica $L \otimes L^\vee \cong L^\vee \otimes L \cong k_X$.

Def: Sea X una variedad algebraica. Definimos el <u>grupo de Picard</u> de X como el grupo abeliano $Pic(X) := \{\text{Fibrados en rectas en } X\} / \text{isomorfismo}$.

<u>Ejemplo principal</u>: En $\mathbb{P}(V) \cong \mathbb{P}^n$, definimos $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1) := \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-1)^\vee$ mediante $g_{ij} = \frac{x_j}{x_i}$.

En general, para $d \in \mathbb{Z}$ definimos $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d)$ mediante $g_{ij} = \left(\frac{x_j}{x_i}\right)^d$.