§19. Normalización y Teorema principal de Zariski

Recuerdo (clausura integral): Recordemos (ver §15, pág 48) que si $\varphi : A \to B$ es un morfismo de anillos y $x \in B$, entonces x es entero sobre A (resp. a φ) si:

① $\exists\, P = X^n + \sum_{i=1}^{n} \varphi(a_i) X^{n-i}$ tq $P(x) = 0$ $\Leftrightarrow$ ② $A[x] \subseteq B$ es un A-módulo finitamente gen.

Obs: En part, si $x, y \in B$ son enteros sobre A entonces $x \pm y$, $xy \in B$ también (pues $A[x,y]$ fin. gen.)

El álgebra $\overline{A} = \{ b \in B$ tal que b es entero sobre $A \} \subseteq B$ es la clausura integral de A en B.

En part, B es entero sobre $A \underset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \overline{A} = B$.

Def: Decimos que A es integralmente cerrado en B si $\overline{A} = A =: \varphi(A)$, ie, si $b \in B$ es entero sobre A entonces $b = \varphi(a)$ para cierto $a \in A$.

Ejemplo: $\mathbb{Z}$ es integralmente cerrado en $\mathbb{Q}$. En general, si $\mathbb{Q} \subseteq K$ extensión finita (ie, K es un cuerpo de números) entonces $\overline{\mathbb{Z}} := \mathcal{O}_K$ es el anillo de enteros de K.

Ejemplo: Sea $X = \{(x,y) \in \mathbb{A}^2$ tq $y^2 = x^2 + x^3\}$ cúbica nodal $\propto$. Entonces, $t = \frac{y}{x} \in k(X)$ es entero sobre $\mathcal{O}(X)$, pues $t^2 = 1 + x$, pero $t \notin \mathcal{O}(X)$.

Hechos ① Sea B una A-álgebra y C una B-álgebra. Si $x \in C$ entonces:

a) Si x entero sobre A, entonces x es entero sobre B.

b) Si B es un A-módulo finitamente generado y x entero sobre B, entonces x entero sobre A

② $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$.

Terminología: Sea A un dominio entero y $Fr(A)$ su cuerpo de fracciones. La clausura integral $\overline{A}$ de A en $Fr(A)$ es llamada la normalización de A. En particular, decimos que A es normal si $A = \overline{A}$ en $Fr(A)$, ie, todo $x \in Fr(A)$ entero sobre A pertenece a A.

Def: Sea X una variedad alg. irreducible. Decimos que $x \in X$ es un punto normal (o que X es normal en $x \in X$) si $\mathcal{O}_{X,x}$ es normal, ie, si $\mathcal{O}_{X,x}$ es integralmente cerrado en $k(X)$. Decimos que X es una variedad normal si todo $x \in X$ es normal.

Ejemplo: Sea X una variedad afín irreducible. Entonces, X es normal si y sólo si $\mathcal{O}(X)$ es integralmente cerrado en $k(X)$:

En efecto, si $\mathcal{O}(X)$ es integralmente cerrado y $u \in k(X)$ cumple que para todo $x \in X$ existen $a_i \in \mathcal{O}_{X,x}$ con $u^n + a_1 u^{n-1} + \ldots + a_n = 0$, entonces si escribimos $a_i = \frac{P_i}{Q_i}$ con $P_i, Q_i \in \mathcal{O}(X)$ y $Q_i(x) \neq 0$ tenemos que $v := u Q_1 \cdots Q_n$ es entero sobre $\mathcal{O}(X)$ y luego $v \in \mathcal{O}(X)$.
$\Rightarrow u \in \mathcal{O}_{X,x}$ pues $Q_i(x) \neq 0$.

Recíprocamente, si X es normal y $u \in k(X)$ cumple que existen $a_i \in \mathcal{O}(X)$ tales que $u^n + a_1 u^{n-1} + \ldots + a_n = 0$, entonces dado que $a_i \in \mathcal{O}_{X,x}$ $\forall x \in X \Rightarrow u \in \bigcap_{x \in X} \mathcal{O}_{X,x} = \mathcal{O}(X)$ ✓

Obs: En particular, la cúbica nodal no es normal!

Ejemplo: Sea X una variedad alg. irreducible y $x \in X$ un punto suave. Entonces $x \in X$ es normal

En efecto, podemos sup. que X es afín y consideramos $u \in k(X) = Fr(\mathcal{O}(X))$ tal que $u^n + a_1 u^{n-1} + \ldots + a_n = 0$ para ciertos $a_i \in \mathcal{O}_{X,x}$. Dado que $\mathcal{O}_{X,x}$ es un anillo factorial, podemos escribir $u = \frac{p}{q}$ con $p, q \in \mathcal{O}_{X,x}$ primos relativos.

$\Rightarrow p^n + a_1 p^{n-1} q + \ldots + a_n q^n = 0$ por lo que q divide a $p^n \Rightarrow q$ es una unidad, ie, $q(x) \neq 0$ y luego $u \in \mathcal{O}_{X,x}$ ✓

Recordemos (ver §17, pág 60) que si X es suave y $Y \subseteq X$ subvar cerrada de codimensión pura 1 entonces todo punto $y \in Y$ admite una vecindad afín $\mathcal{U} \subseteq X$ tal que $\mathcal{I}(\mathcal{U} \cap Y)$ es un ideal principal (ie, generado por 1 elemento). Si X es normal un poco menos es verdad:

Prop: Sea X una variedad alg. <u>normal</u> y $Y \subseteq X$ subvar cerrada de codimensión pura 1. Entonces, existe un abierto afín $\mathcal{U} \subseteq X$ tal que $\mathcal{U} \cap Y \neq \emptyset$ y $f : \mathcal{U} \to k$ función regular tal que $\mathcal{I}(\mathcal{U} \cap Y) = \langle f \rangle$.

Dem: Notamos que podría ocurrir que $Y \subseteq X_{sing}$, por lo que no podemos simplemente considerar $\mathcal{U} = Y \cap X_{reg}$. Sin embargo, podemos suponer que X afín e $Y = V(\mathfrak{p})$ irreducible, con $\mathfrak{p} \subseteq \mathcal{O}(X)$ ideal primo. Considerando $f \in \mathfrak{p}$ no-nulo, tenemos que $V(g) \subseteq Y$ y luego $Y = V(g)$.
Nullstellensatz $\Rightarrow \mathcal{I}(Y) = \sqrt{\langle g \rangle}$, i.e., $\mathcal{I}(Y)^{\ell} \subseteq \langle g \rangle \subseteq \mathcal{I}(Y)$ para cierto $\ell \in \mathbb{N}^{\geq 1}$ minimal.
Veamos que <u>localmente</u> $\ell = 1$: Sup. que $\ell \geq 2$ y sean $u_1, \ldots, u_{\ell-1} \in \mathcal{I}(Y)$ tales que $h := u_1 \cdots u_{\ell-1} \notin \langle g \rangle$ pero $ah \in \langle g \rangle$ para todo $a \in \mathcal{I}(Y)$.
$\Rightarrow u := \frac{h}{g} \notin \mathcal{O}(X)$ pero $u\mathcal{I}(Y) \subseteq \mathcal{O}(X)$. Notamos que $u\mathcal{I}(Y) \not\subseteq \mathcal{I}(Y)$, pues sino existirían $p_1, \ldots, p_N \in \mathcal{I}(Y)$ generadores tq $u p_i = \sum_{j=1}^{N} a_{ij} p_j$, con $a_{ij} \in \mathcal{O}(X)$, es decir:
$(u I_N - a_{ij})_{i,j} \begin{pmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_N \end{pmatrix} = 0 \underset{\text{comatriz}}{\leadsto} \det(u I_N - a_{ij}) = 0 \Rightarrow u \in \mathcal{O}(X)$ pues X es normal !
Luego, existe $f \in \mathcal{I}(Y)$ tq $v := fu \notin \mathcal{I}(Y)$, i.e., $Y \not\subseteq V(v) \subseteq X$. Así, en el abierto $\mathcal{U} = \{v \neq 0\}$ (que intersecta Y) tenemos $f^{-1}\mathcal{I}(Y) = v^{-1} u \mathcal{I}(Y) \subseteq \mathcal{O}(\mathcal{U})$, i.e., $\mathcal{I}(\mathcal{U} \cap Y) = \langle f \rangle$ ∎

Teorema: Sea X una variedad alg. <u>normal</u>. Entonces, $\operatorname{codim}_X \operatorname{Sing}(X) \geq 2$, i.e., X es "suave en codimensión 1".

Dem: Sup. que $\operatorname{Sing}(X)$ posee una comp. irreducible Y de codimensión 1. Luego, podemos suponer que X es afín y $\mathcal{I}(Y) = \langle f \rangle$. En part, para $y \in Y$ tenemos

$$\begin{tikzcd} \mathcal{O}_{X,y} \arrow[r, two heads] & \mathcal{O}_{Y,y} = \mathcal{O}_{X,y}/\langle f \rangle \\ \mathfrak{m}_{X,y} \arrow[u, hook] \arrow[r, two heads] & \mathfrak{m}_{Y,y} = \mathfrak{m}_{X,y}/\langle f \rangle \arrow[u, hook] \end{tikzcd}$$

Sea $y \in Y_{reg}$ un punto suave de Y (pero <u>no</u> de X, por hipótesis !). Entonces, $\mathfrak{m}_{Y,y}$ está generado por $v_1, \ldots, v_{n-1}$ (coord. locales en Y) $\Rightarrow \mathfrak{m}_{X,y}$ generado por $v_1, \ldots, v_{n-1}, f$
$\Rightarrow \dim_y(X) = n$ y $\dim_k(\mathfrak{m}_{X,y}/\mathfrak{m}_{X,y}^2) \leq n$, i.e., y es suave en X, contradicción ! ∎

Corolario: Sea C una curva alg. irreducible. Entonces, C suave $\Leftrightarrow$ C normal.

<u>Construcción</u> (Normalización): Sea X una variedad alg. afín <u>irreducible</u>, y consideremos la clausura integral de $\mathcal{O}(X)$ en $k(X)$, i.e., $\mathcal{O}(X) \subseteq A \subseteq k(X)$ con $\overline{\mathcal{O}(X)} = A$. Entonces, A es una k-álgebra finitamente generada y reducida. Luego, podemos considerar la variedad algebraica afín $X^{\nu} := \operatorname{Specm}(A)$ que cumple $\mathcal{O}(X^{\nu}) \cong A$.
Más aún: La inclusión $\mathcal{O}(X) \subseteq \mathcal{O}(X^{\nu})$ induce un morfismo regular $\nu : X^{\nu} \to X$ que es llamado la <u>normalización</u> de X. Por las propiedades de la clausura integral tenemos:

1. X^{ν} es una variedad normal y $\nu : X^{\nu} \to X$ es un isomorfismo en la vecindad de un punto $x \in X$ <u>normal</u> (eg. suave).
2. $\nu : X^{\nu} \to X$ es un morfismo finito y birracional (pues $\operatorname{Fr}(A) = k(X)$).
3. Si $g : Y \to X$ es un morfismo <u>finito</u> y <u>birracional</u>, con Y var. alg afín irreducible.
$\Rightarrow \exists!\, \hat{g} : X^{\nu} \to Y$ tal que $g \circ \hat{g} = \nu$, i.e., el diagrama

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "g"] & X \\ & X^{\nu} \arrow[ul, "\exists!\hat{g}"] \arrow[u, "\nu"'] \end{tikzcd}$$

"g factoriza a la normalización"

es conmutativo.

En efecto, las inclusiones $\mathcal{O}(X) \subseteq \mathcal{O}(Y) \subseteq k(X)$, con $\mathcal{O}(Y)$ entero sobre $\mathcal{O}(X)$ implican que $\mathcal{O}(Y) \subseteq \overline{\mathcal{O}(X)} = \mathcal{O}(X^\nu)$, de donde obtenemos $\hat{g}: X^\nu \to Y$.

④ Si $g: Z \to X$ morfismo regular dominante, con Z var. alg. afín normal.
$\Rightarrow \exists! \ \hat{g}: Z \to X^\nu$ tal que $g = \nu \circ \hat{g}$, ie, el diagrama

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, "g"] \arrow[dr, "\exists! \hat{g}"'] & X \\ & X^\nu \arrow[u, "\nu"'] \end{tikzcd}$$

"g se factoriza a través de la normalización"

es conmutativo.

En efecto, un elemento $u \in \mathcal{O}(X^\nu)$ es entero sobre $\mathcal{O}(X)$ y está contenido en $k(X) \overset{g^*}{\hookrightarrow} k(Z)$. Dado que $\mathcal{O}(X) \overset{g^*}{\hookrightarrow} \mathcal{O}(Z)$, a posteriori u es entero sobre $\mathcal{O}(Z)$ y, dado que $\mathcal{O}(Z)$ es integralmente cerrado, luego $u \in \mathcal{O}(Z)$. Así, $\mathcal{O}(X^\nu) \subseteq \mathcal{O}(Z)$, de donde obtenemos $\hat{g}: Z \to X^\nu$.

⑤ Los puntos ③ y ④ implican que la normalización de X es única (módulo isomorfismo). Más precisamente, si $\nu_1: X_1^\nu \to X$ y $\nu_2: X_2^\nu \to X$ son dos normalizaciones de X, entonces existe un isomorfismo $g: X_1^\nu \xrightarrow{\sim} X_2^\nu$ tal que
$$\begin{tikzcd} X_1^\nu \arrow[rr, "\sim", "g"'] \arrow[dr, "\nu_1"'] & & X_2^\nu \arrow[dl, "\nu_2"] \\ & X & \end{tikzcd}$$
es conmutativo.

Consecuencia: Toda variedad algebraica X posee una "única" normalización $\nu: X^\nu \to X$, obtenida al considerar un atlas algebraico afín de X y pegar las normalizaciones.

[Corolario: Toda curva algebraica es birracional a una curva suave.]

Ejemplo: Sup. que $\mathrm{car}(k) \neq 2$ y sea $X = \{(x,y,z) \in \mathbb{A}^3 \text{ tq } x^2+y^2 = z^2\}$ cono en $\mathbb{A}^3$.
Veamos que X es normal: Los elementos de $k(X)$ son de la forma $u = a + bz$ con $a, b \in k(x,y)$, donde x e y son variables indep. Similar: $u = a+bz \in k(X)$ pertenece a $\mathcal{O}(X)$ si $a, b \in k[x,y]$. En part, $\mathcal{O}(X)$ es $k[x,y]$-mód fin. generado.
$\Rightarrow$ Si $u = a+bz \in k(X)$ es entero sobre $\mathcal{O}(X)$ entonces es entero sobre $k[x,y]$.
Por otro lado, calculando u^2, notamos que el polinomio minimal de u es $P(T) = T^2 - 2aT + a^2 - (x^2+y^2)b^2$ y por ende $2a \in k[x,y]$ (y luego $a \in k[x,y]$) y $a^2 - (x^2+y^2)b^2 \in k[x,y] \Rightarrow (x^2+y^2)b^2 \in k[x,y]$.
Notamos que $(x^2+y^2) = (x+iy)(x-iy)$ es producto de elementos irreducibles y luego el denominador de $b \in k(x,y)$ divide al numerador, ie, $b \in k[x,y]$ ✓ $\Rightarrow u \in \mathcal{O}(X)$.

El siguiente resultado permite apreciar cómo el álgebra conmutativa interviene en un enunciado puramente geométrico, probado por Zariski en 1943:

Teorema principal de Zariski: Sean X e Y variedades alg. irreducibles y sea $f: X \to Y$ un morfismo birracional. Sea $x \in X$ tal que $y = f(x)$ es normal en Y. Entonces:
Caso 1: f es un isomorfismo entre vecindades afines de $x \in X$ e $y \in Y$; o bien
Caso 2: Existe una hipersuperficie irreducible $E \subseteq X$ tal que $x \in E$ y tal que $\mathrm{codim}_Y(\overline{f(E)}) \geq 2$. En particular, $\dim_x f^{-1}(y) \geq 1$.

⚠ En particular, si $f: X \to Y$ morfismo birracional tal que el conjunto de puntos $\{x \in X \text{ tq } \dim_x(f^{-1}(f(x))) \geq 1\}$ no es una hipersuperficie, entonces la imagen de dicho conjunto en Y está contenido en el lugar de puntos no-normales de Y !
Por ejemplo, si $\dim(X) = \dim(Y) = 3$ y f no es un isomorfismo en una curva irred $C \subseteq X$ entonces el punto $f(C) = \{y\}$ no es normal en Y.
La prueba es bastante técnica, por lo que veremos el caso particular donde $y \in Y$ es suave:

Dem (caso $y\in Y$ suave): Podemos sup. que X e Y son afines y consideramos:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{O}(Y) \arrow[r, hook, "f^*"] \arrow[d, symbol=\subseteq] & \mathcal{O}(X) \arrow[d, symbol=\subseteq] \\ \mathcal{O}_{Y,y} \arrow[r, hook, "f^*"] \arrow[d, symbol=\subseteq] & \mathcal{O}_{X,x} \arrow[d, symbol=\subseteq] \\ k(Y) \arrow[r, "f^*", "\cong"'] & k(X) \end{tikzcd}$$

Sean $u_1, \dots, u_N$ generadores de $\mathcal{O}(X)$ (definiendo $X \subseteq \mathbb{A}^N$). Vistas como funciones racionales $u_i = f^*(v_i) = f^*\left(\frac{a_i}{b_i}\right)$ con $a_i, b_i \in \mathcal{O}(Y)$. Dado que $y \in Y$ es <u>suave</u>, $\mathcal{O}_{Y,y}$ es un anillo factorial y podemos suponer que a_i y b_i son primos entre sí.

$\boxed{\text{Caso 1}}$ Si $b_i(y) \neq 0$ $\forall i$, obtenemos una inclusión $\mathcal{O}(Y)_{b_1\cdots b_N} \cong \mathcal{O}(V) \xhookrightarrow{f^*} \mathcal{O}(X)_{f^*(b_1\cdots b_N)} \cong \mathcal{O}(\mathcal{U})$ donde $V = \{y \in Y \text{ tq } (b_1 \cdots b_N)(y) \neq 0\}$ y $\mathcal{U} = f^{-1}(V)$. Veamos que $\mathcal{U} \cong V$:

Notamos que $u_i = \dfrac{f^*(a_i)}{f^*(b_i)} = \dfrac{f^*(a_i)\prod_{j\neq i} f^*(b_j)}{f^*(b_1 \cdots b_N)}$ está en la imagen de f^*, i.e., f^* sobreyectivo ✓

$\boxed{\text{Caso 2}}$ Si $b_1(y) = 0$: En $\mathcal{O}_{Y,y}$ escribimos $b_1 = c_1 d_1$ con c_1 irreducible tq $c_1(y) = 0$. Si escribimos $a_1 = a_1'/a_1''$ y $c_1 = c_1'/c_1''$ y nos restringimos a abiertos afines de X e Y donde $a_1'' \neq 0$, $c_1'' \neq 0$, $f^*(a_1'') \neq 0$, $f^*(c_1'') \neq 0$, podemos sup. que $a_1, c_1 \in \mathcal{O}(Y)$ y $f^*(a_1), f^*(c_1) \in \mathcal{O}(X)$. Sea $E = V(f^*(c_1)) \subseteq X$ hipersuperficie, y notar que $x \in E$ pues $f^*(c_1)(x) = c_1(f(x)) = c_1(y) = 0$. Más aún, considerando una comp. irred. de E que pasa por x, podemos sup. que E es irreducible. Veamos que $\operatorname{codim}_Y \overline{f(E)} \geq 2$:

Notamos que $f^*(a_1) = f^*(b_1)u_1 = f^*(c_1)f^*(d_1)u_1$ y luego a_1 se anula en $\overline{f(E)}$.

Así, dado que a_1 y c_1 son primos entre sí en $\mathcal{O}_{Y,y}$ (ecuaciones independientes)
$\Rightarrow \overline{f(E)} \subsetneq V(c_1) \subsetneq Y$ y luego $\operatorname{codim}_Y \overline{f(E)} \geq 2$. ■

<u>Consecuencia</u>: Sea X una curva irreducible e Y una curva <u>suave</u>. Si $f: X \to Y$ es un morfismo birracional, entonces $f(X) \subseteq Y$ es un abierto y f induce un isomorfismo $X \cong f(X)$. En particular, X es suave!

<u>Cultura general</u> (Resultados importantes, sin demostración):

En 1957, Zariski generaliza el resultado anterior a morfismos más generales.

<u>Teorema de conectividad de Zariski</u>: Sean X e Y variedades alg. irreducibles y sea $f: X \to Y$ un morfismo dominante. Si X es <u>proyectiva</u> y las fibras generales de f son <u>conexas</u>, entonces para todo $y \in Y$ punto <u>normal</u>, la fibra $f^{-1}(y)$ es conexa.

<u>Obs</u>: Notar que si f es birracional las fibras generales son singletons (conexos!).

Otra consecuencia de los teoremas de Zariski es el siguiente resultado de Stein (1956):

<u>Teorema</u> (Factorización de Stein): Sean X e Y variedades alg. irreducibles <u>proyectivas</u> y sea $f: X \to Y$ un morfismo regular. Entonces, podemos factorizar f como

$$f: X \xrightarrow{f'} Y' \xrightarrow{g} Y,$$

donde Y' es una variedad alg. irreducible proyectiva, $f: X \to Y'$ tiene fibras <u>conexas</u> y $g: Y' \to Y$ es un morfismo finito. Más aún, si X es <u>normal</u> entonces Y' es <u>normal</u>.

<u>Obs</u>: En particular, todo morfismo (no-constante) entre <u>curvas</u> alg. irreducibles proyectivas $f: X \to Y$ se factoriza en un morfismo biyectivo f' y un morfismo finito g. Además, en $\operatorname{car}(k) = p > 0$, f' puede <u>no</u> ser un isomorfismo (cf. $f': \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$, $[x,y] \mapsto [x^p, y^p]$).

$\boxed{\text{Ejercicio / Pregunta}}$* ¿Qué se puede decir de f? La respuesta depende del hecho si X y/o Y suave, f birracional o no, y si $\operatorname{car}(k) = 0$ o $p > 0$.