§18. Morfismos suaves y Teorema de Bertini

Recordemos que si $f : X \to Y$ es un morfismo regular entre variedades algebraicas y si $x \in X$, entonces el morfismo $f^* : \mathcal{O}_{Y,y} \to \mathcal{O}_{X,x}$, donde $y = f(x)$, induce una aplicación k-lineal

$$d_x f : T_x X \longrightarrow T_y Y \ , \ D \longmapsto D \circ f^* .$$

Además, si $g : Y \to Z$ es otro morfismo regular, entonces $d_x(g \circ f) = (d_y g) \circ (d_x f)$.

Ejemplo: Sea $f : X \to Y$ morfismo regular y $x \in X$. Si denotamos por $X_x := f^{-1}(f(x))$ la fibra de f que pasa por x, entonces la composición $X_x \overset{i}{\hookrightarrow} X \xrightarrow{f} Y$ es constante.
$\Rightarrow d_x(f \circ i) = 0 = d_x(f) \circ d_x(i)$, ie, $\mathrm{Im}(d_x i) \subseteq \ker(d_x f : T_x X \to T_y Y)$.
Sin embargo, la inclusión puede ser estricta: Sea $f : \mathbb{A}^3 \to \mathbb{A}^2$, $(x,y,z) \mapsto (z, x^2 z + y^2)$ y sup. que $\mathrm{car}(k) \neq 2$. Entonces, la matriz de $d_{(x,y,z)} f$ es

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2xz & 2y & x^2 \end{pmatrix},$$

por lo que $d_x f$ es sobreyectiva salvo si $xz = y = 0$, en cuyo caso $\mathrm{rg}(d_x f) = 1$.
Por otro lado, la fibra de $(z,t) \in \mathbb{A}^2$ es $V(x^2 z + y^2 - t) \subseteq \mathbb{A}^3$ (~~curva~~ algebraica).
Si $t = 0$ la fibra es singular (dos rectas que se intersectan), salvo si $t = z = 0$, en cuyo caso se tiene $V(y^2) = V(y)$ ("recta doble").

Obs: En part, la función $x \mapsto \dim_k T_x(X_x)$ no es semi-continua superior. El problema es que la fibra conjuntista no percibe multiplicidades: es "mejor" la fibra esquemática!

Prop: Sea $f : X \to Y$ un morfismo regular entre variedades algebraicas. Entonces, la función $X \to \mathbb{N}$, $x \mapsto \dim_k \ker(d_x f)$ es semi-continua superior, ie, para todo $r \in \mathbb{N}$ el conjunto

$$\{x \in X \text{ tal que } \dim_k \ker(d_x f) \geq r\}$$

es cerrado en X.

Dem: La afirmación es local, por lo que podemos suponer que $X \subseteq \mathbb{A}^n$ e $Y \subseteq \mathbb{A}^m$ son afines, donde $I(X) = \langle g_1, \ldots, g_s \rangle$ y $f : \mathbb{A}^n \to \mathbb{A}^m$ dado por $f = (f_1, \ldots, f_m)$. El conjunto en cuestión está dado por la condición $\dim_k \left(\ker\left(\frac{\partial g_i}{\partial x_j}\right) \cap \ker\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)\right) \geq r$, es decir, $\mathrm{rg}\begin{pmatrix} \left(\frac{\partial g_i}{\partial x_j}\right) \\ \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right) \end{pmatrix} \leq n - r$, que es una condición cerrada ✓ ∎

Def: Sean X e Y variedades algebraicas suaves e irreducibles. Decimos que un morfismo regular $f : X \to Y$ es suave en $x \in X$ si $d_x f : T_x X \twoheadrightarrow T_{f(x)} Y$ es sobreyectiva, y decimos que f es un morfismo suave si es suave para todo $x \in X$.

⚠ Terminología: Un morfismo étale es un morfismo suave $f : X \to Y$ de dimensión relativa cero, ie, $\dim(f^{-1}(y)) = 0$ para todo $y \in Y$. Es la versión algebraica de un "revestimiento".

Obs: La Proposición anterior implica que el conjunto de puntos $x \in X$ donde $f : X \to Y$ es suave es un abierto (eventualmente vacío). Veremos que si $\mathrm{car}(k) = 0$ es no-vacío.

Ejemplos: ① La composición de morfismos suaves (resp. étale) es suave (resp. étale).

② Las proyecciones $pr_1 : X \times Y \to X$ y $pr_2 : X \times Y \to Y$ son suaves.

③ Sean X e Y curvas suaves e irreducibles. Entonces, $d_x f : T_x X \cong k \to T_{f(x)} Y \cong k$ es una homotecia, ie, $d_x f = f'(x) \mathrm{Id}_k$. Luego, f es suave en $x \in X \iff f'(x) \neq 0$.

④ Sea $f : \mathbb{A}^1 \to \mathbb{A}^1$, $x \mapsto x^d$. Entonces $f'(x) = d x^{d-1}$. En particular, si $\mathrm{car}(k)$ divide d entonces no es suave en ningún punto! Si $\mathrm{car}(k)$ no divide d, f es suave para $x \neq 0$.

⑤ La inclusión $f : \mathbb{A}^1 \setminus \{0\} \hookrightarrow \mathbb{A}^1$ es étale, pero no es finito (la imagen no es cerrada).

Prop: Sean X e Y variedades alg. suaves e irreducibles, y sea $f: X \to Y$ morfismo suave. Entonces:

① Toda fibra no-vacía $f^{-1}(y)$ es de dimensión pura $\dim(X) - \dim(Y)$.

② f es dominante.

③ Si $Z \subseteq Y$ subvar. cerrada suave, entonces $f^{-1}(Z)$ es suave. En part, toda fibra no-vacía es suave (pero no necesariamente irreducible).

Dem: Sea $X_x := f^{-1}(f(x))$ la fibra que pasa por $x \in X$. Luego, para $X_x \overset{i}{\hookrightarrow} X \xrightarrow{f} Y$ se tiene
$\dim_x(X_x) \leq \dim_k(T_x X_x) = \dim_k \ker(d_x i) \leq \dim_k \ker(d_x f) = \dim(X) - \dim(Y)$,
donde la última igualdad se obtiene pues $d_x f$ es sobreyectiva. Por otra parte,
$\dim_x(X_x) \geq \dim(X) - \dim(\overline{f(X)})$ (ver §16, pág 54). Así:
$\dim(X) - \dim(Y) \leq \dim(X) - \dim(\overline{f(X)}) \leq \dim_x(X_x) \leq \dim(X) - \dim(Y) \rightsquigarrow$ ① y ② ✓

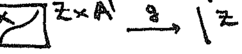
Obs: Más aún, $T_x X_x = \ker(d_x f)$ en este caso.

Para ③ supongamos que $\operatorname{codim}_Y(Z) = r$ y sea $z \in f^{-1}(Z)$. Como $d_z(f|_{f^{-1}(Z)}): T_z f^{-1}(Z) \to T_{f(z)} Z$, el teorema del rango implica que:
$$\dim_k T_z f^{-1}(Z) - \dim_k \ker(d_z f|_{f^{-1}(Z)}) = \dim_k (d_z f)(T_z f^{-1}(Z)) \leq \dim_k T_{f(z)} Z,$$
donde $\dim_k T_{f(z)} Z = \dim(Z)$ (pues Z suave) y $\dim_k \ker(d_z f|_{f^{-1}(Z)}) \leq \dim_k \ker(d_z f)$, con $\dim_k \ker(d_z f) = \dim(X) - \dim(Y)$ (pues f suave) $\Rightarrow \dim_k T_z f^{-1}(Z) \leq \dim(X) - r$ (*)
Sean $u_1, \dots, u_m$ coord. locales en una vecindad afín de $f(z) \in V \subseteq Y$, tal que $Z \cap V$ sea irreducible y $Z \cap V = V(u_1, \dots, u_r)$ (ver §17, pág 59) $\Rightarrow f^{-1}(V) \cap f^{-1}(Z) = V(u_1 \circ f, \dots, u_r \circ f)$ en $f^{-1}(V) \subseteq X$. Luego, $\dim_z(f^{-1}(Z)) \geq \dim(X) - r$ (**). Luego, (*) + (**) $\Rightarrow$ ③ ✓ ■

El teorema de Sard (1942) en geometría diferencial afirma que el conjunto de puntos donde una función $\mathscr{C}^\infty$ entre var. diferenciables $f: M \to N$ no es suave tiene medida nula. En geometría algebraica, dicho resultado se conoce como "suavidad genérica":

Lema: Sup. que $\operatorname{car}(k) = 0$. Sean X e Y variedades alg. irreducibles y $f: X \to Y$ un morfismo regular dominante. Entonces, existen abiertos no-vacíos suaves $V \subseteq Y_{reg}$ y $\mathcal{U} \subseteq X_{reg}$ con $\mathcal{U} \subseteq f^{-1}(V)$, y tales que el morfismo $f|_{\mathcal{U}}: \mathcal{U} \to V$ es suave.

Dem: Podemos suponer que X e Y son afines suaves y considerar $f^*: k(Y) \hookrightarrow k(X)$ extensión de cuerpos. Sea $u_1, \dots, u_{n-m} \in k(X)$ base de trascendencia de $k(X)$ sobre $k(Y)$. Restringiéndose al abierto donde cada u_i es regular, podemos sup. que $u_1, \dots, u_{n-m} \in \mathcal{O}(X)$ y obtenemos $\mathcal{O}(Y) \hookrightarrow \mathcal{O}(Y)[u_1, \dots, u_{n-m}] \hookrightarrow \mathcal{O}(X)$, ie, una factorización $f: X \xrightarrow{g} Y \times \mathbb{A}^{n-m} \xrightarrow{\pi} Y$.
Dado que $f = \pi \circ g$ y π es suave, basta ver que $g: X \to Z$ es suave localmente, donde $Z := Y \times \mathbb{A}^{n-m}$: sabemos que la extensión $g^*: k(Z) \hookrightarrow k(X)$ es finita y algebraica. Luego, como $\operatorname{car}(k) = 0$, es separable y existe $t \in k(X)$ tq $k(X) = k(Z)(t)$ (ver §17, p.57).
Así, existe $P \in k(Z)[T]$ tal que $P(t) = 0$, y restringiéndonos al abierto de Z donde los coeficientes de P son regulares obtenemos $P \in \mathcal{O}(Z)[T]$ y así $k(X) \cong \operatorname{Fr}(\mathcal{O}(Z)[T]/\langle P \rangle)$, ie, $X \underset{bir}{\simeq} V(P) \subseteq Z \times \mathbb{A}^1$. Luego, restringiéndonos a un abierto, podemos suponer que $X = V(P) \subseteq Z \times \mathbb{A}^1$ y así $g: X = V(P) \hookrightarrow Z \times \mathbb{A}^1 \xrightarrow{pr_1} Z$.



En $x = (z, t) \in X$, el espacio tangente $T_x X \subseteq T_z Z \oplus k$ está dado por el kernel de $\left(\left(\frac{\partial P}{\partial z_i}(x)\right)_i \ \frac{\partial P}{\partial T}(x) \right)$. Además, la aplicación lineal $d_x g: T_x X \to T_z Z$ está inducida por la proyección $pr_1: T_z Z \oplus k \twoheadrightarrow T_z Z$, $\left(\frac{\partial}{\partial z_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial z_m}, \frac{\partial}{\partial T}\right) \mapsto \left(\frac{\partial}{\partial z_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial z_m}\right)$. Luego, g es suave en cualquier $x = (z, t)$ tq $\frac{\partial P}{\partial T}(z, t) \neq 0$, lo cual ocurre en $\operatorname{car}(k) = 0$. ■

Teorema (suavidad genérica): Sup. que $car(k)=0$. Sean X e Y variedades alg. irreducibles y $f: X \to Y$ un morfismo dominante. Entonces, para todo $r \in \mathbb{N}$ consideramos el conjunto

$$Z_r := \{x \in X \text{ tal que } rg(d_x f) \leq r\} \subseteq X.$$

Entonces, $\dim(\overline{f(Z_r)}) \leq r$. En particular, existe $V \subseteq Y_{reg}$ abierto denso suave tal que $f|_{f^{-1}(V) \cap X_{reg}}: f^{-1}(V) \cap X_{reg} \to V$ es un morfismo suave.

Dem: Sea Y' una componente irred. de $\overline{f(Z_r)}$, y sea X' una componente irred. de $\overline{Z_r} \cap f^{-1}(Y')$ tal que $f_r := f|_{X'}: X' \to Y'$ sea dominante. Por el lema anterior, existe un punto suave $x \in X'$ tal que $f_r(x)$ es suave en Y' y $d_x f_r : T_x X' \twoheadrightarrow T_{f_r(x)} Y'$ es sobreyectiva.
Dado que lo anterior es una propiedad abierta, podemos suponer que $x \in Z_r$ y luego:

$$\dim(Y') \leq \dim_k T_{f_r(x)} Y' = rg(d_x f_r) \leq rg(d_x f) \leq r \quad \checkmark$$

En part, $Z = Z_{m-1} \subsetneq Y$ cerrado propio, con $m = \dim(Y)$. Basta considerar $V = Y_{reg} \cap (Y \setminus Z)$. ■

Obs: En part, si X es suave la fibra "general" de $f: X \to Y$ dominante es suave!

Corolario: Sup. que $car(k)=0$. Sea X una variedad alg. suave e irreducible y sea $f: X \to \mathbb{P}(V)$ un morfismo regular. Si $[H] \in \mathbb{P}(V^*)$ es un hiperplano general, entonces $f^{-1}(H)$ es suave.

Dem: Podemos sup. que $\dim(X) \geq 1$. Consideremos la variedad de incidencia

$$I = \{(x, [H]) \in X \times \mathbb{P}(V^*) \text{ tal que } f(x) \in H\}.$$

Si $(x,[H]) \in I$, escogemos coord. de $V \cong k^{n+1}$ tal que $f(x) = [0, \ldots, 0, 1]$ y $H = \{x_0 = 0\}$.
Sean $f_0, \ldots, f_{m-1}$ funciones regulares en una vecindad $\mathcal{U} \subseteq X$ de x tal que

$$f(x) = [f_0(x), \ldots, f_{m-1}(x), 1] \quad \text{para todo } x \in \mathcal{U}.$$

Además, todo hiperplano en una vecindad $V \subseteq \mathbb{P}(V^*) = G(n-1, n)$ de H tiene ecuación $x_0 + a_1 x_1 + \ldots + a_m x_m = 0$. Luego, I está definida en una vecindad de $(x, [H])$ por

$$\{P := f_0(x) + a_1 f_1(x) + \ldots + a_{m-1} f_{m-1}(x) + a_m = 0\} \subseteq \mathcal{U} \times \mathbb{A}^n.$$

Como $\frac{\partial P}{\partial a_m} = 1 \neq 0$, tenemos que I es suave (criterio Jacobiano).
Las fibras de la proyección $\pi := pr_1 : I \to X$ son hiperplanos en $\mathbb{P}(V^*)$:

$$\pi^{-1}(x) = \{[H] \in \mathbb{P}(V^*) \text{ tq } f(x) \in H\} \cong \{[a_0, \ldots, a_m] \in \mathbb{P}^n \text{ tq } f_0(x) a_0 + \ldots + f_m(x) a_m = 0\} \cong \mathbb{P}^{n-1}$$

$\Rightarrow I$ es irreducible (de dimensión $\dim(X) + n - 1$) por el Criterio de Irreducibilidad (cf. §16, p.55).
Así, si consideramos $g := pr_2 : I \to \mathbb{P}(V^*)$ y notamos que $g^{-1}([H]) \cong f^{-1}(H)$, tenemos que la fibra general es vacía o bien g es dominante y $f^{-1}(H)$ es suave para H general. ■

Teorema de Bertini: Sea $X \subseteq \mathbb{P}^n$ variedad suave e irreducible de $\dim(X) \geq 1$, y sea H un hiperplano general de $\mathbb{P}^n$. Entonces, la sección hiperplana $X \cap H$ es suave.

Dem: Considerar la inclusión $f: X \hookrightarrow \mathbb{P}^n$, donde $f^{-1}(H) = X \cap H$. ■

Obs: En general, los "Teoremas tipo Bertini" se refieren a resultados afirmando que cierta propiedad de X (eg. suave, irred, conexa, etc) se preserva al considerar secciones hiperplanas (generales o arbitrarias) $X \cap H$. Por ejemplo (ver Harris, "Algebraic Geometry" o Hartshorne "Algebraic Geometry"):

Teorema: Sea X variedad alg. irreducible, $f: X \to \mathbb{P}^n$ morfismo regular y $H \subseteq \mathbb{P}^n$ un hiperplano general. Si $\dim(\overline{f(X)}) \geq 2$, entonces $f^{-1}(H)$ es irreducible.