§17. Espacio tangente de Zariski, variedades suaves y singulares

Sea X una variedad algebraica y $x \in X$ un punto. Recordemos que el tallo $\mathcal{O}_{X,x}$ de gérmenes de funciones regulares en $x \in X$ es una k-álgebra que posee un único ideal maximal

$$\mathfrak{m}_x = \{ f \in \mathcal{O}_{X,x} \text{ tal que } f(x) = 0 \}$$

ie, $\mathcal{O}_{X,x}$ es un anillo local (ver §3, pág 9). Además, $\mathcal{O}_{X,x}/\mathfrak{m}_x \cong k$.

Def: Un vector tangente en $x \in X$ es una aplicación k-lineal $D: \mathcal{O}_{X,x} \to k$ que cumple la regla de Leibniz: $D(fg) = f(x)D(g) + g(x)D(f)$. Así, el espacio tangente de Zariski en el punto $x \in X$ es el k-ev dado por $T_{X,x} := \{ D: \mathcal{O}_{X,x} \to k \text{ vector tangente en } x \in X \}$.

Prop: Hay un isomorfismo de k-evs $T_x X \cong (\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2)^*$. En particular, $T_x X$ es un k-ev de dimensión finita.

Dem: Sea $D: \mathcal{O}_{X,x} \to k$ vector tangente. Notar que $D(1) = D(1 \cdot 1) = D(1) + D(1) = 0$. Además, si consideramos $D|_{\mathfrak{m}_x}: \mathfrak{m}_x \to k$, la regla de Leibniz implica que si $f, g \in \mathfrak{m}_x$ $\Rightarrow D(fg) = 0$, ie, $\mathfrak{m}_x^2 \subseteq \ker(D|_{\mathfrak{m}_x})$. Luego, podemos considerar la aplicación lineal inducida $\overline{D}: \mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2 \to k$ en $(\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2)^*$.

Así, basta verificar que la aplicación lineal $\varphi: T_x X \to (\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2)^*$, $D \mapsto \overline{D}$ es un isomorfismo: Para la inyectividad notamos que todo $f \in \mathcal{O}_{X,x}$ se escribe como $f = f(x) + f_0$ con $f_0 \in \mathfrak{m}_x$. Luego, si $\varphi(D) = \overline{D} = 0$ entonces $D(f) = D(f(x)) = 0$, pues $f(x) \in k$ ✓

Para la sobreyectividad consideramos $\nabla: \mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2 \to k$ lineal y definimos para $f \in \mathcal{O}_{X,x}$ $D(f) := \nabla([f_0])$, donde $[f_0]$ es la clase de $f_0 = f - f(x) \in \mathfrak{m}_x$ en $\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2$.

$$\Rightarrow 0 = \nabla([f_0 g_0]) \underset{\text{def}}{=} D(f_0 g_0) = \nabla([fg - f(x)g - g(x)f + f(x)g(x)])$$
$$= D(fg) - f(x)D(g) - g(x)D(f) \quad \text{para todos } f, g \in \mathcal{O}_{X,x}$$

ie, $D \in T_{X,x}$. Más aún, $\varphi(D) = \nabla$ por definición ✓

Finalmente, dado que $\mathcal{O}_{X,x}$ es un anillo noetheriano, $\mathfrak{m}_x$ es fin. generado por ciertos $u_1, \dots, u_N \in \mathfrak{m}_x$ y sus imágenes $[u_1], \dots, [u_N] \in \mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2$ son generadoras como $\mathcal{O}_{X,x}/\mathfrak{m}_x$-mód ∎

$\boxed{\text{Ejercicio}}$ Probar que $T_{(x,y)}(X \times Y) \cong T_x X \oplus T_y Y$, con $x \in X$ e $y \in Y$ var. algebraicas.

Importante (Functorialidad): Sea $f: X \to Y$ un morfismo regular entre var. algebraicas y sea $x \in X$. Si escribimos $y = f(x) \in Y$, entonces hay un morfismo de k-álgebras $f^*: \mathcal{O}_{Y,y} \to \mathcal{O}_{X,x}$, $u \mapsto u \circ f$. Luego, obtenemos una aplicación k-lineal

$$d_x f: T_x X \longrightarrow T_y Y, \quad D \longmapsto D \circ f^*$$

llamada el diferencial de f en $x \in X$.

Ejemplos: ① Si $X = \mathbb{A}^n$ y $p = (p_1, \dots, p_n) \in \mathbb{A}^n$, entonces $\mathfrak{m}_p = \langle X_1 - p_1, \dots, X_n - p_n \rangle$. Luego, $T_p \mathbb{A}^n \cong k^n$ con base dada por las derivaciones usuales $D_i(f) = \frac{\partial f}{\partial X_i}(p)$, ie, todo vector tangente en p es de la forma $f \mapsto a_1 \frac{\partial f}{\partial X_1}(p) + \dots + a_n \frac{\partial f}{\partial X_n}(p)$, con $a_i \in k$.

② Sea $f: \mathbb{A}^n \to \mathbb{A}^m$, $x \mapsto (f_1(x), \dots, f_m(x))$ morfismo regular y $p \in \mathbb{A}^n$, entonces la matriz del diferencial $d_p f: T_p \mathbb{A}^n \cong k^n \to T_{f(p)} \mathbb{A}^m \cong k^m$ respecto a las bases (canónicas) del Ejemplo ① es la matriz jacobiana

$$J_f = \left(\frac{\partial f_i}{\partial X_j}(p) \right)_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}} \in M_{m \times n}(k).$$

Prop: Sea $X \subseteq \mathbb{A}^n$ variedad algebraica afín, donde $\mathcal{I}(X) = \langle f_1, \dots, f_m \rangle \subseteq \mathcal{O}(\mathbb{A}^n)$, y sea $x \in X$. Entonces, $T_x X \cong \ker(d_x f)$, donde $f : \mathbb{A}^n \to \mathbb{A}^m$, $x \mapsto (f_1(x), \dots, f_m(x))$.

Dem: El isomorfismo $\mathcal{O}(X) \cong \mathcal{O}(\mathbb{A}^n)/\mathcal{I}(X)$ implica que $\mathcal{O}_{X,x} \cong \mathcal{O}_{\mathbb{A}^n,x}/\langle f_1, \dots, f_m\rangle$, por lo que un vector tangente de X en x es un vector tangente de $\mathbb{A}^n$ en x que se anula en $\langle f_1, \dots, f_m \rangle$, ie, $T_x X \cong \{ D \in T_x \mathbb{A}^n \cong k^n \text{ tq } D(f_i) = 0 \ \forall i \} = \ker(d_x f)$. ■

Ejemplo: Sea $C = \{(x,y) \in \mathbb{A}^2 \text{ tq } y^2 = x^3\}$ con $\mathcal{I}(C) = \langle Y^2 - X^3 \rangle$. Sea $f(X,Y) = Y^2 - X^3$ y $P = (a,b) \in C$. Entonces, $d_P f = (-3X^2 \ \ 2Y)|_{(a,b)} = (-3a^2 \ \ 2b)$ (vector fila). Luego,

$$\dim T_P C = \begin{cases} 1 & \text{si } P \neq (0,0) \\ 2 & \text{si } P = (0,0) \end{cases}$$

Corolario: Sea X una variedad algebraica. Entonces, la función $X \to \mathbb{N}$, $x \mapsto \dim_k T_x X$ es semi-continua superior, ie, para todo $r \in \mathbb{N}$ el conjunto

$$\{x \in X \text{ tal que } \dim_k T_x X \geq r\}$$

es cerrado en X. En part, el conjunto donde $\dim_k T_x X$ es minimal es un abierto.

Dem: La afirmación es local, por lo que podemos sup. que $X \subseteq \mathbb{A}^n$ variedad afín, donde $\mathcal{I}(X) = \langle f_1, \dots, f_m \rangle$. La Proposición anterior y el Teorema del rango implican que $\forall x \in X$

$$\dim_k T_x X = n - \operatorname{rg}\left(\left(\frac{\partial f_i}{\partial X_j}(x) \right)_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n} \right).$$

Por otra parte, la función $x \mapsto \operatorname{rg}(J_f(x))$ es semi-continua inferior, pues la condición $\operatorname{rg}(J_f(x)) \geq s$ equivale a que existe un sub-determinante $s \times s$ no-nulo (condición abierta). ■

Para determinar el valor minimal de $\dim_k T_x X$ necesitamos los siguientes resultados:

Recuerdo (extensiones separables): Sea K un cuerpo y $K \subseteq L$ una extensión algebraica (ie, $\forall a \in L$ existe $P \in K[X]$ tq $P(a) = 0$ en L). Decimos que $K \subseteq L$ es una extensión separable si para todo $a \in L$ el polinomio minimal $P_a \in K[X]$ no posee raíces múltiples en $\overline{K}$.

Obs: Esto último equivale a que la derivada (formal) $P_a' \in K[X]$ no es idénticamente cero. En part, si $\operatorname{car}(K) = 0$ toda extensión algebraica es separable.

Hechos: ① Sea k alg. cerrado y $k \subseteq K$ extensión generada por finitos elementos. Entonces, K posee una base de trascendencia $B = \{x_1, \dots, x_n\} \subseteq K$ tal que la extensión algebraica $k(B) = k(x_1, \dots, x_n) \subseteq K$ es separable.

② Teorema del elemento primitivo: Sea $K \subseteq L$ extensión algebraica separable. Entonces, existe $f \in L$ tal que $L = K(f)$.

Prop: Sea X variedad algebraica irreducible de dimensión n. Entonces, X es birracional a una hipersuperficie $V(P) \subseteq \mathbb{A}^{n+1}$ definida por un polinomio irreducible $P \in \mathcal{O}(\mathbb{A}^{n+1})$.

Dem: Podemos suponer X afín. Dado que $\operatorname{tr\,deg}_k k(X) = n$, podemos elegir una base de trascendencia $x_1, \dots, x_n \in k(X)$ tal que $k(\mathbb{A}^n) \cong k(x_1, \dots, x_n) \subseteq k(X)$ es una extensión algebraica separable. Luego, el Teo. del elemento primitivo implica que existe $f \in k(X)$ tal que $k(X) = k(\mathbb{A}^n)(f)$. Sea $P \in k(\mathbb{A}^n)[T]$ el polinomio minimal de f.
$\Rightarrow$ Despejando denominadores obtenemos $P(T) = a_0 T^r + a_1 T^{r-1} + \dots + a_r$, con $a_i \in \mathcal{O}(\mathbb{A}^n)$. Luego, $k(X) \cong k(\mathbb{A}^n)[T]/\langle P \rangle$, ie, $k(X) \cong k(Z)$ donde $Z = V(P) \subseteq \mathbb{A}^n \times \mathbb{A}^1 \cong \mathbb{A}^{n+1}$ ■

Obs: En part, toda curva algebraica irreducible es birracional (pero no necesariamente isomorfa) a una curva plana, ie, una curva C en $\mathbb{A}^2$ (o $\mathbb{P}^2$) irreducible.

Teorema: Sea X una variedad algebraica. Entonces, para todo $x \in X$ se cumple que
$$\dim_x(X) \leq \dim_k T_x X.$$
Más aún, la igualdad es satisfecha en un abierto denso de X.

Dem: Supongamos primero que X es irreducible, y veamos que el valor minimal de la función $x \mapsto \dim_k T_x X$ es $\dim(X) := n$. Dicho valor minimal es un invariante birracional, por lo que podemos suponer $X = V(f) \subseteq \mathbb{A}^{n+1}$ hipersuperficie irreducible. En tal caso, tenemos que $\dim T_x X = \dim_k \ker(d_x f) = n+1 - \operatorname{rg}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x) \cdots \frac{\partial f}{\partial x_{n+1}}(x)\right) = n$ excepto si $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = 0$ $\forall i = 1, \ldots, n+1$. Veamos que esto no puede ocurrir para todo $x \in X$: Consideremos el ideal Jacobiano $J = \left\langle \frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_{n+1}} \right\rangle$, y notamos que si $X = V(f) \subseteq V(J)$ entonces $J \subseteq \sqrt{J} \subseteq \langle f \rangle$. En part, f divide $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ para todo $i = 1, \ldots, n+1$. Si $\operatorname{car}(k) = 0$ esto implica que f es constante, mientras que si $\operatorname{car}(k) = p$ esto implica que f es un polinomio en $x_1^p, \ldots, x_{n+1}^p$, ie, $f = \sum a_I x_I^{pI} = \sum b_I^p x_I^{pI} = \left(\sum b_I x^I\right)^p = g^p$, lo cual es imposible ($f$ irreducible) ✓

En general, si $X = X_1 \cup \ldots \cup X_m$ comp. irreducibles y $x \in X_1 \cup \ldots \cup X_k$, tenemos que $\dim(X_i) \leq \dim_k T_x X_i \leq \dim T_x X$ y luego $\dim_x(X) \leq \dim T_x X$. Más aún, en cada X_i hay un abierto denso $\mathcal{U}_i \subseteq X_i$ donde $\dim(X_i) = \dim_k T_x X_i$, y luego en el abierto denso $\mathcal{U} := \bigcup_{i=1}^m \mathcal{U}_i$ tenemos $\dim_x(X) = \dim_k T_x X$ para todo $x \in \mathcal{U}$. ■

Def: Sea X una variedad algebraica y $x \in X$. Decimos que x es un punto suave si $\dim_k T_x X = \dim_x(X)$, y en caso contrario (ie, si $\dim_x(X) < \dim_k T_x X$) decimos que x es un punto singular. Denotamos por $X_{reg} \subseteq X$ (resp. X_{sing} o $\operatorname{Sing}(X) \subsetneq X$) al abierto denso (resp. cerrado propio) formado por los puntos suaves (resp. singulares) de X.
Decimos que X es suave (resp. singular) si $X_{sing} = \phi$ (resp. $X_{sing} \neq \phi$).

Ejemplos:

1) Dado que $T_{(x,y)}(X \times Y) \cong T_x X \oplus T_y Y$, tenemos que $(x,y) \in X \times Y$ es suave si y sólo si $x \in X$ e $y \in Y$ son suaves (ie, $(X \times Y)_{sing} = (X_{sing} \times Y) \cup (X \times Y_{sing})$).

2) Sea $X = V(f) \subseteq \mathbb{A}^n$ hipersuperficie. Entonces, $X_{sing} \subseteq X \subseteq \mathbb{A}^n$ está dado por las ecuaciones $f(x) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) = \ldots = \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) = 0$ en $\mathbb{A}^n$. En part, notamos que si $f = f_1 \cdots f_r$ es producto de polinomios irreducibles, entonces todo punto en $V(f_i) \cap V(f_j)$ es singular ($i \neq j$).

3) Los puntos singulares de la hipersuperficie proyectiva $X = V(f) \subseteq \mathbb{P}^n$ están dados por $f(x) = \frac{\partial f}{\partial x_0}(x) = \ldots = \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) = 0$ en $\mathbb{P}^n$. Más aún, si $\operatorname{car}(k)$ no divide $d = \operatorname{gr}(f)$ entonces X_{sing} está dado por $\frac{\partial f}{\partial x_0}(x) = \ldots = \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) = 0$ en $\mathbb{P}^n$.

En efecto, sea $x = [x_0, \ldots, x_n] \in X$ y sup. que $x_0 \neq 0$, ie, $x \in \mathcal{U}_0 = \{x_0 \neq 0\} \cong \mathbb{A}^n \subseteq \mathbb{P}^n$.
$\Rightarrow X \cap \mathcal{U}_0$ está definida por $g(x_1, \ldots, x_n) = f(1, x_1, \ldots, x_n)$ y luego $x \in X_{sing}$ si y sólo si $\frac{\partial g}{\partial x_i}(x) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = 0$ $\forall i = 1, \ldots, n$. Por otra parte, como f homogéneo de grado d, la fórmula de Euler: $d\, f(x) = \sum_{i=0}^n x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$ (obtenida al derivar $f(\lambda x) = \lambda^d f(x)$ resp. a λ)
$\Rightarrow$ si $f(x) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) = \ldots = \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) = 0$, entonces $\frac{\partial f}{\partial x_0}(x) = 0$ ✓

Similar: si $\operatorname{car}(k)$ no divide d, las ecuaciones $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = 0$, $i = 0, \ldots, n$ implican $f(x) = 0$.

Ejercicio Sea $C_{a,b} := \{[x,y,z] \in \mathbb{P}^2$ tq $y^2 z = x^3 + axz^2 + bz^3\} \subseteq \mathbb{P}^2$ cúbica plana.
Determinar los valores de $a, b \in k$ tal que $C_{a,b} \subseteq \mathbb{P}^2$ sea suave.
[Indicación: Considerar los casos $\operatorname{car}(k) = 2$ y $\operatorname{car}(k) = 3$ separadamente.]

4) Criterio Jacobiano: Sea $X \subseteq \mathbb{A}^n$ variedad alg. afín tal que $\mathcal{I}(X) = \langle f_1, \dots, f_m \rangle$. Entonces, $x \in X$ es suave si y sólo si $rg(J_f(x)) = n - \dim_x(X) \underset{\text{def}}{=} \operatorname{codim}_x(X)$, con $J_f(x) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)\right)_{i,j}$.
En efecto, $\dim_k T_x X = n - rg(J_f(x)) \geq \dim_x(X)$ para todo $x \in X$.

⚠ Obs: ① Del mismo modo, si $X \subseteq \mathbb{P}^n$ proyectiva tal que $\mathcal{I}(X) = \langle f_1, \dots, f_m \rangle$ ideal homogéneo. Entonces $x \in X$ suave $\iff rg(J_f(x)) = n - \dim_x(X)$.
② Sabemos que $n - m \leq \dim_x(X)$ (ver §16, pág 53). Luego, si X es una intersección completa de dimensión $d = n - m$ en $\mathbb{A}^n$ (o $\mathbb{P}^n$). Entonces, $x \in X$ suave $\iff rg(J_f(x)) = m$.

$\boxed{\text{Ejercicio}}$ Sea G un grupo algebraico y sea X un espacio homogéneo resp. a G (ie, X es una var. algebraica dotada de una acción regular $G \times X \to X$ transitiva). Probar que X es suave.

[Indicación: Sea $x_0 \in X_{reg} \neq \emptyset$ y $x \in X$ arbitrario. Probar, usando la acción de G, que existen $x_0 \in \mathcal{U}_0$ y $x \in \mathcal{U}$ vecindades abiertas tal que $\mathcal{U}_0 \cong \mathcal{U}$.]

Obs: En part, G es suave pues es homogéneo resp. a sí mismo. Luego, toda variedad abeliana es suave y los grupos de matrices ($GL_n(k)$, $PGL_n(k)$, $SL_n(k)$, etc) son suaves. Además, $Gr(k, n)$ es suave pues es homogénea resp. a $GL_n(k)$.

Veamos que toda variedad suave es localmente una intersección completa. Para ello:

Recuerdo (anillos regulares): Sea A un anillo local noetheriano, $\mathfrak{m}$ su ideal maximal, y $k = A/\mathfrak{m}$ su cuerpo residual. Entonces, $\dim_{Krull}(A) \leq \dim_k(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2)$. (Nakayama).
En part, decimos que $(A, \mathfrak{m})$ es un anillo regular si $\dim_{Krull}(A) = \dim_k(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2)$.
Ejemplo principal: Sea $x \in X$ punto suave, entonces $(\mathcal{O}_{X,x}, \mathfrak{m}_x)$ anillo regular!
Teorema (Nagata 1958, Auslander-Buchsbaum 1959): Sea $(A, \mathfrak{m})$ un anillo regular. Entonces, A es un dominio de factorización única (o también, anillo factorial).

Obs: En part, si $x \in X$ es un punto suave de una variedad algebraica. Entonces, $\mathcal{O}_{X,x}$ es un dominio y luego X es "localmente irreducible". Más precisamente, $x \in X$ suave sólo pertenece a una componente irreducible de X.

$\boxed{\text{Ejercicio}}$ Sea X una variedad alg. suave. Probar que X irreducible $\iff X$ conexa.

$\boxed{\text{Ejercicio}}$ Sea $Q = \{(x,y,z) \in \mathbb{A}^3 \text{ tq } x^2 + y^2 + z^2 = 0\}$ y sea $p = (0,0,0)$. Notar que en $\mathcal{O}_{Q,p}$ se cumple $-x^2 = x(-x) = (y+zi)(y-zi)$, con $i^2 = -1$. Probar que x, $y+zi$, $y-zi$ son irreducibles en $\mathcal{O}_{Q,p}$ y deducir que este anillo local no es factorial.

Prop: Sea X variedad algebraica y $x \in X$ punto suave tal que $\dim_x(X) = m$. Entonces, existe una vecindad abierta (afín) $\mathcal{U} \subseteq X$ de x, y un isomorfismo $\varphi: \mathcal{U} \xrightarrow{\sim} V$, donde V es un abierto de una variedad alg afín $Y \subseteq \mathbb{A}^n$ definida por $V(f_1, \dots, f_{n-m})$ y donde $rg\left(\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(y)\right)_{i,j}\right) = n - m$ en $y = \varphi(x)$.

Dem: Podemos suponer $X \subseteq \mathbb{A}^n$ afín, donde $\mathcal{I}(x) = \langle f_1, \dots, f_r \rangle$. Entonces, el criterio Jacobiano implica $rg\left(\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)\right)_{i,j}\right) = n - m$. Luego, podemos extraer un subdeterminante $(n-m) \times (n-m)$ de dicho rango. Por ejemplo, sup. que los $f_1, \dots, f_{n-m}$ tienen matriz Jacobiana de rango $n-m$ en $x \in X$, y sea $Y = V(f_1, \dots, f_{n-m})$. Entonces, Y es suave en una vecindad de $x \in X$, $\dim_x(Y) = m$, y contiene a X de la misma dimensión. Dado que X e Y son localmente irreducibles en x, ambas variedades coinciden en una vecindad de x. ∎

Las hipersuperficies en variedades suaves están definidas localmente por 1 ecuación:

Prop: Sea X variedad alg. irreducible e $Y \subseteq X$ subvariedad cerrada de codimensión pura 1, y sea $y \in Y$ tal que $y \in X_{reg}$ es suave en X. Entonces, existe $y \in \mathcal{U} \subseteq X$ vecindad afín y $f : \mathcal{U} \to k$ función regular tal que $\mathcal{I}(\mathcal{U} \cap Y) = \langle f \rangle$.

Dem: Podemos sup. X afín e $Y = V(\mathfrak{p})$ irreducible, con $\mathfrak{p} \subseteq \mathcal{O}(X)$ ideal primo. Entonces, $P_y := \mathfrak{p}\, \mathcal{O}_{X,y} = \{ \frac{f}{g}$ tq $f, g \in \mathcal{O}(X)$ con $g(y) \neq 0$ y $f \in \mathfrak{p} \}$ es un ideal primo no-nulo del anillo factorial $\mathcal{O}_{X,y}$. En part, contiene al menos un elemento irreducible f/g.
$\Rightarrow$ El elemento $f \in \mathfrak{p}$ es irreducible también en $\mathcal{O}_{X,y}$, y además $Y \subseteq V(f)$.
El problema es que f podría ser reducible en $\mathcal{O}(X)$: Sean $f_1, \dots, f_r$ generadores del ideal $f\,\mathcal{O}_{X,y} \cap \mathcal{O}(X)$. Entonces (en $\mathcal{O}_{X,y}$), $f_i = f \frac{h_i}{g_i}$ para $g_i, h_i \in \mathcal{O}(X)$ con $g_i(y) \neq 0$.
Sea $g = g_1 \cdots g_r \Rightarrow$ En el abierto $\mathcal{U} = \{x \in X$ tq $g(x) \neq 0\}$ los g_i son invertibles, y luego el ideal primo $f\,\mathcal{O}_{X,y} \cap \mathcal{O}(\mathcal{U})$ de $\mathcal{O}(\mathcal{U})$ está generado por f, ie, $\mathcal{U} \cap V(f)$ es irreducible y contiene $Y \cap \mathcal{U}$ que es de la misma dimensión.
$\Rightarrow Y \cap \mathcal{U} = V(f) \cap \mathcal{U}$ y $\mathcal{I}(\mathcal{U} \cap Y) = \langle f \rangle$. ■

⚠ ¡Atención!: Este resultado es falso en variedades singulares: Considerar el cono $X = \{(x,y,z) \in \mathbb{A}^3$ tq $z^2 = xy\}$, singular en $p = (0,0,0)$, y $L = \{x = z = 0\} \subseteq X$ recta.

Ejercicio $L \subseteq X$ no está definida sólo por una ecuación en $\mathcal{O}_{X,p}$.

[Indicación: El ideal $I = \langle X, Z \rangle$ de $A = k[X,Y,Z]/\langle Z^2 - XY \rangle$ no es principal, pues se calcula que $\dim_k T_p X = 3$ y $\dim_k T_p L = 1$.]

Corolario: Sea $f : X \dashrightarrow Y$ una aplicación racional, donde X es una variedad alg irreducible suave y donde Y variedad alg. proyectiva. Entonces, el cerrado $Z = X \setminus \mathrm{Dom}(f)$ es de codimensión $\mathrm{codim}_X(Z) \geq 2$. En part, si X es una curva entonces $f : X \to Y$ es regular.

Dem: Localmente podemos escribir $f(x) = [f_0(x), \dots, f_N(x)] \in Y \subseteq \mathbb{P}^N$. Si los f_i se anulan en algún Z de codimensión 1, y consideramos $z \in Z$ y u una ecuación local de Z en z
$\Rightarrow f_i = u\, g_i$ en $k(X)$ y luego $[f_0, \dots, f_N] = [g_0, \dots, g_N]$ ✓ ■

Obs importante: Sean X e Y curvas algebraicas proyectivas, suaves e irreducibles. Entonces, $X \simeq_{bir} Y$ son biracionales si y sólo si $X \cong Y$ son isomorfas!

Aplicación (coordenadas locales): Sea $x \in X$ un punto suave y sea $n = \dim_x(X)$.
Decimos que $u_1, \dots, u_n \in \mathcal{O}_{X,x}$ son coordenadas locales en x si sus imágenes en $\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2$ son linealmente indep. Equivalentemente (por dualidad), si sus diferenciales $d_x u_1, \dots, d_x u_n$ son l.i. en $(T_x X)^* \underset{def}{:=} \Omega^1_{X,x}$ espacio cotangente de $x \in X$.
Más generalmente, si $\mathcal{U}$ es una vecindad de X, decimos que $u_1, \dots, u_n \in \mathcal{O}(\mathcal{U})$ son parámetros o coordenadas locales en $\mathcal{U}$ si $\mathcal{U} \subseteq X_{reg}$ y las imágenes en $\mathcal{O}_{X,x}$ de los $u_1, \dots, u_n$ son coord. locales $\forall x \in \mathcal{U}$.

Prop: Sean $u_1, \dots, u_n \in \mathcal{O}(\mathcal{U})$ coord. locales en $\mathcal{U} \subseteq X_{reg}$. Entonces, para todo $m = 1, \dots, n$ la subvariedad $Z_m = \{x \in \mathcal{U}$ tq $u_1(x) = \dots = u_m(x) = 0\}$ es suave de dimensión $\dim(Z_m) = n - m$.

Dem: El espacio tangente de $Z_1 = \{u_1 = 0\}$ es $T_x Z_1 = \ker(d_x u_1)$ de dimensión $n-1$ en $T_x X \Rightarrow Z_1$ es suave en $x \in \mathcal{U}$, pues $\dim_x(Z_1) = n-1$. Más aún, las restricciones de $u_2, \dots, u_n$ a Z_1 son coord. locales en Z_1, y el resultado se obtiene por inducción. ■

Construcción (Blow-up): Sea X una variedad alg. suave e irreducible, con $\dim(X) = n$, y sea $Z \subseteq X$ subvar. cerrada suave e irreducible de $\operatorname{codim}_X(Z) = r$, ie, $\dim(Z) = n - r$. Luego, localmente Z está dada por $V(u_1, \dots, u_r)$ para ciertas coord. locales $u_1, \dots, u_n$ en un abierto $\mathcal{U} \subseteq X$.

Entonces, el blow-up de $\mathcal{U}$ a lo largo de $Z \cap \mathcal{U}$ está dado por (ver §14):

$$\widetilde{\mathcal{U}} = \{(x, y) \in \mathcal{U} \times \mathbb{P}^{r-1} \text{ tal que } u_i(x) y_j = u_j(x) y_i \ \forall i, j = 1, \dots, r\} \subseteq \mathcal{U} \times \mathbb{P}^{r-1},$$

y donde $\varepsilon_{\mathcal{U}} : \widetilde{\mathcal{U}} \to \mathcal{U}$ (primera proyección) es birracional.

Ejercicio Probar que $\widetilde{\mathcal{U}}$ es suave e irreducible, y que el conjunto excepcional dado por $E_{\mathcal{U}} = \varepsilon_{\mathcal{U}}^{-1}(Z \cap \mathcal{U})$ es suave de $\dim(E_{\mathcal{U}}) = n - 1$.

⚠ Tal como se discutió en el Ejercicio de §14, si $V(v_1, \dots, v_r)$ son otras ecuaciones locales de Z en $V \subseteq X$ abierto, entonces $\widetilde{\mathcal{U}}|_{\varepsilon_{\mathcal{U}}^{-1}(\mathcal{U} \cap V)} \cong \widetilde{V}|_{\varepsilon_V^{-1}(\mathcal{U} \cap V)}$.

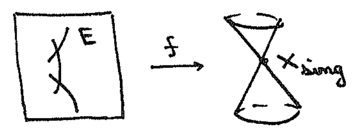
Luego, obtenemos un atlas algebraico que nos permite definir $\varepsilon : Bl_Z(X) \to X$ globalmente. Más aún, $E = \operatorname{Exc}(\varepsilon) := \varepsilon^{-1}(Z)$ hipersuperficie excepcional que cumple:

1. $Bl_Z(X) \setminus E \cong X \setminus Z$ y $\varepsilon^{-1}(x) \cong \mathbb{P}^{r-1}$ para todo $x \in Z$.
2. Localmente: $E_{\mathcal{U}} \cong (Z \cap \mathcal{U}) \times \mathbb{P}^{r-1}$ (pero no globalmente).

Cultura General (Resultados importantes, sin demostración):

Sea X una variedad algebraica proyectiva irreducible. Una resolución de singularidades de X es un morfismo birracional $f : Y \to X$ tal que:

1. Y var. algebraica proyectiva suave e irreducible.
2. $f^{-1}(X_{reg}) \xrightarrow{\sim} X_{reg}$ es un isomorfismo.
3. $E = f^{-1}(X_{sing})$ es una hipersuperficie con cruces simples normales (SNC), ie, $E = E_1 \cup \dots \cup E_r$ componentes irreducibles cumplen que cada E_i es una hipersuperficie suave de Y y cada $y \in E$ está dado localmente por ecuaciones $(u_1, \dots, u_n)$ tales que $E \underset{loc}{\simeq} \{u_1 \cdots u_k = 0\}$ para cierto $k \leq n$.



Teorema (Hironaka, 1964): Si $\operatorname{car}(k) = 0$, toda variedad proyectiva admite una resolución de singularidades.

Obs: Si $\operatorname{car}(k) = p > 0$, hoy en día sabemos que toda variedad proyectiva de dimensión $\dim(X) \leq 3$ admite una resolución de singularidades (Abhyankar 1956, Cossart-Piltant 2009).

Sean X e Y variedades alg. proyectivas suaves e irreducibles. Sea $f : X \dashrightarrow Y$ aplicación birracional y $\mathcal{U} = \operatorname{Dom}(f) \subseteq X$. Entonces:

1. Una factorización débil de f es una factorización de la forma

$$X = X_0 \swarrow^{W_1} \searrow X_1 \swarrow^{W_2} \searrow X_2 \swarrow \cdots \searrow X_{r-1} \swarrow^{W_r} \searrow X_r = Y$$

donde cada $Z_i \to X_i$ y $Z_i \to X_{i-1}$ es un blow-up a lo largo de una subvar suave disjunta $\mathcal{U}$, y cada X_i y W_i es proyectiva suave e irreducible.

2. Una factorización fuerte de f es una factorización de la forma $X \swarrow^{W} \searrow Y$, $X \dashrightarrow Y$, donde $W \to X$ e $W \to Y$ son series de blow-ups a lo largo de subvar. suaves.

Teorema (Wlodarczyk 1999): Si $\operatorname{car}(k) = 0$, todo f posee una factorización débil.

Teorema (Zariski, 1930): Si $\dim(X) = \dim(Y) = 2$, todo f posee una factorización fuerte.