§16. Dimensión de morfismos y aplicaciones

En esta sección discutiremos algunas propiedades y aplicaciones importantes relacionadas al concepto de dimensión. Comencemos por una extensión del Teorema de Krull:

Teorema: Sea $X \subseteq \mathbb{P}^N$ variedad quasi-proyectiva irreducible de $\dim(X) = n$, y sean $f_1, \dots, f_r \in k[X_0, \dots, X_N]$ homogéneos no-constantes. Sea $Y = V(f_1, \dots, f_r) \cap X$, entonces cada componente irreducible de Y es de dimensión $\geq n - r$.

Dem: Sea Z una componente irred. de Y, y veamos por inducción en r que $\dim(Z) \geq n-r$. El caso $r=1$ OK por Teo. de Krull ✓ Sup. que $r \geq 2$ y notar que $Z \subseteq V(f_1, \dots, f_{r-1}) \cap X$, por lo que $Z \subseteq W$ para cierta componente irred. W de $V(f_1, \dots, f_{r-1}) \cap X$.
Por hipótesis inductiva, $\dim(W) \geq n - r + 1$. En part, si f_r se anula en W (i.e., $f_r|_W \equiv 0$) $\Rightarrow \dim(Y) \geq n-r+1 \geq n-r$ ✓ Luego, podemos sup. que $f_r \not\equiv 0$ en W.
Sea $x \in Z$ y sea $\mathcal{U}$ una vecindad abierta afín de x en W. Entonces, $\dim(Z) = \dim(Z \cap \mathcal{U})$ y $\dim(W) = \dim(\mathcal{U})$. Sea $g_r := f_r|_{\mathcal{U}} \not\equiv 0$, entonces $Z \cap \mathcal{U}$ es una comp. irred. de $V(g_r)$ $\underset{\text{Krull}}{\Rightarrow} \dim(Z \cap \mathcal{U}) = \dim(\mathcal{U}) - 1 \geq n - r$ y luego $\dim(Z) \geq n-r$. ■

⚠ En general, la desigualdad $\dim(Y) \geq n-r$ puede ser <u>estricta</u>. Por ejemplo, la cúbica torcida (ver §11, pág 39) $C = \nu_3(\mathbb{P}^1) \subseteq \mathbb{P}^3$ está dada por 3 ecuaciones, y $\dim(C) = 1 > 3-3 = 0$.

Def: Sea X variedad alg. de dimensión pura n, y sea $Y \subseteq X$ subvariedad cerrada. La <u>codimensión</u> de Y en X es $\operatorname{codim}_X(Y) = n - \dim(Y)$. En part, decimos que una variedad (quasi-)proyectiva de dimensión n en $\mathbb{P}^N$ es una <u>intersección completa</u> si puede ser definida por $c = N - n$ ecuaciones.

Obs: Una <u>conjetura</u> de Hartshorne predice que toda variedad proyectiva "suave" $X \subseteq \mathbb{P}^N$ de dimensión n tal que $3n > 2N$ es una intersección completa (Abierta incluso si $N = n+2$)!

Ejemplos: Sean X e Y variedades algebraicas irreducibles de $\dim(X) = n$ y $\dim(Y) = m$.

① $\dim(X \times Y) = n+m$. En efecto, podemos suponer X e Y afines y luego existen $f: X \twoheadrightarrow \mathbb{A}^n$ y $g: Y \to \mathbb{A}^m$ sobreyectivos finitos (Noether) $\Rightarrow f \times g: X \times Y \twoheadrightarrow \mathbb{A}^{n+m}$ sobreyectivo finito ✓

② $\boxed{\text{Ejercicio}}$ Sea $X = V(I) \subseteq \mathbb{P}^n$ variedad proyectiva, y sea $C(X) := V(I) \subseteq \mathbb{A}^{n+1}$ el <u>cono afín</u> de X (ver §11, pág 35). Probar que $\dim(C(X)) = \dim(X) + 1$.
[**Indicación**: Sea $\mathcal{U}_i = \{x_i \neq 0\} \subseteq \mathbb{P}^n$, entonces $C(X) \cap \pi^{-1}(\mathcal{U}_i) \cong (X \cap \mathcal{U}_i) \times \mathbb{A}^1$]

③ Sup. que $X, Y \subseteq \mathbb{A}^N$ son afines y que $X \cap Y \neq \emptyset$. Entonces, toda componente irreducible de $X \cap Y$ es de dimensión $\geq \dim(X) + \dim(Y) - N = n + m - N$. En particular,
$$\operatorname{codim}(X \cap Y) \leq \operatorname{codim}(X) + \operatorname{codim}(Y).$$
En efecto, $X \cap Y \cong (X \times Y) \cap \Delta_{\mathbb{A}^N}$ en $\mathbb{A}^N \times \mathbb{A}^N$ está dado por las N ecuaciones $x_i = y_i$ en $X \times Y$. Luego, por el Teorema anterior, la dimensión de cada comp. irred. de $X \cap Y$ es $\geq \dim(X \times Y) - N = n + m - N$ ✓

④ Sup. que $X, Y \subseteq \mathbb{P}^N$ son proyectivos y que $\dim(X) + \dim(Y) \geq N$. Entonces, $X \cap Y \neq \emptyset$.
En efecto, los conos afines $C(X), C(Y) \subseteq \mathbb{A}^{N+1}$ son de dimensión $n+1$ y $m+1$, resp.
Además, $C(X) \cap C(Y) \neq \emptyset$ pues $0 \in C(X) \cap C(Y)$. Así, ③ implica que cada componente irred. de $C(X) \cap C(Y)$ es de dimensión $\geq (n+1) + (m+1) - (N+1) = n + m - N + 1 \geq 1$ ✓

Recuerdo: Sea $f: X \to Y$ morfismo regular entre var. alg. y sea $y \in Y$. Entonces, la <u>fibra</u> $f^{-1}(y) = \{x \in X \text{ tq } f(x) = y\}$ es un cerrado (Zariski) de X, i.e., una subvar. cerrada de X.

Obs: Usando "productos fibrados" se puede definir la "fibra esquemática" $f^{-1}(y)$ (ver §8). La "fibra conjuntista" que consideraremos aquí es $f^{-1}(y)_{red}$.

Teorema: Sean X e Y variedades algebraicas irreducibles de $\dim(X) = n$ y $\dim(Y) = m$. Entonces, para todo $f : X \twoheadrightarrow Y$ morfismo regular <u>sobreyectivo</u> se cumple:

1. Para todo $y \in Y$, toda componente irreducible de $f^{-1}(y)$ es de dimensión $\geq n - m$.
2. Existe $V \subseteq Y$ abierto denso tal que $f^{-1}(y)$ es de dimensión pura $n-m$ para todo $y \in V$.
3. Para todo $r \in \mathbb{N}$, el conjunto $X_r := \{x \in X \text{ tal que } \dim_x(f^{-1}(f(x))) \geq r\}$ es <u>cerrado</u> en X, ie, la función $\delta : X \to \mathbb{N}$, $x \mapsto \dim_x(f^{-1}(f(x)))$ es semi-continua superior.

Aquí, para $Z \subseteq X$ cerrado, $\dim_x(Z) := \max\limits_{x \in Z_i}\{\dim(Z_i)\}$ con $Z = Z_1 \cup \ldots \cup Z_s$ comp. irred.

<u>Dem</u>: En ① podemos sup. Y afín y luego, por Teo. de Noether, existe $g : Y \twoheadrightarrow \mathbb{A}^m$ <u>finito</u> y sobreyectivo. Sea $u : X \overset{f}{\twoheadrightarrow} Y \overset{g}{\twoheadrightarrow} \mathbb{A}^m$ la composición y sea $p = g(y) \in \mathbb{A}^m$. Entonces, $g^{-1}(p) = \{y, z_1, \ldots, z_N\}$ conj. finito $\Rightarrow u^{-1}(p) = f^{-1}(y) \sqcup f^{-1}(z_1) \sqcup \ldots \sqcup f^{-1}(z_m)$ unión disjunta de cerrados de X. En part, las comp. irred. de $f^{-1}(y)$ son comp. irred. de $u^{-1}(p)$.
Como $p = (p_1, \ldots, p_m) \in \mathbb{A}^m$ está definido por las ecuaciones $x_i - p_i = 0$, tenemos que $u^{-1}(p)$ está definido (en un abierto afín) por las m ecuaciones $x_i \circ u - p_i = 0$ en X.
$\Rightarrow$ Toda comp. irred de $u^{-1}(p)$ es de dimensión $\geq \dim(X) - m = n - m$ ✓
En ② podemos sup. X e Y afines. Considerando $f^* : k(Y) \hookrightarrow k(X)$ observamos que $k(X)$ tiene grado de trascendencia $n-m$ sobre $k(Y)$. Sean $u_1, \ldots, u_{n-m} \in k(X)$ alg. indep. sobre $k(Y)$ y sea $\mathcal{U} \subseteq X$ abierto denso afín tq $u_1, \ldots, u_{n-m} \in \mathcal{O}(\mathcal{U})$ regulares. Completamos con $u_{n-m+1}, \ldots, u_N$ para generar $\mathcal{O}(\mathcal{U})$ (y así $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{A}^N$) y luego (las restricciones de) los $u_1, \ldots, u_N$ generan $\mathcal{O}(f^{-1}(y) \cap \mathcal{U})$. Restringiéndose a comp. irred. si fuese necesario, podemos sup. que $f^{-1}(y)$ es irreducible y luego $k(f^{-1}(y) \cap \mathcal{U})$ es un cuerpo. Veamos que los $u_{n-m+1}, \ldots, u_N$ son algebraicamente dependientes en $k(f^{-1}(y) \cap \mathcal{U})$ sobre k a restringirnos a cierto $V \subseteq Y$ abierto denso (y luego, $\dim(f^{-1}(y) \cap \mathcal{U}) = \dim(f^{-1}(y)) \leq n - m$ ✓):
Para $i = n-m+1, \ldots, N$ sabemos que hay una relación polinomial

$$F_i(u_i, u_1, \ldots, u_{n-m}) = 0 \quad \text{en } k(X), \text{ con } F_i \in k(Y)[T_1, \ldots, T_{n-m+1}].$$

Además, en la fibra $f^{-1}(y)$ los coeficientes de F_i son constantes (cf. §15, pág 50). Luego, si nos restringimos al abierto denso $V \subseteq Y$ donde los denominadores y numeradores de los coeficientes de F_i no se anulan, obtenemos que si $y \in V$ entonces $u_i|_{f^{-1}(y)}$ es alg. dependiente de $u_1|_{f^{-1}(y)}, \ldots, u_{n-m}|_{f^{-1}(y)}$ ✓
Finalmente, probemos ③ por inducción en $\dim(X)$: Sea $r \in \mathbb{N}$. Si $r \leq n - m$ entonces (por ①) $X_r = X$ cerrado ✓. Por ②, existe $Z \subsetneq X$ cerrado propio tq $X_r \subseteq Z$ $\forall r > n-m$. Luego, $g := f|_Z : Z \twoheadrightarrow W$ sobreyectivo sobre $W = f(Z) \subseteq Y$, y $X_r = Z_r$ si $r > n - m$. Como, $\dim(Z) < \dim(X)$, tenemos por inducción que $X_r \subseteq Z$ cerrado $\Rightarrow X_r \subseteq X$ cerrado ✓ ■

<u>Corolario</u> (muy útil): Sea $f : X \to Y$ un morfismo regular sobreyectivo entre variedades algebraicas irreducibles. Si f es un morfismo <u>cerrado</u> (eg. X proyectiva), entonces la función $Y \to \mathbb{N}$, $y \mapsto \dim(f^{-1}(y))$ es semi-continua superior, ie, para todo $r \in \mathbb{N}$ el conjunto

$$Y_r = \{y \in Y \text{ tal que } \dim(f^{-1}(y)) \geq r\}$$

es cerrado en Y.

<u>Dem</u>: Por definición, $Y_r = f(X_r)$. Como $X_r \subseteq X$ cerrado y f morfismo cerrado, $Y_r \subseteq Y$ cerrado. ■

⚠ <u>Obs</u>: $f : \mathbb{A}^3 \twoheadrightarrow \mathbb{A}^3$, $(x,y,z) \mapsto (x, (xy-1)y, (xy-1)z)$ es sobreyectivo, pero <u>no</u> cerrado. El conjunto $\{y \in \mathbb{A}^3 \text{ tq } \dim(f^{-1}(y)) \geq 1\}$ <u>no</u> es cerrado $\boxed{\text{Ejercicio}}$.

<u>Terminología</u>: Dado $f : X \twoheadrightarrow Y$ sobreyectivo entre var. alg. irreducibles. La <u>dimensión relativa</u> de f en $y \in Y$ es $\dim(f^{-1}(y))$. Si $\dim(f^{-1}(y)) = d$ para todo $y \in Y$. Decimos que f <u>es de dimensión relativa d</u>, y escribimos $\dim(f) = \dim(X/Y) = d$.

Teorema (Criterio de Irreducibilidad): Sea $f: X \to Y$ morfismo regular sobreyectivo y <u>cerrado</u> entre variedades algebraicas. Supongamos que Y es irreducible y que <u>todas</u> las fibras de f son irreducibles de misma dimensión $d \in \mathbb{N}$. Entonces, X es irreducible y $\dim(X) = \dim(Y) + d$.

Dem: Sean $X = X_1 \cup \ldots \cup X_r$ comp. irred. Para $y \in Y$, sea $d_i(y) := \dim(f_i^{-1}(y))$ donde $f_i = f|_{X_i}$. Sabemos que $d = \max\limits_{i=1,\ldots,r} \{d_i(y)\}$ $\forall y \in Y$ y luego $Y = \bigcup\limits_{i=1}^{r} \{y \in Y \text{ tq } d_i(y) \geq d\}$ unión de cerrados $\Rightarrow \exists i$ tal que $d_i(y) = d$ $\forall y \in Y$. Por otro lado, $f_i^{-1}(y)$ está contenida en el cerrado irreducible $f^{-1}(y)$. Como $\dim(f^{-1}(y)) = \dim(f_i^{-1}(y))$, concluimos que $f_i^{-1}(y) = f^{-1}(y)$ $\forall y \in Y$. En part, $X = \bigcup\limits_{y \in Y} f^{-1}(y) = \bigcup\limits_{y \in Y} f_i^{-1}(y) = X_i$ es irreducible ✓ $\Rightarrow d = \dim(X) - \dim(Y)$. ■

<u>Ejemplos y aplicaciones</u>:

① Sea X var. proyectiva irreducible y $f: X \to C$ morfismo no-constante, donde C es una curva algebraica. Entonces, $X_t := f^{-1}(t)$ es una <u>hipersuperficie</u> (ie, $\dim(X_t) = \dim(X) - 1$) para todo $t \in C$.

② <u>Variedades abelianas</u>: Sea G un grupo algebraico (ie, una var. alg. que es un grupo y donde la mult. e inversión son morfismos regulares). Supongamos que G es <u>irreducible</u> y <u>proyectivo</u>, entonces G es un grupo abeliano (decimos que es una <u>variedad abeliana</u>).

En efecto, sea $f: G \times G \to G$, $(g,h) \mapsto ghg^{-1}$ y considerar $\Gamma_f = \{(g,h,ghg^{-1}), g,h \in G\}$ grafo de f en $G \times G \times G$. Queremos probar que $h = ghg^{-1}$, ie, $pr_{23}(\Gamma_f) = \Delta_G \subseteq G \times G$ es la diagonal. Notar que, si $g = e$, tenemos $G \cong \Delta_G \subseteq pr_{23}(\Gamma_f)$. Veamos que coinciden: Como G es proyectivo irred, $G \times G \cong \Gamma_f$ y $pr_{23}(\Gamma_f)$ también. Luego, si consideramos $pr_2: pr_{23}(\Gamma_f) \to G$, $(h, ghg^{-1}) \mapsto ghg^{-1}$ tenemos que $pr_2^{-1}(e) = \{(e,e)\}$ es de dimensión 0. Por semi-continuidad superior, la "fibra general" $pr_2^{-1}(y)$ tiene dimensión 0 y luego $\dim(pr_{23}(\Gamma_f)) = \dim(G) + 0 \Rightarrow \dim(\Delta_G) = \dim(pr_{23}(\Gamma_f)) \Rightarrow pr_{23}(\Gamma_f) = \Delta_G$ ✓

<u>Obs</u>: Una <u>curva elíptica</u> es una variedad abeliana de dimensión 1. Además, si $k = \mathbb{C}$, toda variedad abeliana es de la forma $A = \mathbb{C}^g/\Lambda$, donde $\Lambda \cong \mathbb{Z}^{2g}$ reticulado.

③ <u>Blow-up</u>: Sean $W \subseteq V$ k-ev y sean $\mathbb{P}(V) \cong \mathbb{P}^n$ y $\Lambda = \mathbb{P}(W) \cong \mathbb{P}^{k-1}$ subesp. lineal. Dadas ecuaciones lineales $\{f_0 = \ldots = f_{n-k} = 0\}$ de W en V, la función regular

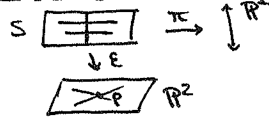
$$f: \mathcal{U} \to \mathbb{P}^{n-k}, \quad x \mapsto [f_0(x), \ldots, f_{n-k}(x)] \text{ está def. en } \mathcal{U} = \mathbb{P}^n \setminus V(f_0, \ldots, f_{n-k}).$$

El <u>blow-up</u> $Bl_\Lambda(\mathbb{P}^n)$ es la clausura de Γ_f en $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^{n-k}$. Explícitamente (ver §14):

$$Bl_\Lambda(\mathbb{P}^n) = \{(x,y) \in \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^{n-k} \text{ tal que } y_i f_j(x) = y_j f_i(x) \text{ para todos } i,j = 0, \ldots, n-k\}.$$

Sean $\varepsilon := pr_1: Bl_\Lambda(\mathbb{P}^n) \to \mathbb{P}^n$ (blow-up) y $\pi := pr_2: Bl_\Lambda(\mathbb{P}^n) \to \mathbb{P}^{n-k}$, y sea $E = \varepsilon^{-1}(\Lambda)$ el conjunto excepcional. Entonces, si $x \in \Lambda \Rightarrow \varepsilon^{-1}(x) \cong \mathbb{P}^{n-k}$ irreducible. Luego, $\varepsilon|_E: E \to \Lambda \cong \mathbb{P}^{k-1}$ cumple las hipótesis del criterio de irreducibilidad $\Rightarrow E$ irreducible y $\dim(E) = (k-1) + (n-k) = n-1 \rightsquigarrow E \subseteq \mathbb{P}^n$ hipersuperficie !

$\boxed{\text{Ejercicio}}$ Probar que $\pi^{-1}(y) \cong \mathbb{P}^k$ para todo $y \in \mathbb{P}^{n-k}$. Deducir que $Bl_\Lambda(\mathbb{P}^n)$ <u>irreducible</u> de dimensión n [<u>Indicación</u>: Considerar $W' \subseteq V$ tal que $V = W \oplus W'$].



<u>Obs</u>: En part, $S = Bl_p(\mathbb{P}^2)$ admite $\pi: S \to \mathbb{P}^1$ tal que $\pi^{-1}(t) \cong \mathbb{P}^1$ $\forall t \in \mathbb{P}^1$.

$\boxed{\text{Ejercicio}}$ Sea $V = M_{m \times n}(k)$ y consideremos $\mathcal{M} = \mathbb{P}(V) \cong \mathbb{P}^{nm-1}$. Sea $\mathcal{M}_r = \{[A] \in \mathcal{M} \text{ tq } rg(A) \leq r\}$. Probar que $\mathcal{M}_r$ es una subvar. cerrada irreducible de $\dim(\mathcal{M}_r) = r(m+n-r) - 1$.

[<u>Indicación</u>: Considerar la "variedad de incidencia" dada por:

$$I = \{(A, \Lambda) \in \mathcal{M} \times Gr(n-r, n) \text{ tal que } \Lambda \subseteq \ker(A)\}.]$$