§15. Dimensión y morfismos finitos

Recuerdo (grado de trascendencia): Sea K un cuerpo y $k \subseteq K$ un subcuerpo. Decimos que un conjunto $B \subseteq K$ es una base trascendente de K sobre k si:

① Los elementos de B son algebraicamente independientes sobre k.

② La extensión de cuerpos $k(B) \subseteq K$ es algebraica (en particular, finita).

Más aún, si $K = k(x_1, \ldots, x_r)$ es una extensión de k finitamente generada, entonces:

a) El cuerpo K posee una base trascendente finita

b) Dos bases trascendentes poseen la misma cantidad de elementos: dicho cardinal se llama el grado de trascendencia de K sobre k, denotado $\operatorname{tr\,deg}_k(K)$.

Def: Sea X una variedad algebraica. Si X es irreducible, entonces definimos

$$\dim(X) := \operatorname{tr\,deg}_k k(X),$$

i.e., el grado de trascendencia del cuerpo de funciones racionales de X sobre k. En general, si $X = X_1 \cup \ldots \cup X_m$ son las componentes irreducibles de X, definimos

$$\dim(X) = \max_{1 \leq i \leq m} \{\dim(X_i)\}.$$

En part, decimos que X es de dimensión pura d si $\dim(X_i) = d \ \forall i = 1, \ldots, m$.

Ejemplos: ① $\dim(\mathbb{A}^n) = \dim(\mathbb{P}^n) = n$.

② Si $\mathcal{U} \subseteq X$ es un abierto denso, entonces $\dim(\mathcal{U}) = \dim(X)$ (invariante birracional !).

③ $\dim(\operatorname{Gr}(k,n)) = k(n-k)$.

Def: Sea X un espacio topológico. La dimensión de Krull es el máximo entero no negativo $\dim_K(X) \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ tal que existen cerrados irreducibles $X_0, X_1, \ldots, X_d$ tales que

$$X_0 \subsetneq X_1 \subsetneq \ldots \subsetneq X_d.$$

Ejemplos: ① $\mathbb{A}^n \supsetneq \mathbb{A}^{n-1} \supsetneq \ldots \supsetneq \mathbb{A}^1 \supsetneq \mathbb{A}^0 = \{pt\} \Rightarrow \dim_K(\mathbb{A}^n) \geq n$.

② Sea $Y \subseteq X$ subconjunto, entonces la clausura en X de los cerrados $Y_0 \subsetneq \ldots \subsetneq Y_d$ en Y son cerrados distintos en X, y luego $\dim_K(Y) \leq \dim_K(X)$.

Objetivo: Nos gustaría probar que ambas nociones de dimensión coinciden, para lo cual usaremos el "Teorema de normalización de Noether" (1926) que afirma que una variedad alg. afín irreducible es de $\dim(X) = n$ si y sólo si existe $f: X \twoheadrightarrow \mathbb{A}^n$ morfismo sobreyectivo que es "finito".

Recuerdo (dependencia entera): Sea $\varphi: A \to B$ morfismo de anillos (conmutativos con unidad), que en particular dota a B de estructura de A-módulo al definir $a \cdot b := \varphi(a)b \ \forall a \in A, b \in B$. Decimos que $x \in B$ es entero sobre A (resp. a φ) si existe una relación polinomial unitaria

$$x^n + \varphi(a_1)x^{n-1} + \ldots + \varphi(a_{n-1})x + \varphi(a_n) = 0.$$

Más aún, decimos que B es entero sobre A (resp. a φ) si todo elemento $x \in B$ es entero. En caso que A y B sean k-álgebras finitamente generadas, se tiene que B es entero sobre A si y sólo si B es un A-módulo finitamente generado.

Def: Sean X e Y variedades algebraicas afines. Decimos que un morfismo regular $f: X \to Y$ es un morfismo finito si $\mathcal{O}(X)$ es entero sobre $\mathcal{O}(Y)$ respecto a $f^*: \mathcal{O}(Y) \to \mathcal{O}(X)$.

Obs: Esto último equivale a decir que el morfismo de k-álgebras $f^*: \mathcal{O}(Y) \to \mathcal{O}(X)$ hace que $\mathcal{O}(X)$ sea un $\mathcal{O}(Y)$-módulo finitamente generado.

Ejemplos: ① Consideramos $f: \mathbb{A}^1 \twoheadrightarrow \mathbb{A}^1$, $t \mapsto t^d$ para cierto $d \in \mathbb{N}^{\geq 1}$. Entonces f es un morfismo finito. En efecto, $f^*: k[X] \hookrightarrow k[T]$, $u \mapsto u \circ f$ corresponde a la inclusión $A := k[T^d] \subseteq B = k[T]$. Finalmente, notamos que $B = k[T]$ está generado como A-módulo por $1, T, T^2, \dots, T^{d-1}$ (y luego todo elemento de B es entero sobre A).

② Sea $X = \{(x,y) \in \mathbb{A}^2 \text{ tq } x^2 + y^2 = 1\}$ y $f: X \to \mathbb{A}^1$, $(x,y) \mapsto x$. Entonces, f es un morfismo finito $\boxed{\text{Ejercicio}}$.

③ La proyección $f: \mathbb{A}^2 \to \mathbb{A}^1$, $(x,y) \mapsto x$ __no__ es un morfismo finito, pues $k[X,Y]$ __no__ es finitamente generado como $k[X]$-módulo. (¡pero __sí__ es finitamente generado por $1, y$ como $k[X]$-álgebra!).

__Def__: Sean X e Y variedades algebraicas. Decimos que un morfismo regular $f: X \to Y$ es un __morfismo finito__ si __existe__ un cubrimiento de Y por abiertos afines $Y = \bigcup_{i \in I} V_i$ tal que:
① $\mathcal{U}_i := f^{-1}(V_i)$ es un abierto afín de X.
② El morfismo $f: \mathcal{U}_i \to V_i$ es finito.

__Ejemplo__: Si $Z \subseteq X$ es una subvariedad cerrada, entonces la inclusión $Z \hookrightarrow X$ es un morfismo finito.

__Lema__: Sea Y variedad algebraica __afín__, y $Y = \bigcup_{i \in I} V_i$ cubrimiento afín con $V_i = V_{g_i}$ abierto (principal) de la forma $\{y \in Y \text{ tq } g_i(y) \neq 0\}$ para $g_i \in \mathcal{O}(Y)$. Sea $f: X \to Y$ un morfismo regular, con X var. alg. arbitraria, y sea $\mathcal{U}_i := f^{-1}(V_i)$. Entonces, si se cumplen:
① $\mathcal{U}_i \subseteq X$ es un abierto afín.
② $f: \mathcal{U}_i \to V_i$ es finito.
$\Rightarrow$ X es una variedad algebraica afín y $f: X \to Y$ es un morfismo finito.

__Dem__: Sean $A = \mathcal{O}(X)$ y $B = \mathcal{O}(Y)$ k-álgebras, donde $f^*: B \to A$ permite ver A como B-mód. Más aún, si $f_i := f^*(g_i) \in \mathcal{O}(X)$, entonces $\mathcal{O}(V_i) = B_{g_i}$ y $\mathcal{O}(\mathcal{U}_i) = A_{f_i}$ localizaciones.
Por hipótesis, A_{f_i} es un B_{g_i}-módulo fin. generado por (finitos) $a_{ij} = \frac{u_{ij}}{f_i^{N_{ij}}}$ con $u_{ij} \in A$, $N_{ij} \in \mathbb{N}$ y $j \in J$ conj. finito. Reescalando por $f_i^{N_{ij}} = f^*(g_i)^{N_{ij}}$ (usando la estructura de B_{g_i}-módulo), podemos suponer que $a_{ij} \in A$, ie, $A_{f_i} = \langle a_{ij} \rangle_{j \in J}$ como B_{g_i}-módulo.
Veamos que A es un B-módulo fin. generado: Sea $v \in A$. Dado que su imagen en A_{f_i} está generada por los a_{ij}, existen $n_i \in \mathbb{N}$ y $v_{ij} \in B$ tal que:

$$f_i^{n_i} v = \sum_{j \in J} f^*(v_{ij})\, a_{ij} \quad \text{en } A. \quad (\star)$$

Por otra parte, dado que $Y = \bigcup_{i \in I} V_{g_i} = \bigcup_{i \in I} V_{g_i^{n_i}}$ es afín, el Hilbert Nullstellensatz implica que existen $u_i \in B$ tal que $1 = \sum_{i \in I} u_i g_i^{n_i}$ en B. Aplicando f^* obtenemos

$$1 = \sum_{i \in I} f^*(u_i)\, f_i^{n_i} \quad \text{en } A. \quad (\star\star)$$

$(\star) + (\star\star)$
$\Rightarrow v = \sum_{i,j} f^*(u_i v_{ij})\, a_{ij}$, ie, $A = \langle a_{ij} \rangle$ como B-módulo ✓. En part, A es una B-álgebra finitamente generada $\underset{B\ k\text{-alg fin. gen.}}{\Longrightarrow}$ $A = \mathcal{O}(X)$ es una k-alg. fin. gen (y reducida).
Sea $X' := \mathrm{Specm}(A)$ var. alg. afín, con $\mathcal{O}(X') \cong \mathcal{O}(X)$ (ver §8). Entonces, obtenemos $X \xrightarrow{\phi} X' \xrightarrow{f'} Y$, donde f' corresponde a $f^*: B = \mathcal{O}(Y) \to A \cong \mathcal{O}(X')$ y donde $\phi: X \to X'$, $x \mapsto m_x$. Como A es entero sobre B, $f': X' \to Y$ es un morfismo finito.
Finalmente, $\phi|_{\phi^{-1}(\mathcal{U}_i)}: \phi^{-1}(\mathcal{U}_i) \xrightarrow{\sim} \mathcal{U}_i$ isomorfismo pues $\mathcal{U}_i$ es afín! $\Rightarrow X \cong X'$ y $f \cong f'$ ■

<u>Prop</u>: Sea $f : X \to Y$ un morfismo finito entre variedades algebraicas. Entonces, para <u>todo</u> abierto afín $V \subseteq Y$ se tiene que $\mathcal{U} := f^{-1}(V)$ es un abierto afín de X, y además $f : \mathcal{U} \to V$ es un morfismo finito.

<u>Dem</u>: En el caso particular donde $X = \mathrm{Specm}(A)$ e $Y = \mathrm{Specm}(B)$ son afines, tenemos que $f^* : B \to A$ permite ver A como un B-módulo fin. generado. Si consideramos $V = V_g \subseteq Y$ un abierto principal, con $g \in \mathcal{O}(Y)$, entonces $\mathcal{U} = f^{-1}(V) = \mathrm{Specm}(A_h)$ es afín, donde $h = f^*(g) \in \mathcal{O}(X)$. Además, A_h es un B_g-módulo fin. gen. (pues A entero sobre B) ✓
Si $V \subseteq Y$ es un abierto afín arbitrario, basta cubrirlo por $V_i = V_{g_i} \cap V$ y notar que $\mathcal{U}_i = f^{-1}(V_i)$ es afín y $f : \mathcal{U}_i \to V_i$ es finito $\underset{\text{Lema}}{\Rightarrow}$ $\mathcal{U} = f^{-1}(V)$ es afín y $f : \mathcal{U} \to V$ finito ✓
En el <u>caso general</u>: Por definición de morfismo finito, <u>existe</u> un cubrimiento de Y por abiertos afines $V_i \subseteq Y$ tq $\mathcal{U}_i = f^{-1}(V_i) \subseteq X$ es un abierto afín y $f : \mathcal{U}_i \to V_i$ finito. Sea $V \subseteq Y$ un abierto afín arbitrario: Sea $W_i = V_i \cap V$ abierto afín (Y es separada!) y cubrimos V por abiertos principales V_{ij}, donde $V_{ij} \subseteq W_i$ dado por $g_{ij} \neq 0$.
El caso particular anterior implica que $\mathcal{U}_{ij} = f^{-1}(V_{ij}) \subseteq \mathcal{U} = f^{-1}(V)$ es afín y $f : \mathcal{U}_{ij} \to V_{ij}$ es un morfismo finito $\overset{\text{Lema}}{\Rightarrow}$ $\mathcal{U}$ es afín y $f : \mathcal{U} \to V$ es un morfismo finito. ∎

[<u>Corolario</u>: La composición de dos morfismos finitos es un morfismo finito.]

<u>Dem</u>: $\boxed{\text{Ejercicio}}$. ∎

<u>Prop</u>: Sea $f : X \to Y$ un morfismo finito entre variedades algebraicas. Entonces:
① Para todo $y \in Y$, la <u>fibra</u> $f^{-1}(y) = \{x \in X \text{ tq } f(x) = y\}$ es un conjunto finito.
② La imagen $\mathrm{Im}(f) \subseteq Y$ es un conjunto cerrado.

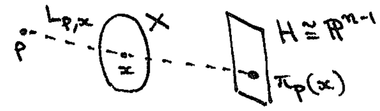
<u>Dem</u>: Ambas afirmaciones son locales, por lo que podemos suponer X e Y var. afines.
Sean $A = \mathcal{O}(X)$ y $B = \mathcal{O}(Y)$ k-álgebras, y $f^* : B \to A$ pullback. Veamos ①:
Elegimos generadores $x_1, \dots, x_m$ de A (que definen $X \subseteq \mathbb{A}^m$). Cada x_i es entero sobre B y luego hay una relación $x_i^{d_i} + \sum_{j=1}^{d_i} f^*(b_{ij}) x_i^{d_i - j} = 0$ (✱) en A. Luego, si $x \in f^{-1}(y)$ entonces $f^*(b_{ij})(x) = b_{ij}(f(x)) = b_{ij}(y)$ depende sólo de $y \in Y$. Así, al fijar $y \in Y$ se obtienen finitas soluciones para x_i y luego finitas para $x = (x_1, \dots, x_m) \in X$ ✓
Veamos ②: Sea $I = \ker(f^*) \subseteq B$ y probemos que $\mathrm{Im}(f) = f(X) = V(I)$ cerrado en Y.
Para ello, recordemos que si $x \in X$ y $\mathfrak{m}_x \subseteq A$ es el ideal maximal correspondiente, entonces $(f^*)^{-1}(\mathfrak{m}_x) = \mathfrak{m}_y$ es el ideal corresp. a $y = f(x) \in Y$. En part, dado que $0 \in \mathfrak{m}_x \subseteq A$, tenemos que $I = \ker(f^*) \subseteq (f^*)^{-1}(\mathfrak{m}_x) = \mathfrak{m}_y$, i.e., $y = f(x) \in V(I)$.
Así, $\mathrm{Im}(f) \subseteq V(I)$ ✓ Por otra parte, si $y \in Y$ y $\mathfrak{m}_y \subseteq B$ es el ideal maximal corresp, entonces $f^{-1}(y)$ corresponde a ideales maximales $\mathfrak{m} \subseteq A$ tal que $f^*(\mathfrak{m}_y) \subseteq \mathfrak{m}$. Luego, $y \notin \mathrm{Im}(f) \iff \langle f^*(\mathfrak{m}_y) \rangle = A$. Por ende, para probar que $V(I) \subseteq \mathrm{Im}(f)$ consideramos $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_y \subseteq B$ ideal maximal tq $I \subseteq \mathfrak{m}$ y suponemos por contradicción que $\langle f^*(\mathfrak{m}) \rangle = A$:
Sean $a_1, \dots, a_m \in A$ generadores de A como B-módulo. Entonces, $\langle f^*(\mathfrak{m}) \rangle = A$ implica que existen $b_{ij} \in \mathfrak{m}$ tq $a_i = \sum_{j=1}^{m} f^*(b_{ij}) a_j$ en A. Matricialmente:

$$(I_m - f^*(b_{ij})) \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \det(I_m - f^*(b_{ij})) = 0 \text{ en } A \text{ y, luego, } 1_A \in f^*(\mathfrak{m}).$$

$\Rightarrow (f^*)^{-1}(1_A) = 1_B \subseteq \mathfrak{m} + I$, y dado que $I \subseteq \mathfrak{m}$, obtenemos $\langle 1_B \rangle = B = \mathfrak{m}$, contradicción! ∎

<u>Ejemplo</u>: El blow-up $\varepsilon : \mathrm{Bl}_p(\mathbb{A}^n) \to \mathbb{A}^n$ <u>no</u> es finito (pues $E = \varepsilon^{-1}(p) \cong \mathbb{P}^{n-1}$ de cardinal infinito)

<u>Def</u>: Sea $X \subsetneq \mathbb{P}^n$ un cerrado y sea $p \in \mathbb{P}^n$ tal que $p \notin X$. Dados un hiperplano $H \cong \mathbb{P}^{n-1}$ tal que $p \notin H$, definimos la <u>proyección de p a H</u> como el morfismo $\pi_p : X \to H \cong \mathbb{P}^{n-1}$ que asocia a cada $x \in X$ el punto $\pi_p(x) \in H$ obtenido como la intersección de la recta $L_{p,x} \cong \mathbb{P}^1$ que pasa por p y x con el hiperplano H, ie, $L_{p,x} \cap H = \{\pi_p(x)\}$.

<u>Obs</u>: 

Siempre podemos escoger coordenadas de $\mathbb{P}^n$ de tal suerte que $p = [1, 0, \dots, 0] \in \mathbb{P}^n$ y $H = \{x_0 = 0\}$.

En tal caso, $\pi_p([x_0, \dots, x_n]) = [0, x_1, \dots, x_n]$. En part, $\pi_p(X) \subseteq \mathbb{P}^{n-1}$ no depende de H (módulo isomorfismo).

<u>Prop</u>: Sea $X \subsetneq \mathbb{P}^n$ un cerrado y sea $p \in \mathbb{P}^n$ tal que $p \notin X$. Entonces, dado un hiperplano $H \cong \mathbb{P}^{n-1}$ tal que $p \notin H$, la proyección $\pi_p : X \to H$ es un morfismo finito.

<u>Dem</u>: Podemos suponer que $X = V(f)$ es una hipersuperficie (en general, X será un cerrado dentro de una hipersuperficie) definida por $f \in k[x_0, \dots, x_n]$ homogéneo de grado d. Además, podemos suponer que $p = [1, 0, \dots, 0]$ y $H = \{x_0 = 0\}$. Así, dado que $f(p) \neq 0$ entonces f es de la forma $f = x_0^d + \sum_{i=1}^{d} g_i(x_1, \dots, x_n) x_0^{d-i}$. En part, si nos restringimos al abierto afín $\mathcal{U}_n = \{x_n \neq 0\} \cong \mathbb{A}^n$ con coordenadas $y_0, \dots, y_{n-1}$, donde $y_i = \frac{x_i}{x_n}$, entonces $\pi^{-1}(H \cap \mathcal{U}_n) = X \cap \mathcal{U}_n$ y $\pi_p|_{\mathcal{U}_n} : X \cap \mathcal{U}_n \to H \cap \mathcal{U}_n$, $(y_0, \dots, y_{n-1}) \mapsto (0, y_1, \dots, y_{n-1})$. Por otra parte, $\mathcal{O}(X \cap \mathcal{U}_n)$ es entero sobre $\mathcal{O}(H \cap \mathcal{U}_n) \cong k[y_1, \dots, y_{n-1}]$ pues

$$y_0^d + \sum_{i=1}^{d} a_i y_0^{d-i} = 0 \quad , \quad \text{con } a_i = g_i(y_1, \dots, y_{n-1}, 1) \in \mathcal{O}(H \cap \mathcal{U}_n),$$

implica que y_0 es entero sobre $\mathcal{O}(H \cap \mathcal{U}_n)$ ✓ El mismo argumento, reemplazando $\mathcal{U}_n$ por $\mathcal{U}_i$ con $i = 1, \dots, n$, nos permite concluir que $\pi_p : X \to H$ es finito. ■

Como consecuencia, obtenemos el siguiente resultado de Emmy Noether (1926):

<u>Teorema</u> (Normalización de Noether): Sea X una variedad algebraica afín. Entonces, existe un morfismo finito sobreyectivo $f : X \to \mathbb{A}^d$, para cierto $d \in \mathbb{N}$.

<u>Dem</u>: Sup. que $X \subseteq \mathbb{A}^n$. Si $X = \mathbb{A}^n$ OK ✓ Sup. que $X \subsetneq \mathbb{A}^n \cong \mathcal{U}_0 = \{x_0 \neq 0\} \subseteq \mathbb{P}^n$ y consideremos la clausura $\overline{X} \subseteq \mathbb{P}^n$ de X. En part, $X \cong \overline{X} \cap \mathcal{U}_0$. Luego, si escogemos $p \notin \mathcal{U}_0$ tal que $p \notin \overline{X}$ y $H \cong \mathbb{P}^{n-1}$ un hiperplano tal que $p \notin H$, entonces la proyección $\pi_p : \overline{X} \to \mathbb{P}^{n-1} \cong H$ es un morfismo finito que se restringe a $\pi_p|_X : X \to \mathbb{A}^{n-1}$ que también es un morfismo finito. Si $\pi_p|_X$ es sobreyectivo estamos OK, sino continuamos proyectando hasta obtener $X \to \mathbb{A}^d$ finito y sobreyectivo. ■

En lo que sigue, usaremos este resultado para comparar las diferentes nociones de dimensión. Para ello, necesitamos el siguiente resultado:

<u>Lema</u> (Cohen-Seidenberg): Sea $f : X \to Y$ un morfismo finito sobreyectivo entre variedades algebraicas. Entonces,

① Para todo $Y' \subseteq Y$ cerrado irreducible, existe $X' \subseteq X$ cerrado irreducible tq $f(X') = Y'$.

② Si $X', X'' \subseteq X$ son cerrados irreducibles tq $f(X') = f(X'')$, entonces X' y X'' <u>no</u> son comparables (ie, $X' \nsubseteq X''$ y $X'' \nsubseteq X'$).

<u>Dem</u>: Para probar ① escribimos $f^{-1}(Y') = X_1 \cup \dots \cup X_m$ con X_i irreducible. Luego, aplicando f, obtenemos $Y' = f(X_1) \cup \dots \cup f(X_m) \underset{Y' \text{ irred}}{\Rightarrow} Y' = f(X_i)$ para cierto $X_i =: X'$ ✓

Para probar ②, suponemos por contradicción que $X' \subseteq X''$ y escogemos $x \in X'' \setminus X'$.

Sea $\mathcal{U}$ una vecindad afín del punto x en X''. Luego, $X'\cap\mathcal{U}$ es un cerrado propio de la variedad afín $X''\cap\mathcal{U}$, y por ende existe $u\in\mathcal{O}(X''\cap\mathcal{U})$ tal que $u(x)\neq 0$ pero $u|_{X'\cap\mathcal{U}}=0$. Sea $V=f(\mathcal{U})$ abierto (afín), pues f morfismo cerrado. Entonces, $f|_{\mathcal{U}}:\mathcal{U}\to V$ morfismo finito y $f(X'\cap\mathcal{U})=f(X''\cap\mathcal{U})=f(X')\cap V$. En part, $u\in\mathcal{O}(X''\cap\mathcal{U})$ es entero sobre $\mathcal{O}(W)$, con $W=f(X''\cap\mathcal{U})$, y por ende hay una relación

$$(\ast)\quad u^d+f^*(v_1)u^{d-1}+\ldots+f^*(v_d)=0 \quad\text{en } \mathcal{O}(X''\cap\mathcal{U}),$$

donde $v_i\in\mathcal{O}(W)$ y $d\in\mathbb{N}$ minimal. Dado que $u\neq 0$ en $X''\cap\mathcal{U}$ y d es minimal, tenemos que $f^*(v_d)=v_d\circ f\neq 0$. Sin embargo, u se anula en $X'\cap\mathcal{U}$ y luego $(\ast)$ implica que $f^*(v_d)|_{X'\cap\mathcal{U}}=0 \Rightarrow f^*(v_d)=0$ pues $f(X')=f(X'')$, una contradicción. ∎

Prop: Sea $f:X\to Y$ un morfismo finito sobreyectivo entre variedades algebraicas <u>irreducibles</u>. Entonces: ① $\dim(X)=\dim(Y)$.
② $\dim_K(X)=\dim_K(Y)$.

Dem: En ① podemos sup. que X e Y son afines. Luego, $\mathcal{O}(X)$ es entero sobre $\mathcal{O}(Y)$ vía $f^*:\mathcal{O}(Y)\to\mathcal{O}(X)$. $\Rightarrow k(X)$ es una extensión algebraica de $k(Y)$. En particular, $\operatorname{tr\,deg}_k k(X)=\operatorname{tr\,deg}_k k(Y)$, i.e., $\dim(X)=\dim(Y)$ ✓

En ② consideramos $X_0\subsetneq\ldots\subsetneq X_d$ cerrados irreducibles en X, y obtenemos una cadena $Y_0\subseteq\ldots\subseteq Y_d$ en Y, donde $Y_i:=f(X_i)$ irreducible y cerrado (pues f finito). Lema $\Rightarrow Y_i\neq Y_{i+1}$ y luego $\dim_K(Y)\geq\dim_K(X)$. Por otro lado, si consideramos en Y la cadena $Y_0\subsetneq\ldots\subsetneq Y_\ell$ de cerrados irreducibles, entonces el Lema anterior permite encontrar $X_0\subsetneq\ldots\subsetneq X_\ell$ cadena de cerrados irred en X, i.e., $\dim_K(X)\geq\dim_K(Y)$. ∎

Teorema: Sea X una variedad algebraica irreducible. Entonces, $\dim(X)=\dim_K(X)$.

Dem: Podemos suponer que $X\subseteq\mathbb{A}^n$ es afín y usar inducción en $n\in\mathbb{N}$, siendo el resultado cierto para $n=0$:

$\boxed{\text{Caso 1}}$ $X\subsetneq\mathbb{A}^n \underset{\text{Noether}}{\Longrightarrow} \exists f:X\to\mathbb{A}^m$ finito sobreyectivo, con $m<n$. Luego,

$$\dim_K(X)\underset{\text{Prop.}}{=}\dim_K(\mathbb{A}^m)\underset{\text{Ind.}}{=}\dim(\mathbb{A}^m)\underset{\text{Prop.}}{=}\dim(X) \quad ✓$$

$\boxed{\text{Caso 2}}$ $X=\mathbb{A}^n$: sabemos que $\dim(\mathbb{A}^n)=n$ y que $\dim_K(\mathbb{A}^n)\geq n$. Consideremos $X_0\subsetneq X_1\subsetneq\ldots\subsetneq X_d=\mathbb{A}^n$ cadena de cerrados irreducibles, entonces $\dim_K(X_{d-1})\geq d-1$. Dado que $X_{d-1}\subsetneq\mathbb{A}^n$, $\exists f:X_{d-1}\to\mathbb{A}^m$ finito sobreyectivo, con $m<n$. Luego,

$$d-1\leq\dim_K(X_{d-1})\underset{\text{Prop}}{=}\dim_K(\mathbb{A}^m)\underset{\text{Ind.}}{=}m\leq n-1 \Rightarrow d\leq n, \text{ y así } \dim_K(\mathbb{A}^n)=n. ∎$$

⚠ <u>Obs importante</u>: En Álgebra conmutativa, el <u>Teorema del Ideal principal de Krull</u> (o también "Krull Hauptidealsatz") establece que "En un anillo noetheriano, todo ideal principal $I=\langle f\rangle$ verifica que cada ideal primo minimal sobre I tiene a lo más altura 1". Geométricamente:

Teorema (Krull, 1928): Sea X una variedad algebraica afín e irreducible. Sea $f\in\mathcal{O}(X)$ no-nula y no-invertible. Entonces, toda componente irreducible de $V(f)\subseteq X$ es de dimensión $\dim(X)-1$.

$\boxed{\text{Ejercicio}}$ Sea $f\in k[X_0,\ldots,X_n]$ polinomio homogéneo no-constante, y sea $X=V(f)\subseteq\mathbb{P}^n$ la hipersuperficie definida por f. Probar que $\dim(X)=n-1$.

<u>Terminología</u>: Sea X una variedad algebraica (irreducible) de $\dim(X)=n$. Decimos que X es una <u>curva</u> (resp. <u>superficie</u>, resp. <u>threefold</u>, resp. <u>fourfold</u>, etc) si $n=1$ (resp. $n=2$, resp. $n=3$, resp. $n=4$, etc). También se habla de "curva algebraica", "superficie algebraica", "3-fold algebraico", etc.