§14. El blow-up de una variedad afín

En esta sección discutiremos uno de los ejemplos más importantes de morfismos birracionales: sea $X \subseteq \mathbb{A}^n$ una variedad alg. afín irreducible y sean $f_1, \dots, f_r \in \mathcal{O}(\mathbb{A}^n)$ polinomios que no se anulan en X. En part, $\mathcal{U} := X \setminus V(f_1, \dots, f_r)$ es un abierto denso de X y

$$f : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{P}^{r-1}, \quad x \mapsto [f_1(x), \dots, f_r(x)]$$

es un morfismo regular, cuyo grafo $\Gamma_f = \{(x, f(x)), x \in \mathcal{U}\} \subseteq \mathcal{U} \times \mathbb{P}^{r-1}$ es isomorfo a $\mathcal{U}$. La clausura $\overline{\Gamma_f}^{Zar}$ en $X \times \mathbb{P}^{r-1}$ es llamado el blow-up de X en $f_1, \dots, f_r$ y es denotado $\widetilde{X}$ usualmente.

⚠ Notar que hay una proyección natural de $\widetilde{X}$ a X (primer factor), que usualmente se denota $\varepsilon : \widetilde{X} \to X$ y se dice que ε es el blow-up de X en $f_1, \dots, f_r$.

Obs: ① $\varepsilon|_{\Gamma_f} : \Gamma_f \xrightarrow{\sim} \mathcal{U}$ es un isomorfismo. Luego, $\varepsilon : \widetilde{X} \to X$ es un morfismo birracional.

② Dado que $\mathcal{U} \cong \Gamma_f$ es irreducible y $\widetilde{X} = \overline{\Gamma_f}^{Zar}$, $\widetilde{X}$ es irreducible.

③ El conjunto $\widetilde{X} \setminus \Gamma_f = \varepsilon^{-1}(V(f_1, \dots, f_r))$, donde usualmente ε no es un isomorfismo, es llamado el conjunto excepcional del blow-up, denotado $\mathrm{Exc}(\varepsilon)$ o simplemente $E \subseteq \widetilde{X}$.

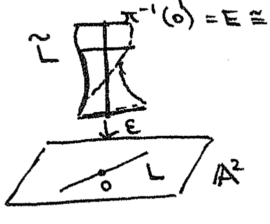
④ Sea $Y \subseteq X$ cerrado, y sea $\widetilde{Y}$ el blow-up de Y en $f_1, \dots, f_r$. Entonces, tenemos $\widetilde{Y} \subseteq Y \times \mathbb{P}^{r-1} \subseteq X \times \mathbb{P}^{r-1}$ es una subvariedad cerrada de $\widetilde{X}$, dada por la clausura de $Y \cap \mathcal{U}$ en $\widetilde{X}$ (usando el isomorfismo $\Gamma_f \cong \mathcal{U}$). Decimos que $\widetilde{Y} \subseteq \widetilde{X}$ es la transformada estricta de Y en el blow-up de X.

Ejemplos: ① Si $r = 1$, entonces $\widetilde{X} \subseteq X \times \mathbb{P}^0 \cong X$ y luego $X \cong \widetilde{X}$.

② En $X = \mathbb{A}^2$ con coordenadas (x,y) consideramos $f_1 = x$, $f_2 = y$, y luego el blow-up $\widetilde{X}$ en (x,y) es una subvariedad de $\mathbb{A}^2 \times \mathbb{P}^1$. El morfismo $(x,y) \mapsto [x:y]$ está bien definido en $\mathcal{U} = \mathbb{A}^2 \setminus \{(0,0)\}$ y en dicho abierto el grafo está dado por

$$\Gamma = \left\{((x,y),[u,v]) \in \mathcal{U} \times \mathbb{P}^1 \text{ tq } \det\begin{vmatrix} x & u \\ y & v \end{vmatrix} = xv - yu = 0\right\} \subseteq \mathcal{U} \times \mathbb{P}^1$$

Luego, $\widetilde{X} = \{((x,y),[u,v]) \in \mathbb{A}^2 \times \mathbb{P}^1 \text{ tq } xv = yu\} \subseteq \mathbb{A}^2 \times \mathbb{P}^1$ y el morfismo $\varepsilon : \widetilde{X} \to \mathbb{A}^2$ está dado por $\varepsilon((x,y),[u,v]) = (x,y)$. En part, $E = \varepsilon^{-1}((0,0)) \cong \mathbb{P}^1$.



Obs: Rectas vectoriales $L \subseteq \mathbb{A}^2$ intersectan $(0,0)$ y la transformada estricta $\widetilde{L}$ es una recta en $\widetilde{X}$ que intersecta $E \cong \mathbb{P}^1$ en el punto $[L]$ de $\mathbb{P}^1$. En part, si L_1 y L_2 son dos rectas vectoriales distintas, entonces $\widetilde{L}_1 \cap \widetilde{L}_2 = \emptyset$.

Ejercicio Sea $X \subseteq \mathbb{A}^n$ var. alg. afín irreducible y sean $f_1, \dots, f_r \in \mathcal{O}(X)$ no-nulos.

① Probar que el blow-up de X en $f_1, \dots, f_r$ verifica

$$\widetilde{X} \subseteq \{(x,[y]) \in X \times \mathbb{P}^{r-1} \text{ tq } y_i f_j(x) = y_j f_i(x) \ \forall i,j = 1, \dots, r\}.$$

② Sean $g_1, \dots, g_s \in \mathcal{O}(X)$ no-nulos tal que $I = \langle f_1, \dots, f_r \rangle = \langle g_1, \dots, g_s \rangle$ y sean $\varepsilon : \widetilde{X} \to X$ y $\varepsilon' : \widetilde{X}' \to X$ los blow-up de X en $(f_1, \dots, f_r)$ y $(g_1, \dots, g_s)$, resp. Probar que existe un isomorfismo $\varphi : \widetilde{X} \xrightarrow{\sim} \widetilde{X}'$ tal que $\varepsilon' \circ \varphi = \varepsilon$.

$$\begin{tikzcd} \widetilde{X} \arrow[rr, "\sim"] \arrow[dr, "\varepsilon"'] & & \widetilde{X}' \arrow[dl, "\varepsilon'"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

En particular, podemos definir $Z = V(I) \subseteq X$ subvar. cerrada, y decir que $\widetilde{X} := \mathrm{Bl}_Z X \xrightarrow{\varepsilon} X$ es el blow-up de X a lo largo de Z. La subvariedad Z es llamado el centro del blow-up.

③ Sea $C = \{(x,y) \in \mathbb{A}^2 \text{ tq } y^2 = x^2(x+1)\}$ (cúbica nodal). Calcular $\widetilde{C}$ en $\widetilde{\mathbb{A}}^2 = \mathrm{Bl}_{(0,0)}(\mathbb{A}^2)$.