§13. Funciones racionales y aplicaciones racionales

Def: Sea X una variedad algebraica. Consideremos el conjunto de pares $(\mathcal{U}, f)$ donde $\mathcal{U} \subseteq X$ es un abierto denso de X y $f: \mathcal{U} \to k$ función regular, y definamos la relación de equivalencia

$$(\mathcal{U}, f) \sim (V, g) \quad \text{si} \quad f|_{\mathcal{U}\cap V} = g|_{\mathcal{U}\cap V}.$$

Denotamos por $\mathrm{Rat}(X)$ o por $k(X)$ el k-álgebra de clases de equivalencia, y diremos que la clase de $(\mathcal{U}, f)$, denotada $f: X \dashrightarrow k$, es una función racional en X

Obs: ① A pesar de que una función racional no es una función (no está definida en todo X), podemos considerar su dominio de definición como el abierto maximal donde está definida, i.e., para $\varphi: X \dashrightarrow k$ en $k(X)$ definimos

$$\mathrm{Dom}(\varphi) := \bigcup_{[(\mathcal{U}, f)] = \varphi} \mathcal{U}$$

② Por definición, si $V \subseteq X$ es un abierto denso de X, entonces la restricción

$$k(X) \xrightarrow{\sim} k(V) \quad , \quad [(\mathcal{U}, f)] \longmapsto [(\mathcal{U}\cap V, f|_{\mathcal{U}\cap V})]$$

es un isomorfismo de k-álgebras.

③ Si X es irreducible, entonces $k(X)$ es un cuerpo. En efecto, si $(\mathcal{U}, f)$ representa $\varphi: X \dashrightarrow k$ no-nula, entonces $V = \{x \in \mathcal{U} \text{ tq } f(x) \neq 0\}$ es denso en X (pues X irred.) y φ^{-1} está dada por $(V, 1/f)$. En general, si $X_1, \ldots, X_m$ son las componentes irreducibles de X, entonces $k(X) \cong k(X_1) \times \ldots \times k(X_m)$.

Prop: Sea $X \subseteq \mathbb{A}^n$ variedad algebraica afín irreducible. Entonces, $k(X)$ es isomorfo al cuerpo de fracciones $\mathrm{Fr}(\mathcal{O}(X))$ del dominio entero $\mathcal{O}(X)$ de funciones regulares en X.

Dem: Si f/g es un elemento de $\mathrm{Fr}(\mathcal{O}(X))$, le asociamos la función racional dada por $[(\mathcal{U}_g, f/g)]$, donde $\mathcal{U}_g = \{x \in X \text{ tq } g(x) \neq 0\}$ abierto afín. Recíprocamente, si $\varphi: X \dashrightarrow k$ definida por $f: \mathcal{U} \to k$ entonces $Y = X \setminus \mathcal{U}$ es un cerrado Zariski de X y en particular existe $g \in \mathcal{O}(X)$ no-nula tal que $\mathcal{U}_g \subseteq \mathcal{U}$. Reemplazando $\mathcal{U}$ por $\mathcal{U}_g$, y usando que $\mathcal{O}(\mathcal{U}_g) \cong \mathcal{O}(X)_g$ localización en g, tenemos que existen $u \in \mathcal{O}(X)$ y $N \in \mathbb{N}^{\geq 1}$ tal que $f = \frac{u}{g^N}$, y luego le asociamos a φ el elemento $\frac{u}{g^N}$ de $\mathrm{Fr}(\mathcal{O}(X))$ ✓ ■

Ejemplo: $k(\mathbb{A}^n) = k(\mathbb{P}^n) = k(X_1, \ldots, X_n)$ cuerpo de funciones racionales.

Def: Sean X e Y variedades algebraicas. Consideramos el conjunto de pares $(\mathcal{U}, f)$ donde $\mathcal{U} \subseteq X$ abierto denso de X y $f: \mathcal{U} \to Y$ morfismo regular, y definimos

$$(\mathcal{U}, f) \sim (V, g) \quad \text{si} \quad f|_{\mathcal{U}\cap V} = g|_{\mathcal{U}\cap V}.$$

Diremos que la clase de $(\mathcal{U}, f)$, denotada $f: X \dashrightarrow Y$, es una aplicación racional de X en Y.
En part, $k(X) = \{f: X \dashrightarrow \mathbb{A}^1 \text{ aplicación racional}\}$.

Obs: El dominio de definición de una aplicación racional $\varphi: X \dashrightarrow Y$ se define del mismo modo que antes. En part, φ es un morfismo regular si $\mathrm{Dom}(\varphi) = X$.

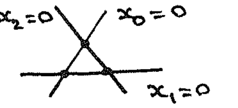
Terminología: Sea $\varphi: X \dashrightarrow Y$ aplicación racional. Decimos que φ es:

① Una aplicación birracional si existe $\psi: Y \dashrightarrow X$ aplicación racional tal que $\mathrm{Im}(\varphi) := \varphi(\mathrm{Dom}(\varphi)) \subseteq \mathrm{Dom}(\psi)$ y $\mathrm{Im}(\psi) \subseteq \mathrm{Dom}(\varphi)$, y $\psi \circ \varphi = \mathrm{Id}$ y $\varphi \circ \psi = \mathrm{Id}$.

② Un morfismo birracional si es una aplicación birracional con $\mathrm{Dom}(\varphi) = X$.

③ $\mathrm{Bir}(X) := \{f: X \dashrightarrow X \text{ aplicación birracional}\}$ grupo de automorfismos birracionales.

<u>Ejemplo</u>: sea $f : \mathbb{P}^2 \dashrightarrow \mathbb{P}^2$, $[x_0, x_1, x_2] \mapsto \left[\frac{1}{x_0}, \frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}\right]$ "<u>involución de Cremona</u>"



Notar que $f(x_0,x_1,x_2) = [x_1x_2, x_0x_2, x_0x_1]$ y luego $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{P}^2 \setminus \{p_0, p_1, p_2\}$ con $p_0 = [1,0,0]$, $p_1 = [0,1,0]$, $p_2 = [0,0,1]$. Además, $f \in \mathrm{Bir}(\mathbb{P}^2)$.

<u>Obs</u>: $Cr_n(k) := \mathrm{Bir}(\mathbb{P}^n(k))$ es llamado el <u>grupo de Cremona</u> (≈ 1863), y es un grupo difícil de estudiar. Un resultado importante de Max Noether y Castelnuovo (y Gizatullin) afirma que $Cr_2(\mathbb{C})$ está generado por $PGL_3(\mathbb{C})$ y la involución de Cremona.

$\boxed{\text{Ejercicio}}$ Sea $f : \mathbb{P}^3 \dashrightarrow \mathbb{P}^3$, $[x_0, x_1, x_2, x_3] \mapsto [x_0x_3, x_1x_3, x_2x_3, x_0^2 - x_1x_2]$. Determinar $\mathrm{Dom}(f)$, probar que $f \in \mathrm{Bir}(\mathbb{P}^3)$ y calcular $f^{-1} : \mathbb{P}^3 \dashrightarrow \mathbb{P}^3$.

<u>Def</u>: Sea $f : X \dashrightarrow Y$ aplicación racional entre variedades algebraicas. Decimos que f es <u>dominante</u> si $\mathrm{Im}(f) := f(\mathrm{Dom}(f))$ es densa en Y. En part, si $g : Y \dashrightarrow Z$ es una aplicación racional, entonces la composición $g \circ f : X \dashrightarrow Z$ está bien definida.

<u>Lema</u>: Sean $X \subseteq \mathbb{A}^n$ e $Y \subseteq \mathbb{A}^m$ variedades afines, y sea $f : X \to Y$ un morfismo regular. Entonces, f es dominante si y sólo si $f^* : \mathcal{O}(Y) \to \mathcal{O}(X)$ es inyectivo.

<u>Dem</u>: Sup. que f es dominante y sea $u \in \ker(f^*)$, ie, $u \circ f = 0$ en $\mathcal{O}(X)$. En part, $u = 0$ en $f(X)$ y luego $u = 0$ en $\overline{f(X)}^{Zar} = Y$ ✓
Recíprocamente, si f <u>no</u> es dominante entonces $\overline{f(X)}^{Zar} \subsetneq Y$ es un cerrado $\neq Y$ y luego existe $u : Y \to k$ regular tq $u|_{\overline{f(X)}^{Zar}} = 0$ pero $u \neq 0$ en $\mathcal{O}(Y)$, ie, $u \in \ker(f^*)$ es no-trivial y luego f^* <u>no</u> es inyectivo ✓ ■

<u>Ejemplo</u> (útil): Sea $f : X \to Y$ un morfismo (regular) <u>dominante</u> entre variedades alg. afines. Entonces, si X es irreducible entonces Y es irreducible también.
En efecto, $f^* : \mathcal{O}(Y) \hookrightarrow \mathcal{O}(X)$ identifica $\mathcal{O}(Y)$ con una sub-algebra del dominio entero $\mathcal{O}(X)$, y luego $\mathcal{O}(Y)$ es un dominio entero también, ie, Y es irreducible ✓

<u>Obs</u>: Un argumento similar al Lema anterior muestra que si $f : X \dashrightarrow Y$ aplicación racional <u>dominante</u> entre variedades algebraicas, entonces el pullback de funciones racionales (bien definido pues f dominante)

$$f^* : k(Y) \hookrightarrow k(X), \quad u \mapsto u \circ f$$

es un morfismo inyectivo de k-álgebras. Notar que $f^*|_k = \mathrm{Id}_k$ (funciones constantes).

<u>Prop</u>: Sean X e Y variedades algebraicas <u>irreducibles</u>, y sea

$$\varphi : k(Y) \hookrightarrow k(X)$$

un morfismo de k-extensiones de cuerpos (ie, morfismo de cuerpos tq $\varphi|_k = \mathrm{Id}_k$). Entonces, existe una única $f : X \dashrightarrow Y$ aplicación racional dominante tal que $\varphi = f^*$.

<u>Dem</u>: Sean $U \subseteq X$ y $V \subseteq Y$ abiertos afines no-vacíos (y luego densos), entonces $k(X) \cong k(U)$ y $k(Y) \cong k(V)$, por lo que podemos suponer X e Y afines. En part, si escribimos $B = \mathcal{O}(Y) \cong k[y_1, \ldots, y_m]/\mathcal{I}(Y)$ con generadores $y_1, \ldots, y_m \in \mathcal{O}(Y)$, entonces $k(Y) \cong \mathrm{Fr}(B)$.
Luego, si escribimos $\varphi(y_i) = \frac{u_i}{g_i} \in k(X)$ y consideramos $U = U_{g_1} \cap \ldots \cap U_{g_m} \subseteq X$ abierto afín donde cada $\varphi(y_i)$ es regular, entonces la restricción $\mathcal{O}(Y) \to k(X)$ se factoriza en $\tilde{\varphi} : \mathcal{O}(Y) \to \mathcal{O}(U)$, y luego (ver §6, pág 22) existe $f : U \to Y$ regular tq $\tilde{\varphi} = f^*$.
En part, $[(U, f)]$ define una aplicación racional $f : X \dashrightarrow Y$. Para ver que f es dominante consideremos el siguiente diagrama conmutativo con flechas verticales <u>inyectivas</u>:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{O}(Y) \arrow[r, "\tilde{\varphi} = f^*"] \arrow[d, hook] & \mathcal{O}(\mathcal{U}) \arrow[d, hook] \\ k(Y) \arrow[r, hook, "\varphi"] & k(X) \end{tikzcd}$$

Luego, $\tilde{\varphi} = f^* : \mathcal{O}(Y) \hookrightarrow \mathcal{O}(\mathcal{U})$ es inyectiva, ie, $f : \mathcal{U} \to Y$ dominante. Más aún, $f^* : k(Y) \hookrightarrow k(X)$ coincide con φ, y la unicidad de f se obtiene del hecho que si $g^* = \varphi$ para cierta $g : X \dashrightarrow Y$ dominante, entonces $f^*(y_i) = g^*(y_i)$ en $k(X)$ y luego f y g coinciden en el abierto denso $\mathcal{U}$ ■

Def: Sean X e Y variedades algebraicas. Decimos que X e Y son birracionalmente equivalentes (o birracionales) si existen $\mathcal{U} \subseteq X$ y $V \subseteq Y$ abiertos densos (no-vacíos) tal que $\mathcal{U} \cong V$. En tal caso, escribimos $X \overset{\sim}{\dashrightarrow} Y$ o bien $X \underset{\text{bir}}{\sim} Y$.

Obs: La geometría birracional busca estudiar variedades algebraicas módulo equivalencia birracional, ie, dada X var. alg. se busca Y "lo más simple posible" tal que $X \overset{\sim}{\dashrightarrow} Y$.

Teorema: Sean X e Y variedades algebraicas irreducibles. Entonces, X e Y son birracionales si y sólo si las extensiones $k(X) \cong k(Y)$ son k-isomorfas.

Dem: Sea $\varphi : k(Y) \to k(X)$ un k-isomorfismo de cuerpos, y sean $f : X \dashrightarrow Y$ dominante tal que $f^* = \varphi$, y $g : Y \dashrightarrow X$ dominante tal que $g^* = \varphi^{-1}$. Sean $\mathcal{U} = \mathrm{Dom}(f) \subseteq X$ y $V = \mathrm{Dom}(g) \subseteq Y$. Achicando $\mathcal{U}$ si fuera necesario, podemos suponer que $f(\mathcal{U}) \subseteq V$. Por unicidad de f y g, tenemos que $g(f(x)) = x$ $\forall x \in \mathcal{U}$. Del mismo modo, si $W := g^{-1}(\mathcal{U})$ abierto denso de Y, entonces $f(g(y)) = y$ $\forall y \in W$ y $f(\mathcal{U}) \subseteq W$. Así, $f|_{\mathcal{U}} : \mathcal{U} \to W$ y $g|_W : W \to \mathcal{U}$ son inversas una de la otra ✓ ■

Def: Una variedad algebraica irreducible X es racional si $X \overset{\sim}{\dashrightarrow} \mathbb{A}^n$, ie, los cuerpos de funciones racionales $k(X) \cong k(t_1, \dots, t_n)$ son k-isomorfos, para cierto $n \in \mathbb{N}^{\geq 1}$.

Ejemplo: ① $\mathbb{P}^n$ y $Gr(k,n)$ son racionales.

② La aplicación $\mathbb{A}^1 \dashrightarrow C = \{(x,y) \in \mathbb{A}^2 \text{ tq } x^2 + y^2 = 1\}$, $t \mapsto \left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\right)$ es birracional.

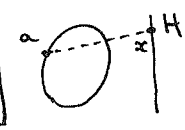
③ La aplicación dominante $\mathbb{A}^1 \to C = \{(x,y) \in \mathbb{A}^2 \text{ tq } y^2 = x^3\}$, $t \mapsto (t^2, t^3)$ es birracional, con inversa $C \dashrightarrow \mathbb{A}^1$, $(x,y) \mapsto \frac{y}{x}$. Así, $C \overset{\sim}{\dashrightarrow} \mathbb{A}^1$ pero $C \not\cong \mathbb{A}^1$.

$\boxed{\text{Ejercicio}}$ ① Probar que $C = \{(x,y) \in \mathbb{A}^2 \text{ tq } y^2 = x^3 - 1\}$ no es birracional a $\mathbb{A}^1$.

[Indicación: Sup. que existe $\mathbb{A}^1 \overset{\sim}{\dashrightarrow} C$, $t \mapsto (x(t), y(t))$ con $x(t) = \frac{p(t)}{q(t)}$, $y(t) = \frac{r(t)}{s(t)}$ donde $(p,q) = (r,s) = 1$ en $k[t]$ y llegar a una contradicción.]

② Sup. car$(k) \neq 2$. Probar que toda hipersuperficie cuadrica $\{Q(x_0, \dots, x_n) = 0\}$ en $\mathbb{P}^n$ es racional.

[Indicación: Sea $a \in \mathbb{P}^n$ tq $Q(a) = 0$ y sea $H \cong \mathbb{P}^{n-1}$ hiperplano tal que $a \notin H$. Considerar la recta $a + tx$ (con $t \in k$ y $x \in H$) y resolver $Q(a+tx) = 0$.]



Obs: De manera más general, una variedad algebraica X es unirracional si existe una aplicación dominante $\mathbb{A}^n \dashrightarrow X$ para cierto $n \in \mathbb{N}^{\geq 1}$, ie, existe una inclusión $k(X) \subseteq k(t_1, \dots, t_n)$.

⚠ Recién en los años 70' se descubrieron los primeros ejemplos de variedades algebraicas que son unirracionales pero que no son racionales (trabajos de Artin-Mumford, de Clemens-Griffiths, y de Iskovskikh-Manin). Por ejemplo, la hipersuperficie cúbica de $\mathbb{P}^4$ dada por $X = \{[x_0, \dots, x_4] \in \mathbb{P}^4 \text{ tq } x_0^3 + x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + x_4^3 = 0\}$.

Hoy en día, no conocemos ninguna cúbica "suave" de $\mathbb{P}^5$ que sea irracional, a pesar de que se conjetura que la mayor parte de dichas cúbicas no es racional!