§12. Componentes irreducibles

Recuerdo: Un espacio topológico X es irreducible si $X = X_1 \cup X_2$ con X_1, X_2 cerrados implica que $X = X_1$ o bien $X = X_2$.

Esto a su vez es equivalente a cualquiera de las condiciones siguientes:

a) Todo par de abiertos no-vacíos de X se intersectan.

b) Todo abierto no-vacío de X es denso en X.

Ejemplo: El espacio afín $\mathbb{A}^n$ es irreducible. Más generalmente, una subvariedad afín $X \subseteq \mathbb{A}^n$ es irreducible $\iff$ $\mathcal{I}(X)$ es un ideal primo de $\mathcal{O}(\mathbb{A}^n)$ (ver §6, pág. 20).

Obs: En topología, los espacios topológicos irreducibles se conocen también como espacios hiperconexos. Las siguientes propiedades importantes se dejan como ejercicio:

$\boxed{\text{Ejercicio}}$ Sea X un espacio topológico. Demostrar que:

① Si X es irreducible, entonces X es conexo.

② Si X es irreducible y $f: X \to Y$ función continua entre espacios topológicos, entonces $f(X) \subseteq Y$ es irreducible.

[Indicación: La prueba de "X conexo $\Rightarrow f(X)$ conexo" sigue funcionando.]

③ Si X es irreducible y $\mathcal{U} \subseteq X$ abierto, entonces $\mathcal{U}$ es irreducible.

[Indicación: Intersección vacía de abiertos de $\mathcal{U}$ es vacía también en X.]

④ Sea $S \subseteq X$ un subconjunto irreducible de X, entonces $\overline{S}$ es irreducible.

[Indicación: Si $\overline{S} = S_1 \cup S_2$ cerrados $\Rightarrow S = F_1 \cup F_2$ con $F_i = S_i \cap S$ cerrado.]

⑤ Sean $\mathcal{U}, V \subseteq X$ abiertos irreducibles de X tal que $\mathcal{U} \cap V \neq \phi$, entonces $\mathcal{U} \cup V$ irreducible

[Indicación: Probar que si W abierto no vacío tq $W \subseteq \mathcal{U} \cup V$, entonces $W \cap \mathcal{U} \neq \phi$ y $W \cap V \neq \phi$. Probar luego que W es denso en $\mathcal{U} \cup V$, y concluir usando b).]

Consecuencias:

i) El espacio proyectivo $\mathbb{P}^n$ es irreducible, pues es cubierto por abiertos $\mathcal{U}_i \cong \mathbb{A}^n$ irreducibles. Del mismo modo, la grassmanniana $Gr(k,n)$ es irreducible.

ii) Sea X variedad proyectiva irreducible, entonces toda función regular $f: X \to k$ es constante (ie, $\Gamma(X, \mathcal{O}_X) \cong k$). En efecto, $f(X)$ es un conjunto finito e irreducible ✓

iii) Sea $X \subseteq \mathbb{P}^n$ variedad proyectiva irreducible diferente de un punto, entonces $X \cap Y \neq \phi$ para toda hipersuperficie $Y \subseteq \mathbb{P}^n$. En efecto, $\mathbb{P}^n \setminus Y$ es una variedad afín (ver §11, pág 38) y las únicas subvariedades proyectivas $X \subseteq \mathbb{P}^n \setminus Y$ de var. afines son los puntos (ver §11, pág 37).

Prop: Sean X e Y dos variedades algebraicas irreducibles, entonces $X \times Y$ es irreducible.

Dem: Si escribimos $X \times Y = Z_1 \cup Z_2$ con Z_1, Z_2 cerrados no-vacíos, entonces el conjunto Y_i de puntos $y \in Y$ tq $X \times \{y\} \subseteq Z_i$ es un cerrado de Y, y $Y = Y_1 \cup Y_2$.
$\Rightarrow Y = Y_1$ o $Y = Y_2$ pues Y irreducible $\Rightarrow Z_1 = X \times Y$ o $Z_2 = X \times Y$ ✓ ∎

Def: Sea X un espacio topológico. Una componente irreducible de X es un subconjunto irreducible maximal respecto a la inclusión (ie, no está contenido en ningún conjunto irreducible de X estrictamente).

Obs: Dado que si $S \subseteq X$ subconjunto irreducible, entonces $\overline{S} \subseteq X$ es irreducible, se tiene que las componentes irreducibles de X son necesariamente conjuntos cerrados.

Recordemos que un espacio topológico X es noetheriano si toda sucesión decreciente de cerrados $F_1 \supseteq F_2 \supseteq \ldots \supseteq F_m \supseteq \ldots$ es eventualmente constante, ie, $\exists N$ tq $F_m = F_{m+1}$ $\forall m \geq N$. La técnica de demostración del siguiente resultado es llamada "Inducción noetheriana":

Teorema: Sea X un espacio topológico noetheriano (eg. una variedad algebraica). Entonces:
① El conjunto de componentes irreducibles $X_1, \ldots, X_m$ de X es finito.
② $X = X_1 \cup \ldots \cup X_m$ y todo cerrado irreducible de X está contenido en alguna de las componentes irreducibles.
En particular, todo cerrado no-vacío $Y \subseteq X$ se escribe de manera única (módulo permutación) como unión finita $Y = Y_1 \cup \ldots \cup Y_r$ de cerrados irreducibles, no contenidos uno en el otro.

Dem: Sea $\mathcal{F}$ la familia de todos los cerrados no-vacíos de X que no se escriben como unión finita de cerrados irreducibles, y veamos que $\mathcal{F} = \emptyset$:
Si $\mathcal{F} \neq \emptyset$, consideramos Y_1 en $\mathcal{F}$. Si Y_1 contiene estrictamente otro elemento de $\mathcal{F}$, escogemos uno y lo llamamos $Y_2 \subseteq Y_1$, y luego nos preguntamos lo mismo para Y_2.
Por noetherianidad, obtenemos un elemento minimal $Y = Y_m$ de $\mathcal{F}$.
Dado que $Y \in \mathcal{F}$ se tiene que Y no es irreducible, ie, $Y = Y_1 \cup Y_2$ con $Y_i \subsetneq Y$ cerrado propio. Por minimalidad, Y_1 e Y_2 se escriben como unión finita de cerrados irreducibles, y luego Y también: una contradicción!
Luego, todo cerrado no-vacío $Y \subseteq X$ se escribe como unión finita de cerrados irreducibles y podemos asumir que ninguno está contenido en el otro (quitando aquellos contenidos en intersecciones si fuera necesario). En part, obtenemos ① y $X = X_1 \cup \ldots \cup X_m$.
Más aún, si $Y \subseteq X$ es irreducible, entonces $Y = (Y \cap X_1) \cup \ldots \cup (Y \cap X_m)$ y luego $Y = Y \cup X_i$ para algún i, ie, $Y \subseteq X_i$ ✓
Finalmente, veamos la unicidad (módulo permutación): Si $Y \subseteq X$ cerrado no-vacío y si

$$Y = Y_1 \cup \ldots \cup Y_r = Y_1' \cup \ldots \cup Y_s' \quad \text{con } Y_1, \ldots, Y_r \text{ y } Y_1', \ldots, Y_s' \text{ cerrados irred.}$$

$\Rightarrow Y_1 \subseteq Y_1' \cup \ldots \cup Y_s'$ y luego $Y_1 \subseteq Y_j'$ para algún $j = 1, \ldots, s$ (tal como antes)
Similar, $Y_j' \subseteq Y_i$ para algún $i = 1, \ldots, r$ y luego $Y_1 \subseteq Y_j' \subseteq Y_i$. Dado que ningún Y_i está contenido dentro de otro: $Y_1 = Y_j'$. Así, cada elemento de la lista de los Y_i es igual a un elemento de la lista de los Y_j', y viceversa. ∎

Ejemplo: ① Un caso particular importante es cuando $X = V(f)$ es una hipersuperficie afín en $\mathbb{A}^n$ (resp. proyectiva en $\mathbb{P}^n$) dada por los ceros de un polinomio f no-nulo en $\mathcal{O}(\mathbb{A}^n) = k[X_1, \ldots, X_n]$ (resp. homogéneo en $\mathcal{O}(\mathbb{A}^{n+1}) = k[X_0, \ldots, X_n]$):
Dado que el anillo de polinomios en varias variables es un "dominio de factorización única", podemos escribir f de manera única (módulo permutación y mult. por k^*):

$$f = f_1 \cdots f_r \quad \text{con } f_1, \ldots, f_r \text{ polinomios irreducibles}$$

$\Rightarrow V(f) = V(f_1) \cup \ldots \cup V(f_r)$ es la descomposición en componentes irreducibles.
② De manera más general, si $X = V(I)$ variedad afín en $\mathbb{A}^n$ (resp. proyectiva en $\mathbb{P}^n$), entonces $\sqrt{I} = \mathcal{I}(X) = \bigcap_{i=1}^{r} \mathcal{I}(X_i)$, donde los $\mathcal{I}(X_i)$ son ideales primos.
(Obs: Esto es un caso particular de la descomposición primaria de Lasker (1905) y Noether (1921)).

Ejercicio: Determinar las componentes irreducibles de $X = V(X^2+Y^2+Z^2-4, Y^2+Z^2-1) \subseteq \mathbb{A}^3$.