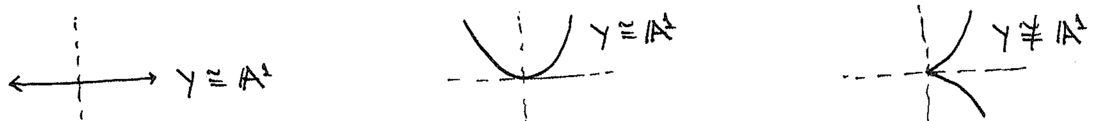


Def: Una *subvariedad cerrada* de una variedad algebraica $(X, \mathcal{O}_X)$ es una variedad algebraica $(Y, \mathcal{O}_Y)$ tal que $Y \subseteq X$ cerrado y tal que $\mathcal{O}_Y = \mathcal{O}_X/\mathcal{I}_Y|_Y$, donde $\mathcal{I}_Y \subseteq \mathcal{O}_X$ es el haz de ideales de funciones regulares que se anulan en Y.
Más generalmente, si $f : Z \to X$ es un morfismo regular entre variedades algebraicas, decimos que f es una *incrustación* cerrada (embedding) si f se factoriza como

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\cong"', "\text{birregular}"] & & X \\ & Y \arrow[ur, "i", "\text{subvariedad cerrada}"'] & \end{tikzcd}$$

ie, $f(Z) \subseteq X$ es una subvariedad cerrada y $Z \cong f(Z)$.

Ejemplo: Sea $Z = \mathbb{A}^1$ y $X = \mathbb{A}^2$. Consideremos $f_i : \mathbb{A}^1 \to \mathbb{A}^2$ dados por:



$f_1(t) = (t, 0)$ $\qquad$ $f_2(t) = (t, t^2)$ $\qquad$ $f_3(t) = (t^2, t^3)$

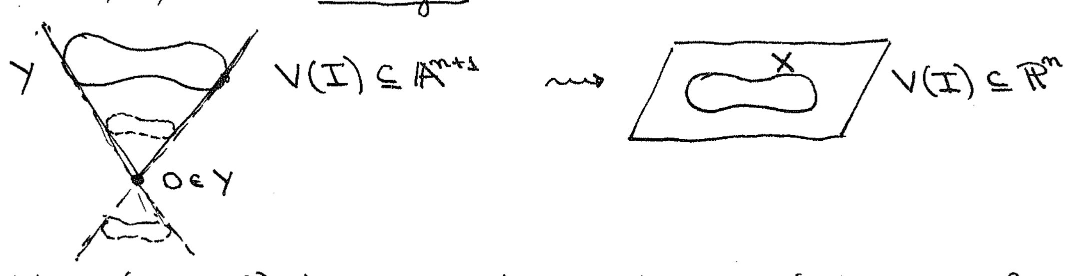
Entonces, f_1 y f_2 son incrustaciones cerradas, pero f_3 no lo es.

Recuerdo: Sea $V \cong k^{n+1}$ espacio vectorial. El espacio proyectivo $\mathbb{P}(V) \cong \mathbb{P}^n$ es la variedad algebraica cuyos puntos corresponden a rectas vectoriales en V.
En part, si $W \subseteq V$ sub-ev no-nulo, entonces $\Lambda = \mathbb{P}(W) \subseteq \mathbb{P}(V)$ y diremos que $\Lambda \subseteq \mathbb{P}^n$ obtenido de este modo es un *sub-espacio lineal* de $\mathbb{P}(V) \cong \mathbb{P}^n$.

Ejemplo: Sean $\Lambda_1 = \mathbb{P}(W_1) \cong \mathbb{P}^{r_1}$ y $\Lambda_2 = \mathbb{P}(W_2) \cong \mathbb{P}^{r_2}$ subespacios lineales de $\mathbb{P}(V) \cong \mathbb{P}^n$. Entonces, si $r_1 + r_2 \geq n$ tenemos que $\Lambda_1 \cap \Lambda_2 = \mathbb{P}(W_1 \cap W_2) \cong \mathbb{P}^d$ es no-vacío de dimensión $d \geq r_1 + r_2 - n$.
Por ejemplo, las rectas afines $\{x = 1\}$ y $\{x = 2\}$ en $\mathbb{A}^2_{(x,y)}$ no se intersectan, pero las rectas proyectivas $\{x = z\}$ y $\{x = 2z\}$ obtenidas al considerar $\mathbb{A}^2 \hookrightarrow \mathbb{P}^2_{[x,y,z]}$ se intersectan en $[0,1,0]$.

Recuerdo (polinomios homogéneos): Sea $I \subseteq \mathcal{O}(\mathbb{A}^{n+1}) = k[X_0, X_1, \dots, X_n]$ un ideal.
Decimos que I es un *ideal homogéneo* si está generado por polinomios homogéneos, ie, $I = \langle P_1, \dots, P_r \rangle$ con $P_i(\lambda x) = \lambda^{d_i} P_i(x)$ para todo $\lambda \in k^*$, donde $d_i = gr(P_i) \in \mathbb{N}$.
En otras palabras, I es homogéneo si y sólo si $I = I^{\mathbb{G}_m}$ es invariante por la acción de $\mathbb{G}_m = (k^*, \cdot)$, ie, $p(x) \in I \Rightarrow p(\lambda x) \in I$ para todo $\lambda \in k^*$.

Sea $I \subseteq k[X_0, \dots, X_n]$ un ideal homogeneo. Entonces, la subvariedad afín $Y := V(I)$ de $\mathbb{A}^{n+1}$ es $\mathbb{G}_m$-invariante, ie, es un *cono afín*:



Consideramos el cociente $X := (Y \setminus \{0\})/\mathbb{G}_m$, junto con la proyección $\pi : Y \setminus \{0\} \to X$.

Dotamos a X de la topología de Zariski cociente y del haz en k-álgebras dado por $\mathcal{O}_X := \pi_*((\mathcal{O}_{Y\setminus\{0\}})^{\mathbb{G}_m})$ de funciones regulares que son $\mathbb{G}_m$-invariantes. Entonces:

① El espacio anillado $(X, \mathcal{O}_X)$ es una subvariedad cerrada de $\mathbb{P}^n$ y escribiremos simplemente $X = V(I) \subseteq \mathbb{P}^n$. Explícitamente, si $I = \langle P_1, \ldots, P_r\rangle \subseteq k[X_0, \ldots, X_n]$ con P_i homogéneo de grado d_i, entonces

$$X = V(I) = \{[x_0, \ldots, x_n] \in \mathbb{P}^n \text{ tq } P_1(x_0, \ldots, x_n) = \ldots = P_r(x_0, \ldots, x_n) = 0\}.$$

② Debido a la construcción de $\mathbb{P}^n$ como cociente de $\mathbb{A}^{n+1}\setminus\{0\}$, toda subvariedad cerrada de $\mathbb{P}^n$ es de la forma $X = V(I)$ para cierto $I \subseteq \mathcal{O}(\mathbb{A}^{n+1})$ homogéneo.

Terminología: Sea $P \in k[X_0, \ldots, X_n]$ polinomio homogéneo de grado d. Decimos que

$$V(P) = \{[x_0, \ldots, x_n] \in \mathbb{P}^n \text{ tq } P(x_0, \ldots, x_n) = 0\}$$

es una hipersuperficie de grado d en $\mathbb{P}^n$. Cuando $d = 1$ (resp, $d=2$, $d=3$, $d=4$, etc) decimos que $V(P) = H$ es un hiperplano (resp, $V(P) = Q$ una cuádrica, resp. una cúbica, resp. cuártica, etc). Por ejemplo,

$$X = \{[x_0, \ldots, x_n] \in \mathbb{P}^n \text{ tq } x_0^d + x_1^d + \ldots + x_n^d = 0\} \subseteq \mathbb{P}^n$$

es la "hipersuperficie de Fermat" de grado d.

③ Sea $V \subseteq \mathbb{P}^n$ un subconjunto, entonces definimos el ideal de V como el ideal (homogéneo) $\mathcal{I}(V) \subseteq k[X_0, \ldots, X_n]$ generado por los polinomios homogéneos que se anulan en V. Tal como antes, $V(\mathcal{I}(X)) = \overline{X}^{Zar} \subseteq \mathbb{P}^n$ es la adherencia de Zariski.

Ejemplo: ① La curva afín $C \subseteq \mathbb{A}^2$ dada por $xy = 1$ puede verse dentro de $\mathbb{P}^2$ con coord. homogéneas $[x, y, z]$ al identificar $\mathbb{A}^2 \cong \mathcal{U}_2 = \{z \neq 0\}$. Entonces, $\overline{C} := \overline{C}^{Zar} \subseteq \mathbb{P}^2$ es la curva $xy = z^2$ obtenida al "homogeneizar" la ecuación. En part, obtenemos $\overline{C}$ a partir de C agregando los puntos $[1,0,0]$ y $[0,1,0]$ "al infinito".

② Sea $A = k[X_0, \ldots, X_n]$. Entonces, para $V = \emptyset \subseteq \mathbb{P}^n$ tenemos que $\mathcal{I}(\emptyset) = \langle X_0, \ldots, X_n\rangle$ pues $0 \in \mathbb{A}^{n+1}$ no se proyecta a $\mathbb{P}^n$. El ideal $A^+ := \langle X_0, \ldots, X_n\rangle$ es llamado el ideal irrelevante en este contexto.

④ La versión proyectiva del Hilbert Nullstellensatz se puede deducir de la versión afín: Sea $I \subseteq k[X_0, \ldots, X_n]$ un ideal homogéneo, entonces:

a) $V(I) = \emptyset$ en $\mathbb{P}^n \iff I$ contiene una potencia de $A^+ = \langle X_0, \ldots, X_n\rangle$.

b) Si $V(I) \neq \emptyset$ en $\mathbb{P}^n$, entonces $\mathcal{I}(V(I)) = \sqrt{I}$.

⑤ Sup. que $k = \mathbb{C}$, y consideramos $\mathbb{A}^n(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^n$ y $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ con la topología euclideana. Entonces $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ es compacto, pero $\mathbb{A}^n(\mathbb{C})$ no lo es!

Def: Sea X una variedad algebraica. Diremos que X es proyectiva si es isomorfa a una subvariedad cerrada de algún espacio proyectivo, ie, si existe $X \hookrightarrow \mathbb{P}^N$ inmersión cerrada. Más generalmente, una variedad quasi-proyectiva es una variedad algebraica isomorfa a un abierto de Zariski de una variedad algebraica proyectiva.

Obs: Toda variedad algebraica quasi-proyectiva es separada y quasi-compacta. Más aún, las variedades afines, quasi-afines y proyectivas son ejemplos de variedades quasi-proyectivas.

Teorema: Sea X una variedad proyectiva. Entonces, para toda variedad algebraica Y, la proyección $pr_Y : X \times Y \to Y$ es cerrada (ie, la imagen de un cerrado es cerrada).

Dem: Dado que $X \hookrightarrow \mathbb{P}^n$ proyectiva, basta considerar el caso $X = \mathbb{P}^n$. Más aún, el resultado es local en Y, podemos asumir Y afín y basta considerar el caso $Y = \mathbb{A}^m$. Sea $\pi : \mathbb{A}^{n+1} \setminus \{0\} \to \mathbb{P}^n$ la proyección canónica, y consideremos $F \subseteq X \times Y = \mathbb{P}^n \times \mathbb{A}^m$ un cerrado dado por ecuaciones polinomiales

$$P_1([x], y) = \dots = P_\ell([x], y) = 0 \quad \text{en } \mathbb{P}^n \times \mathbb{A}^m$$

homogéneas en $[x] = [x_0, \dots, x_n]$. Veamos que $pr_Y(F)$ es cerrado en $\mathbb{A}^m$:

Sea $y_0 \notin pr_Y(F)$. Entonces, los polinomios $P_i(x, y_0)$ homogeneos en x sólo poseen al origen $0 \in \mathbb{A}^{n+1}$ como cero común. Así, el Hilbert Nullstellensatz implica que

$$(\bigstar) \qquad \mathfrak{m}_0^r \subseteq \langle P_1(x, y_0), \dots, P_\ell(x, y_0) \rangle$$

donde $\mathfrak{m}_0 = \langle x_0, \dots, x_n \rangle$ es el ideal irrelevante y $r \in \mathbb{N}^{\geq 1}$.

Notamos que $\mathfrak{m}_0^r = \langle x_0, \dots, x_n \rangle^r \supseteq A_r := k[x_0, \dots, x_n]_r \Leftarrow$ el k-ev de polinomios homogéneos de grado r. Luego, $(\bigstar)$ implica que la aplicación lineal

$$\varphi : A_{r-d_1} \oplus \dots \oplus A_{r-d_\ell} \twoheadrightarrow A_r \qquad d_i := gr_x(P_i)$$

$$(Q_1, \dots, Q_\ell) \longmapsto \sum_{i=1}^{\ell} Q_i(x) P_i(x, y_0)$$

es sobreyectiva. Esto último es una condición abierta para la topología de Zariski (pues equivale a que el determinante de una submatriz maximal es $\neq 0$) y luego en un $V \subseteq \mathbb{A}^m$ vecindad de y_0 se tiene que para todo $y \in V$ fijo el conjunto $P_1([x], y) = \dots = P_\ell([x], y) = 0$ es vacío en $\mathbb{P}^n$, ie, $y \notin pr_Y(F)$ y luego $pr_Y(F)$ es un cerrado. ∎

Corolario: Sea X una variedad proyectiva. Entonces, para toda variedad algebraica Y y todo morfismo regular $f : X \to Y$ se tiene que $f(X)$ es cerrado en Y.

Dem: El grafo $\Gamma_f = \{(x, f(x)), x \in X\}$ es cerrado en $X \times Y$, y luego $pr_Y(\Gamma_f) = f(X)$ es cerrado en Y. ∎

Obs: En particular, toda "realización" de una variedad proyectiva en un espacio proyectivo es siempre cerrada, contrariamente al caso de variedades afines.

Notamos también que si $f : \mathbb{A}^2 \to \mathbb{A}^2$, $(x, y) \mapsto (x, xy)$ entonces:

$f(\mathbb{A}^2) = \{(u, v) \in \mathbb{A}^2 \text{ tq } "u = 0 \Rightarrow v = 0"\}$ no es cerrado.

Corolario: Sea X una variedad proyectiva y sea $f : X \to k$ función regular. Entonces, $f(X)$ es un conjunto finito.

Dem: Consideremos la composición $\bar{f} : X \to \mathbb{P}^1$ dada por $X \xrightarrow{f} k = \mathbb{A}^1 \hookrightarrow \mathbb{P}^1$. Entonces, $\bar{f}(X)$ es un cerrado de $\mathbb{P}^1$, que es diferente de $\mathbb{P}^1$ pues $\bar{f}(X) = f(X) \subseteq \mathbb{A}^1$. Luego, es un conjunto de finitos puntos. ∎

Obs: Más adelante veremos que si X es proyectiva e irreducible, entonces $\Gamma(X, \mathcal{O}_X) \cong k$.

Ejercicio: Sea X variedad proyectiva y supongamos que $X \hookrightarrow Y$ incrustación cerrada, donde Y es una variedad afín. Probar que X es un conjunto finito de puntos.

⚠ Notar que, contrariamente al espacio afín que cumple $\mathbb{A}^n \times \mathbb{A}^m \cong \mathbb{A}^{n+m}$, tenemos que $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m \not\cong \mathbb{P}^{n+m}$. Por ejemplo, en $\mathbb{P}^2$ todo par de rectas se intersecta, pero en $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ no es así.

<u>Prop</u> (Segre, 1863-1924): La variedad producto $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$ es isomorfa a una variedad proyectiva $\Sigma_{n,m} \subseteq \mathbb{P}^N$, llamada la <u>variedad de Segre</u>, donde $N = (n+1)(m+1) - 1$.

<u>Dem</u>: Sean $V \cong k^{n+1}$ y $W \cong k^{m+1}$ espacios vectoriales, con $\mathbb{P}(V) \cong \mathbb{P}^n$ y $\mathbb{P}(W) \cong \mathbb{P}^m$. Entonces, $V \otimes W \cong k^{(n+1)(m+1)}$ y la aplicación $V \times W \to V \otimes W$, $(v,w) \mapsto v \otimes w$ induce una aplicación en los cocientes respectivos

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{P}(V) \times \mathbb{P}(W) &\longrightarrow \mathbb{P}(V \otimes W) \cong \mathbb{P}^N \\ ([v],[w]) &\longmapsto [v \otimes w] \end{aligned} \quad \text{"incrustación de Segre"}$$

donde $N = (n+1)(m+1) - 1 = mn + m + n$. Si elegimos bases $(e_0, \ldots, e_n)$ y $(f_0, \ldots, f_m)$ de V y W, y escribimos $v = \sum_{i=0}^n x_i e_i$ y $w = \sum_{j=0}^m y_j f_j$, entonces $\{e_i \otimes f_j\}_{\substack{0 \le i \le n \\ 0 \le j \le m}}$ es una base de $V \otimes W$ y $v \otimes w = \sum_{i,j} x_i y_j \, e_i \otimes f_j$. En particular,

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m &\longrightarrow \mathbb{P}^N \\ ([x_0, \ldots, x_n], [y_0, \ldots, y_m]) &\longmapsto [x_0 y_0, x_0 y_1, \ldots, x_i y_j, \ldots, x_n y_m] \end{aligned}$$

es un morfismo regular. Veamos que $\Sigma_{n,m} := \varphi(\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m) \subseteq \mathbb{P}^N$ es un cerrado y que $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m \cong \Sigma_{n,m}$ (ie, φ es un incrustamiento cerrado):

Notamos que mediante el isomorfismo $V \otimes_k W \cong \mathrm{Hom}_k(V^*, W)$ tenemos que la imagen de φ, dada por los tensores <u>simples</u> de $V \otimes_k W$, corresponde a aplicaciones lineales de rango 1. Explícitamente, si consideramos coordenadas (homogéneas) $z = \sum_{k,l} z_{kl} \, e_k \otimes f_l$ de $\mathbb{P}(V \otimes W) \cong \mathbb{P}^N$ y consideramos los abiertos $W_{ij} = \{[z] \in \mathbb{P}^N \text{ tq } z_{ij} \neq 0\} \cong \mathbb{A}^N$, entonces $\varphi^{-1}(W_{ij}) = \mathcal{U}_i \times V_j$, con $\mathcal{U}_i = \{[x] \in \mathbb{P}^n \text{ tq } x_i \neq 0\}$ y $V_j = \{[y] \in \mathbb{P}^m \text{ tq } y_j \neq 0\}$. Si $i=j=0$, entonces $\varphi|_{\mathcal{U}_0 \times V_0} : \mathcal{U}_0 \times V_0 \longrightarrow W_{0,0}$ está dada por

$$([1, x_1, \ldots, x_n], [1, y_1, \ldots, y_m]) \longmapsto \begin{pmatrix} 1 & x_1 & \cdots & x_n \\ y_1 & x_1 y_1 & \cdots & x_n y_1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_m & x_1 y_m & \cdots & x_n y_m \end{pmatrix}$$

que es un morfismo regular, y que define un isomorfismo entre $\mathcal{U}_0 \times V_0$ y el conjunto <u>cerrado</u> dado por las matrices en $W_{0,0}$ de rango ≤ 1.

El mismo argumento es válido para (i,j) arbitrarios y obtenemos un isomorfismo entre $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$ y la subvariedad cerrada $\Sigma_{n,m} \subseteq \mathbb{P}^N$ dada por

$$\mathrm{rg} \begin{pmatrix} z_{00} & z_{01} & \cdots & z_{0n} \\ z_{10} & z_{11} & \cdots & z_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ z_{m0} & z_{m1} & \cdots & z_{mn} \end{pmatrix} \le 1 \iff \det \begin{vmatrix} z_{ik} & z_{il} \\ z_{jk} & z_{jl} \end{vmatrix} = z_{ik} z_{jl} - z_{il} z_{jk} = 0$$

para todos $i,j = 0, \ldots, m$ y $k,l = 0, \ldots, n$. ∎

<u>Corolario</u>: El producto (finito) de variedades algebraicas proyectivas es una variedad algebraica proyectiva.

<u>Dem</u>: Si $X \subseteq \mathbb{P}^n$ e $Y \subseteq \mathbb{P}^m$ cerrados, entonces $X \times Y \subseteq \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m \hookrightarrow \mathbb{P}^{mn+m+n}$ cerrado. ∎

<u>Ejemplo</u>: La incrustación de Segre $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \hookrightarrow \mathbb{P}^3$, $([x_0,x_1],[y_0,y_1]) \mapsto [x_0 y_0, x_0 y_1, x_1 y_0, x_1 y_1]$ permite identificar $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ con la superficie cuádrica $S \subseteq \mathbb{P}^3$ dada por

$$\det \begin{pmatrix} z_0 & z_1 \\ z_2 & z_3 \end{pmatrix} = z_0 z_3 - z_1 z_2 = 0.$$

La forma cuadrática $Q : k^4 \to k$ dada por $Q(z_0, z_1, z_2, z_3) = z_0 z_3 - z_1 z_2$ es <u>no-degenerada</u>.

<u>Obs</u>: Si $\mathrm{car}(k) \neq 2$ toda forma cuadrática no-degenerada $Q : k^4 \to k$ puede ser diagonalizada y luego $S = \{[z] \in \mathbb{P}^3 \text{ tq } Q(z) = 0\} \cong \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ en ese caso.

Ejercicio: Una cónica $C \subseteq \mathbb{P}^2$ es una hipersuperficie cuádrica de $\mathbb{P}^2$. Demostrar que si $car(k) \neq 2$ entonces, en una base conveniente, podemos escribir $C = \{[x_0, x_1, x_2] \in \mathbb{P}^2 \text{ tq } a_0 x_0^2 + a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 = 0\}$, para ciertos $a_0, a_1, a_2 \in k$. Deducir que si $a_0 a_1 a_2 \neq 0$ entonces $C \cong \mathbb{P}^1$.

Terminemos la sección mencionando dos variantes importantes del encajamiento de Segre:

① Encajamiento de Veronese:

Recordemos que si $V \cong k^{n+1}$ y $d \in \mathbb{N}$, entonces la d-ésima potencia simétrica $S^d V$ es un k-ev. de dimensión $\dim_k S^d V = \binom{n+d}{d}$ y $(S^d V)^* \cong k[X_0, \ldots, X_n]_d$ polinomios homogéneos de grado d en $n+1$ variables. Más aún, si $car(k) = 0$ entonces $S^d V$ se identifica con el sub-ev de $T^d V = V^{\otimes d} = V \overset{d \text{ veces}}{\otimes \cdots \otimes} V$ de tensores simétricos.

Supongamos que $car(k) = 0$, y consideremos la encajación de Veronese dada por:

$$\nu_d : \mathbb{P}(V) \longrightarrow \mathbb{P}(S^d V) \cong \mathbb{P}^N$$
$$[v] \longmapsto [v^d] = [v \overset{d \text{ veces}}{\otimes \cdots \otimes} v]$$

donde $N = \binom{n+d}{d} - 1$. Si elegimos una base $(e_0, \ldots, e_n)$ de V y escribimos $v = \sum_{i=0}^{n} x_i e_i$, entonces $\{e_{i_0}^{k_0} \cdots e_{i_r}^{k_r}\}_{\substack{0 \le i_0 < \cdots < i_r \le n \\ k_0 + \cdots + k_r = d}}$ es una base de $S^d V$. Más aún, el teorema multinomial de Newton implica:

$$v^d = \sum_{|k|=d} \frac{d!}{k_0! \cdots k_n!} x^k e^k, \quad \text{con } x^k = x_0^{k_0} \cdots x_n^{k_n} \text{ homogéneos de grado } d.$$

$\rightarrow$ base de $k[x_0, \ldots, x_n]_d$.

En particular,

$$\nu_d : \mathbb{P}^n \longrightarrow \mathbb{P}^N, \quad [x_0, \ldots, x_n] \mapsto [x_0^d, x_0^{d-1} x_1, \ldots, x_n^d] \quad (\text{cf. "orden monomial"}).$$

Ejercicio: Sea $V_{n,d} := \nu_d(\mathbb{P}^n) \subseteq \mathbb{P}^N$ la variedad de Veronese. Probar que:

① $V_{n,d} \subseteq \mathbb{P}^N$ es un cerrado dado por las ecuaciones $z_i z_j = z_k z_l$ donde los $i, j, k, l \in \{0, \ldots, N\}$ verifican $i + j = k + l$.

② ν_d induce un isomorfismo $\mathbb{P}^n \cong V_{n,d}$ (ie, ν_d es un encajamiento cerrado).

Ejemplo: La imagen de $\nu_3 : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^3$, $[x, y] \mapsto [x^3, x^2 y, x y^2, y^3]$ es la curva $C \subseteq \mathbb{P}^3$ dada por las ecuaciones $z_0 z_3 = z_1 z_2$, $z_1^2 = z_0 z_2$, $z_2^2 = z_1 z_3$ en $\mathbb{P}^3_{[z_0, \ldots, z_3]}$, y es llamada la cúbica torcida ("twisted cubic") de $\mathbb{P}^3$.

Obs: Históricamente, $V_{2,2} = \nu_2(\mathbb{P}^2) \subseteq \mathbb{P}^5$ es conocida como la superficie de Veronese.

Prop: Sea $X \subseteq \mathbb{P}^n$ una hipersuperficie definida por un polinomio homogéneo de grado d. Entonces, X es isomorfa a la intersección de la variedad de Veronese $V_{n,d} \subseteq \mathbb{P}^N$ y un hiperplano $H \cong \mathbb{P}^{N-1}$, donde $N = \binom{n+d}{d} - 1$. En particular, el complemento $\mathbb{P}^n \setminus X$ es una variedad algebraica afín.

Dem: Supongamos que X está definida por $P(x_0, \ldots, x_n) = \sum_{|k|=d} a_k x^k$, con $x^k = x_0^{k_0} \cdots x_n^{k_n}$. Si denotamos por z_k la coordenada de $\mathbb{P}^N$ correspondiente al monomio x^k, entonces $\nu_d(X) = \nu_d(\mathbb{P}^n) \cap H \subseteq \mathbb{P}^N$, donde $H = \{[z] \in \mathbb{P}^N \text{ tq } \sum_{|k|=d} a_k z_k = 0\} \cong \mathbb{P}^{N-1}$ hiperplano ✓

En particular, dado que $\mathbb{P}^N \setminus H \cong \mathbb{A}^N$, tenemos que $\mathbb{P}^n \setminus X$ es isomorfa al cerrado $\nu_d(X) \cap (\mathbb{P}^N \setminus H)$ de $\mathbb{A}^N$, y luego $\mathbb{P}^n \setminus X$ es afín. ∎

Ejercicio: Probar que $PGL_n(k) := GL_n(k) / \mathbb{G}_m$ es una variedad algebraica afín, donde $\mathbb{G}_m \cong \{\lambda I_n, \lambda \in k^*\}$ es el centro del grupo $GL_n(k)$.

2° Variedades Grassmannianas e Encajamiento de Plücker

Las variedades grassmannianas son generalizaciones naturales del espacio proyectivo: Sea $V \cong k^n$ un k-ev y sea $K \in \{1, \dots, n-1\}$. Definimos

$$Gr(K,V) = \{ W \subseteq V \text{ sub-ev tal que } \dim_k(W) = K \}.$$

Obs: ① En particular, $\mathbb{P}(V) = Gr(1,V)$.

② Dado que un sub-ev $W \cong k^K$ es lo mismo que $\mathbb{P}(W) \cong \mathbb{P}^{K-1}$ en $\mathbb{P}(V) \cong \mathbb{P}^{n-1}$ (lineal), podemos pensar a $Gr(K,V)$ como todos los $\Lambda \cong \mathbb{P}^{K-1}$ subespacios lineales de $\mathbb{P}(V)$. En este caso escribiremos $\mathbb{G}r(K-1, \mathbb{P}(V))$ en lugar de $Gr(K,V)$.

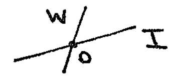
③ Sea $W \subseteq V$ sub-ev, y sea $W^\perp := \{ f \in V^* \text{ tq } f(w) = 0 \ \forall w \in W \} \subseteq V^*$ sub-ev. Entonces, $Gr(K,V) \xrightarrow{\sim} Gr(n-K, V^*)$, $[W] \mapsto [W^\perp]$ es una biyección.

④ Cuando sólo nos interese la dimensión de V, escribimos $Gr(K,n)$ (resp. $\mathbb{G}r(K-1,n-1)$) en lugar de $Gr(K,V)$ (resp. $\mathbb{G}r(K-1,\mathbb{P}(V))$). En part, $Gr(K,n) \cong Gr(n-K,n)$.

Teorema: Sea $V \cong k^n$ un k-ev y sea $K \in \{1, \dots, n-1\}$. Entonces, existe un atlas algebraico en $Gr(K,V)$ que le dota de estructura de variedad algebraica proyectiva. Dicha variedad es llamada Grassmanniana.

Dem: Sea $I \subseteq V$ subev de codimensión K (ie, $\dim_k(I) = n-K$), y consideremos el conjunto

$$\mathcal{U}_I := \{ W \in Gr(K,V) \text{ tal que } W \cap I = \{0\} \}.$$



"intersección transversal"
$\Rightarrow V = W \oplus I$

Notar que $\mathcal{U}_I$ se identifica al cerrado algebraico de $\mathrm{Hom}_k(V,I) \cong M_{K\times n}(k) \cong \mathbb{A}^{Kn}$ dado por las proyecciones $p_W : V \to I$ con $\ker(p_W) = W$. Explícitamente,

$\mathcal{U}_I \longrightarrow \{ p \in \mathrm{Hom}_k(V,I) \text{ tq } p|_I = Id_I \}$, $W \mapsto p_W$ tiene inversa $p \mapsto \ker(p) \in \mathcal{U}_I$.

En coordenadas, la descomposición en suma directa $V = W_0 \oplus I$ corresponde a

$$P = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \quad W_0 & \quad I \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|ccc} * & \cdots & * & 1 & & 0 \\ \vdots & * & \vdots & & \ddots & \\ * & \cdots & * & 0 & & 1 \end{array} \right) I \end{array} \quad \Rightarrow \mathcal{U}_I \cong \mathbb{A}^{K(n-K)} \text{ espacio afín } \checkmark$$

(Obs: Más adelante, $\dim Gr(K,n) = K(n-K)$).

Los $\{\mathcal{U}_I\}_{I \in Gr(n-K,V)}$ cubren $Gr(K,V)$ y definen una topología: Un subconjunto S de $Gr(K,V)$ es abierto si $S \cap \mathcal{U}_I$ es un abierto de Zariski para todo I. Más aún, considerando una base $(e_1, \dots, e_n)$ de V y subev de la forma $I = \mathrm{Vect}_k(e_{i_1}, \dots, e_{i_{n-K}})$ obtenemos un cubrimiento finito de $Gr(K,V) \rightsquigarrow Gr(K,V)$ espacio top. noetheriano.

Para el cambio de cartas, consideramos $I, J \subseteq V$ subev de dimensión $n-K$, y notamos que $\mathcal{U}_I \cap \mathcal{U}_J \subseteq \mathcal{U}_I$ se identifica con las $p_W : V \to I$ proyecciones tq $\ker(p_W) \cap J = \{0\}$, ie, $p_W|_J : J \xrightarrow{\sim} I$ inyectivas (y luego isomorfismos). En coordenadas, esto define un abierto de Zariski de $\mathcal{U}_I \cong \mathbb{A}^{K(n-K)}$ (dado por $\det \neq 0$ para cierta submatriz). Más aún: si $p \in \mathcal{U}_I \cap \mathcal{U}_J \subseteq \mathcal{U}_I$ entonces $p' := (p|_J)^{-1} \circ p \in \mathrm{Hom}_k(V,J)$ pertenece a $\mathcal{U}_I \cap \mathcal{U}_J \subseteq \mathcal{U}_J$, y la aplicación $p \mapsto p'$ es un isomorfismo (birregular), pues es lineal en coordenadas ✓

Luego, $Gr(K,V)$ es una variedad algebraica. Veamos que es proyectiva:

Recuerdo: Sea $V \cong k^n$ e.v. y $d \in \{1, \dots, n\}$. Entonces la d-ésima potencia exterior $\Lambda^d V$ es un k-ev. de dimensión $\dim_k \Lambda^d V = \binom{n}{d}$. Más aún, si $(e_1, \dots, e_n)$ es una base de V, entonces $\{ e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_d} \}_{1 \le i_1 < \dots < i_d \le n}$ es una base de $\Lambda^d V$. Además, para todo $\sigma \in S_d$ se tiene $v_{\sigma(1)} \wedge \dots \wedge v_{\sigma(d)} = \varepsilon(\sigma)\, v_1 \wedge \dots \wedge v_d$ en $\Lambda^d V$.

Consideremos la incrustación de Plücker dada por:

$$\varphi : Gr(k,V) \longrightarrow \mathbb{P}(\Lambda^k V) \cong \mathbb{P}^N$$
$$[W] \longmapsto [\Lambda^k W]$$

que a cada $W \subseteq V$ sub-ev de $\dim_k(W) = k$ le asocia la recta vectorial $k \cong \Lambda^k W \subseteq \Lambda^k V$, donde $N = \binom{n}{k} - 1$. Notar que si $(w_1, \dots, w_k)$ es una base de W, entonces la recta $\Lambda^k W$ está generada por el tensor simple $w_1 \wedge \dots \wedge w_k$. Recíprocamente, toda recta en $\Lambda^k V$ generada por un tensor simple $v_1 \wedge \dots \wedge v_k \neq 0$ define un sub-ev $W := \mathrm{Vect}_k(v_1, \dots, v_k)$ de dimensión k de V, ie, φ es biyectiva sobre su imagen.

• Veamos que φ es regular: Si fijamos una base de V y, tal como antes, representamos a $W = \mathrm{Vect}_k(w_1, \dots, w_k) \in Gr(k,V)$ usando las filas de una matriz (no única):

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ p_{k1} & p_{k2} & \cdots & p_{kn} \end{pmatrix} \begin{matrix} \to w_1 \\ \\ \to w_n \end{matrix}$$

$\Rightarrow w_1 \wedge \dots \wedge w_k = \sum\limits_{1 \le i_1 < \dots < i_k \le n} p_{i_1, \dots, i_k} e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_k}$, donde $p_{i_1, \dots, i_k} = \det(p_{j, i_\ell})_{1 \le j, \ell \le k}$

es el subdeterminante $k \times k$ de la matriz obtenida a partir de las columnas $i_1, \dots, i_k$. En particular, φ es regular pues cada $p_{i_1, \dots, i_k}$ lo es ✓

(Obs: Los $\{p_{i_1, \dots, i_k}\}$ son las coordenadas de Plücker de W en $\mathbb{P}(\Lambda^k V)$.)

• Veamos que φ es un isomorfismo sobre su imagen: Basta verificarlo para cada $\mathcal{U}_I$. Sea $I \in Gr(n-k, V)$ y consideremos una base $(e_1, \dots, e_n)$ de V tal que se tiene $I = \mathrm{Vect}_k(e_{k+1}, \dots, e_n)$ y sea ~~$W \in \mathcal{U}_I$~~. Tal como antes, consideramos la matriz

$$P = \left(\begin{array}{ccc|ccc} p_{11} & \cdots & p_{1,n-k} & 1 & & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & \\ p_{k1} & \cdots & p_{k,n-k} & 0 & & 1 \end{array}\right)$$

y notamos que cada p_{ij} se obtiene como un sub-determinante $k \times k$ de P.

$\Rightarrow \varphi|_{\mathcal{U}_I} : \mathcal{U}_I \xrightarrow{\sim} \varphi(\mathcal{U}_I) \subseteq \mathbb{P}(\Lambda^k V)$ isomorfismo sobre su imagen para todo I ✓

• Veamos que $G := \varphi(Gr(k,V)) \subseteq \mathbb{P}(\Lambda^k V)$ es un cerrado: Sea $v \neq 0$ en V y sea $\omega \neq 0$ en $\Lambda^k V$. Si completamos $e_1 = v$ en una base $(e_1, \dots, e_n)$ de V, notamos que $\omega \wedge v = 0$ en $\Lambda^{k+1} V \iff \omega = v \wedge \eta$ para cierta $\eta \in \Lambda^{k-1} V$.

Repitiendo el argumento, notamos que $\omega \in \Lambda^k V$ es un tensor simple (ie, de la forma $v_1 \wedge \dots \wedge v_k$ con $v_i \in V$) si y sólo si el kernel de la aplicación lineal

$$\gamma_\omega : V \longrightarrow \Lambda^{k+1} V, \quad v \mapsto \omega \wedge v$$

verifica $\dim_k \ker(\gamma_\omega) \geq k$, ie, $rg(\gamma_\omega) \leq n-k$. Esto último es una condición cerrada en $\mathbb{P}(\Lambda^k V)$, pues se expresa en coordenadas como la anulación de todos los sub-det. $(n-k+1) \times (n-k+1)$ de la matriz de γ_ω. ✓ ■

$\boxed{\text{Ejercicio}}$ $(k=2)$ Sea $V \cong k^n$ ev. Demostrar que:

① El tensor $\omega \in \Lambda^2 V$ es simple si y sólo si $\omega \wedge \omega = 0$ en $\Lambda^4 V$.

② Deducir que la imagen $G = \varphi(Gr(2,V)) \subseteq \mathbb{P}(\Lambda^2 V)$ está dada por intersección de hipersuperficies cuádricas.

③ Probar que $Gr(2,4)$ es isomorfa a la cuádrica de Plücker en $\mathbb{P}(\Lambda^2 k^4) \cong \mathbb{P}^5$ dada por:

$$p_{12} p_{34} - p_{13} p_{24} + p_{14} p_{23} = 0.$$