## §10. Producto de variedades y separación

Sea $\mathcal{C}$ una categoría y sean $X, Y \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ dos objetos. Un <u>producto</u> de $X$ e $Y$ en $\mathcal{C}$ es un objeto $Z \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ junto con dos morfismos $p: Z \to X$ y $q: Z \to Y$ tales que: "Para todo objeto $S \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ se tiene que

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(S,Z) & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(S,X) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(S,Y) \\ f & \longmapsto & (p\circ f, q\circ f) \end{array}$$

, ie, "
$$\begin{tikzcd} & S \arrow[dl, "u"'] \arrow[dr, "v"] & \\ X & & Y \end{tikzcd} = \begin{tikzcd} & S \arrow[d, "\exists! f"] & \\ & Z \arrow[dl, "p"'] \arrow[dr, "q"] & \\ X & & Y \end{tikzcd} \quad \begin{array}{l} u = p\circ f \\ v = q \circ f \end{array}$$ "

es biyectiva". (Propiedad universal).

En part, $(Z, (p,q))$ es único módulo un único isomorfismo, y usualmente se denota por $Z = X \times Y$ y por $pr_X : X\times Y \to X$ y $pr_Y : X \times Y \to Y$.

**Prop**: Los productos (finitos) existen en la categoría de variedades algebraicas afines.

**Dem**: Sean $X \subseteq \mathbb{A}^n$ y $Y \subseteq \mathbb{A}^m$ subvar. afines dadas por $X = V(f_1, \dots, f_r)$ y por $Y = V(g_1, \dots, g_s)$, entonces el producto (conjuntista) $X \times Y \subseteq \mathbb{A}^{n+m}$ es una subvar. afín definida por las ecuaciones $V(f_1(x), \dots, f_r(x), g_1(y), \dots, g_s(y))$. Además, las proyecciones $pr_1 : X\times Y \to X$ y $pr_2 : X \times Y \to Y$ son regulares ✓

Para la propiedad universal, basta notar que si $u : S \to X$, $s \mapsto (u_1(s), \dots, u_m(s))$ y $v: S \to Y$, $s \mapsto (v_1(s), \dots, v_m(s))$ son regulares, entonces necesariamente tenemos $f : S \to X \times Y$, $s \mapsto (u_1(s), \dots, u_m(s), v_1(s), \dots, v_m(s))$ regular ✓ ■

⚠ <u>Importante</u>: La topología de $X \times Y$ <u>no</u> es la topología producto, ie, <u>no</u> es la topología generada por abiertos $\mathcal{U} \times V$ con $\mathcal{U} \subseteq X$ y $V \subseteq Y$ abiertos. Por ejemplo, los cerrados en $X = Y = \mathbb{A}^1$ son: $\emptyset$, $\mathbb{A}^1$ y conjuntos finitos. Sin embargo, $X \times Y = \mathbb{A}^2$ posee más cerrados (eg. curvas!).

**Lema**: Sean $X \subseteq \mathbb{A}^n$ y $Y \subseteq \mathbb{A}^m$ subvar. afines. Entonces,
$$\mathcal{O}(X) \otimes_k \mathcal{O}(Y) \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}(X\times Y), \quad \sum_{i,j} a_{ij} f_i(x) \otimes g_j(y) \longmapsto \sum_{i,j} a_{ij} f_i(x) g_j(y).$$
es un isomorfismo.

**Dem**: La inyectividad se obtiene fijando variables: para todo $i,j$ se tiene $a_{ij} = 0$ si la función $\sum_{i,j} a_{ij} f_i(x) g_j(y)$ es nula en $\mathcal{O}(X\times Y)$.

Para la sobreyectividad: sea $h(x,y)$ regular en $X \times Y \subseteq \mathbb{A}^{n+m}$ dada por la restricción de $P(x,y) = \sum_{i,j} P_i(x) Q_j(x)$ polinomio en $\mathcal{O}(\mathbb{A}^{n+m})$. Luego, si $u_i := P_i|_X \in \mathcal{O}(X)$ y $v_j := Q_j|_Y \in \mathcal{O}(Y) \Rightarrow h$ proviene de $\sum_{i,j} u_i \otimes v_j$ en $\mathcal{O}(X) \otimes_k \mathcal{O}(Y)$. ■

**Teorema**: Los productos (finitos) existen en la categoría de variedades algebraicas

**Dem**: Sean $X$ e $Y$ variedades algebraicas, y consideremos cubrimientos por abiertos <u>afines</u> $\{\mathcal{U}_i\}_{i\in I}$ y $\{V_j\}_{j \in J}$, respectivamente. Sabemos que $\mathcal{U}_i \times V_j$ es una variedad afín y luego construimos $Z = X \times Y$ usando el atlas algebraico $Z_{ij} := \mathcal{U}_i \times V_j$ con $i \in I, j \in J$. Aquí, $Z_{ij} \cap Z_{k\ell} = (\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_k) \times (V_j \times V_\ell)$.

Dotamos al conjunto $X \times Y$ de la topología siguiente: Un <u>abierto</u> en $Z = X \times Y$ es un subconjunto tq su intersección con cada $Z_{ij}$ es abierto en $Z_{ij}$. Por ejemplo, cada $Z_{k\ell}$ es abierto en $Z$.

Dado que $\mathcal{U}_i$ y $\mathcal{U}_j$ se pegan (forman un atlas algebraico), las funciones regulares en $\mathcal{U}_i$ y $\mathcal{U}_j$ se restringen a las mismas funciones en $\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j$.

$\Rightarrow$ Funciones regulares en $Z_{ij}$ y $Z_{kl}$ se restringen a las mismas funciones en $Z_{ij} \cap Z_{kl}$, y luego los $\{Z_{ij}\}_{(i,j)\in I\times J}$ forman un atlas algebraico ✓

Finalmente, si $u : S \to X$ y $v : S \to Y$ son morfismos regulares, entonces los abiertos $u^{-1}(\mathcal{U}_i) \times v^{-1}(V_j)$ forman un cubrimiento de $S$ y luego la propiedad universal se verifica localmente. Dado que "ser regular" es una propiedad local, tenemos que la propiedad universal se verifica globalmente ✓ ■

Recuerdo: Dado que $k$ es alg. cerrado (y luego infinito), tenemos que $\mathbb{A}^n$ es un espacio topológico irreducible y luego todo par de abiertos de Zariski no-vacíos de $\mathbb{A}^n$ se intersectan. En particular, $\mathbb{A}^n$ no es Hausdorff!

Obs: Sea $X$ un espacio topológico. Entonces, son equivalentes:

① $X$ es Hausdorff, ie, para todos $x, y \in X$ con $x \neq y$, existen $\mathcal{U}, V \subseteq X$ abiertos tal que $x \in \mathcal{U}$, $y \in V$ y $\mathcal{U} \cap V = \phi$.

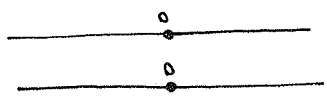
② La diagonal $\Delta_X := \{(x,x),\ x \in X\}$ es un cerrado en $X \times X$ (con la top. producto!)

Idea: ① dice que todo punto fuera de la diagonal posee una vecindad abierta para la topología producto de $X \times X$, ie, ②.

Def: Sea $X$ una variedad algebraica. Diremos que $X$ es separada si la diagonal $\Delta_X = \{(x,x),\ x \in X\}$ es un cerrado de Zariski de $X \times X$.

Ejemplos: ① Toda variedad algebraica afín es separada: En efecto, sea $X \subseteq \mathbb{A}^n$ subvar. afín y sea $(x,y) \notin \Delta_X$, ie, $x, y \in X$ con $x \neq y$. Entonces, existe $f \in \mathcal{O}(X)$ tal que $f(x) \neq f(y)$ (eg. funciones coordenadas). Luego, la función $h(x,y) = f(x) - f(y)$ en $\mathcal{O}(X \times X)$ se anula en $\Delta_X$ pero no se anula en $(x,y)$, ie, $(X\times X) \setminus \Delta_X$ abierto ✓

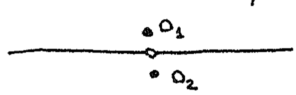
② Recta afín con dos orígenes: Consideremos dos copias de la recta afín $\mathbb{A}^1$ y sean $\mathcal{U}_1 = \mathcal{U}_2 = \mathbb{A}^1 \setminus \{0\}$:



$X_1 = \mathbb{A}^1$

$X_2 = \mathbb{A}^1$ $\rightsquigarrow Z = X_1 \sqcup X_2 = \mathbb{A}^1 \times \{1,2\}$

Sea $X$ la variedad algebraica obtenida al pegar $X_1$ y $X_2$ a lo largo de los abiertos $\mathcal{U}_1$ y $\mathcal{U}_2$ (usando la identidad), ie, $X = Z/\sim$ donde $(x;1) \sim (x;2)$ si $x \neq 0$.

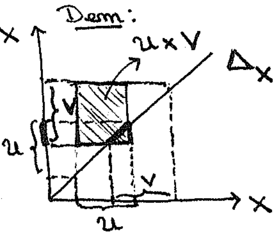
$X$  $0_1 = [(0;1)]$ y $0_2 = [(0;2)]$

La variedad $X$ no es separada: en la clausura $\overline{\Delta_X}^{Zar}$ de la diagonal se encuentran los puntos $(0_1, 0_2), (0_2, 0_1) \in X \times X$ que no forman parte de $\Delta_X$.

Veamos algunas consecuencias de la separación:

Prop: Sea $X$ variedad algebraica separada, y sean $\mathcal{U}, V \subseteq X$ abiertos afines. Entonces, $\mathcal{U} \cap V$ es un abierto afín de $X$.

Dem:



Notamos que $(\mathcal{U} \times V) \cap \Delta_X \cong \mathcal{U} \cap V$. Dado que el producto $\mathcal{U} \times V$ es una var. alg. afín y $\Delta_X \subseteq X \times X$ es cerrado

$\Rightarrow \mathcal{U} \cap V$ es isomorfo a un cerrado de una var. afín ✓ ■

**Def:** Sea $f : X \to Y$ un morfismo regular entre variedades algebraicas. Definimos el <u>grafo</u> de $f$ como el conjunto $\Gamma_f = \{(x,y) \in X \times Y \text{ tal que } y = f(x)\} \subseteq X \times Y$.

El siguiente resultado puede pensarse como la versión algebraica del "Teorema del Grafo cerrado" en topología o análisis funcional:

**Prop:** Sea $X$ una variedad algebraica definida a partir del atlas algebraico (ver §9) $\{\alpha_i : \mathcal{U}_i \xrightarrow{\sim} V_i\}_{i\in I}$, donde los $\{\mathcal{U}_i\}_{i\in I}$ son un cubrimiento abierto de $X$ y donde $V_i$ es una variedad algebraica <u>separada</u> (eg. afín). Entonces, la variedad algebraica $X$ es separada si y solo si:

Para todo par de cartas locales distintas $\alpha_i$ y $\alpha_j$, el grafo $\Gamma_{ji} := \Gamma_{\gamma_{ji}}$ del cambio de cartas $\gamma_{ji} = \alpha_j \circ \alpha_i^{-1} : V_{ij} \xrightarrow{\sim} V_{ji}$ es un cerrado Zariski de $V_i \times V_j$.

**Dem:** Los abiertos $\{\mathcal{U}_i \times \mathcal{U}_j\}_{(i,j)\in I\times I}$ cubren $X \times X$, y luego la diagonal $\Delta_X$ de $X \times X$ es cerrada si y solo si $\Delta_X \cap (\mathcal{U}_i \times \mathcal{U}_j)$ es cerrado en $\mathcal{U}_i \times \mathcal{U}_j$ para todo $i,j \in I$. Recordemos que $V_{ij} \underset{\text{def}}{=} \alpha_i(\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j) \subseteq V_i$ y que $(\mathcal{U}_i \times \mathcal{U}_j) \cap \Delta_X \cong \mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j$. Además, para $x \in V_{ij}$ se tiene $(x, \gamma_{ji}(x)) = (x, \alpha_j(\alpha_i^{-1}(x))) = (\alpha_i(y), \alpha_j(y))$, con $y = \alpha_i^{-1}(x) \in \mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j$. Luego, la imagen de $(\mathcal{U}_i \times \mathcal{U}_j) \cap \Delta_X$ por $\alpha_i \times \alpha_j$ es el grafo $\Gamma_{ji}$ de $\gamma_{ji} : V_{ij} \xrightarrow{\sim} V_{ji}$ en $V_i \times V_j$. Así, $X$ es separada si y solo si $\Gamma_{ji} \subseteq V_i \times V_j$ es cerrado $\forall i,j \in I$. Finalmente, notamos que si $i=j$ entonces $\Gamma_{ii} = \Gamma_{Id_{V_i}} = \Delta_{V_i} \subseteq V_i \times V_i$ es cerrado pues $V_i$ es separada, por lo que basta considerar el caso $i \neq j$. ∎

**Ejemplo:** Recordemos que $\mathbb{P}^1$ se obtiene a partir del atlas algebraico

$$\alpha_0 : \mathcal{U}_0 = \{[x,y] \in \mathbb{P}^1 \text{ tq } x \neq 0\} \xrightarrow{\sim} \mathbb{A}^1, \quad [x,y] \longmapsto \frac{y}{x}$$

y

$$\alpha_1 : \mathcal{U}_1 = \{[x,y] \in \mathbb{P}^1 \text{ tq } y \neq 0\} \xrightarrow{\sim} \mathbb{A}^1, \quad [x,y] \longmapsto \frac{x}{y}$$

Más aún, si $z$ es una coordenada en $\mathbb{A}^1 \setminus \{0\} = \alpha_0(\mathcal{U}_0 \cap \mathcal{U}_1) = \alpha_1(\mathcal{U}_0 \cap \mathcal{U}_1)$, entonces $\gamma = \gamma_{01} = \alpha_1 \circ \alpha_0^{-1}$ está dado por $\gamma(z) = \frac{1}{z}$.

Luego, el grafo de $\gamma$ está dado por los $(z,w) \in \mathbb{A}^1 \times \mathbb{A}^1$ tal que $zw = 1$, que es un cerrado de Zariski. Así, la recta proyectiva $\mathbb{P}^1$ es separada.

**Ejercicio** Probar que el espacio proyectivo $\mathbb{P}^n$ es una variedad algebraica separada.

**Ejercicio** Sea $X$ una variedad algebraica separada. Probar que todo abierto $\mathcal{U} \subseteq X$ y todo cerrado $Y \subseteq X$ es una variedad algebraica separada.

**Obs:** En particular, todo abierto y cerrado de $\mathbb{P}^n$ es una variedad alg. separada.

**Convención:** En lo que sigue del curso, <u>todas</u> las variedades serán separadas.

**Atención:** Históricamente, las variedades algebraicas definidas en §7 se les conoce como "prevariedades" y una <u>variedad</u> es una prevariedad algebraica separada. En todo lo que sigue adoptamos esa convención!

"Una variedad algebraica es un esquema reducido y separado de tipo finito sobre $k$"