§9. Atlas algebraicos

Tal como para variedades diferenciables, podemos construir variedades algebraicas "pegando" variedades afines usando un atlas:

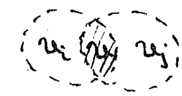
Teorema: Sea X un espacio topológico. Consideremos:

1. Un cubrimiento abierto $\{\mathcal{U}_i\}_{i\in I}$ de X.
2. Para cada $i \in I$, un haz de k-álgebras A_i en $\mathcal{U}_i$.
3. Para todos $i,j \in I$ un isomorfismo de haces $\varphi_{ji} : A_i|_{\mathcal{U}_i\cap\mathcal{U}_j} \xrightarrow{\sim} A_j|_{\mathcal{U}_i\cap\mathcal{U}_j}$ que verifica: a) $\varphi_{ii} = \mathrm{Id}_{A_i}$ para todo $i\in I$.
   b) Para todos $i,j,k \in I$ se tiene $\varphi_{ki} = \varphi_{kj}\circ\varphi_{ji}$ en $\mathcal{U}_i\cap\mathcal{U}_j\cap\mathcal{U}_k$.

Entonces, existe un único haz de k-álgebras A en X junto con isomorfismos de haces $\varphi_i : A|_{\mathcal{U}_i} \xrightarrow{\sim} A_i$ en $\mathcal{U}_i$, tales que $\varphi_{ji} = \varphi_j \circ \varphi_i^{-1}$ en $\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j$.

Dem: Los abiertos $\mathcal{U} \subseteq X$ contenidos en alguno de los $\mathcal{U}_i$ forman una base de abiertos. Para un tal abierto, definimos

$$A(\mathcal{U}) := \coprod_{\substack{i\in I\\ \mathcal{U}\subseteq\mathcal{U}_i}} A_i(\mathcal{U}) \Big/ \sim$$

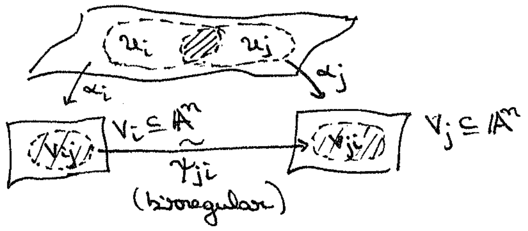


donde $(s,\mathcal{U}_i) \sim (t,\mathcal{U}_j)$, con $s\in A_i(\mathcal{U})$ y $t \in A_j(\mathcal{U})$, si $t = \varphi_{ji}(s)$ en $A_j|_{\mathcal{U}_i\cap\mathcal{U}_j}(\mathcal{U})$. Las condiciones a) y b) aseguran que $\sim$ es una relación de equivalencia. El hecho que los A_i son haces implica que A es un haz y que es único. ■

Caso particular importante: Sea X espacio topológico noetheriano, y supongamos que cada espacio anillado $(\mathcal{U}_i, A_i)$ es una variedad algebraica. Entonces, el espacio anillado (X, A) es una variedad algebraica ✓

Concretamente: Un atlas algebraico en X son homeomorfismos $\alpha_i : \mathcal{U}_i \xrightarrow{\sim} V_i$ llamados cartas locales, donde V_i es una variedad algebraica $\forall i \in I$ y donde se cumple:

Sea $V_{ij} \subseteq V_i$ la imagen de $\mathcal{U}_i\cap\mathcal{U}_j \subseteq \mathcal{U}_i$ por α_i. Entonces, para todos $i,j\in I$ se tiene que $\gamma_{ji} := \alpha_j\circ\alpha_i^{-1} : V_{ij} \xrightarrow{\sim} V_{ji}$ isomorfismo entre las var. alg. V_{ij} y V_{ji}.



← caso particular: $\{\mathcal{U}_i\}_{i\in I}$ abiertos afines.

Ejemplo: Sean $[x,y]$ coord. homogéneas en $\mathbb{P}^1 = (\mathbb{A}^2\setminus\{0\})/\mathbb{G}_m$ y sean:

$$\mathcal{U}_0 = \{[x,y]\in\mathbb{P}^1 \text{ tq } x\neq 0\} \quad \text{y} \quad \mathcal{U}_1 = \{[x,y]\in\mathbb{P}^1 \text{ tq } y \neq 0\}.$$

Cartas locales: $\alpha_0 : \mathcal{U}_0 \xrightarrow{\sim} V_0 = \mathbb{A}^1$, $[x,y] \longmapsto \frac{y}{x}$ y $\alpha_1 : \mathcal{U}_1 \xrightarrow{\sim} V_1 = \mathbb{A}^1$, $[x,y]\longmapsto \frac{x}{y}$

Notar que $\alpha_0(\mathcal{U}_0\cap\mathcal{U}_1) = \alpha_1(\mathcal{U}_0\cap\mathcal{U}_1) = \mathbb{A}^1\setminus\{0\}$. Más aún, si z coordenada en $\mathbb{A}^1\setminus\{0\}$ entonces $\gamma_{01} := \alpha_1\circ\alpha_0^{-1}$ está dada por $\gamma_{01}(z) = \frac{1}{z}$ morfismo birregular ✓

$\boxed{\text{Ejercicio}}$ Describir un atlas algebraico en $\mathbb{P}^n$.

(**Indicación**: Considerar $\mathcal{U}_i = \{[x_0,\dots,x_n]\in\mathbb{P}^n \text{ tq } x_i\neq 0\} \xrightarrow{\sim} \mathbb{A}^n$ carta local

$$[x_0,\dots,x_n] \longmapsto \left(\frac{x_0}{x_i},\dots,\frac{x_{i-1}}{x_i},\frac{x_{i+1}}{x_i},\dots,\frac{x_n}{x_i}\right)\text{)}$$