§8. Introducción a los Esquemas (Grothendieck, 1960)

Recuerdo (localización): Sea A un anillo conmutativo. Un subconjunto $S \subseteq A$ es un conjunto multiplicativo si $1 \in S$ y si para todos $s, s' \in S$ se tiene que $ss' \in S$.

En $A \times S$ definimos la relación de equivalencia siguiente:

$$(a,s) \sim (a',s') \iff \exists t \in S \text{ tal que } t(as' - a's) = 0 .$$

La localización de A respecto a S es el anillo cociente $A_S := (A \times S)/\sim$, donde denotamos por $\frac{a}{s}$ la clase de equivalencia de (a,s).

Ejemplos: ① Si A dominio entero, $S = A \setminus \{0\}$ es multiplicativo, y $A_S := k(A)$ o $Fr(A)$ es el cuerpo de fracciones de A (eg. $k(\mathbb{Z}) = \mathbb{Q}$).

② Sea $f \in A$ y $S = \{f^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ multiplicativo. Entonces, $A_S := A_f$ es localización respecto a f. Notar que $A_f \neq 0$ si y sólo si f no es nilpotente. Además, $A_f \cong A[X]/\langle fX - 1 \rangle$.

③ Sea $\mathfrak{p} \subseteq A$ ideal primo, entonces $S := A \setminus \mathfrak{p}$ es multiplicativo. Diremos que $A_S := A_{\mathfrak{p}}$ es la localización en $\mathfrak{p}$. Además, $A_{\mathfrak{p}}$ es un anillo local con único ideal maximal $\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}$ (todo elemento fuera de $\mathfrak{p}$ es invertible !)

Propiedad universal: Sea $\pi : A \to A_S$, $a \mapsto \frac{a}{1}$. Entonces, para todo morfismo de anillos $\varphi : A \to B$ tal que $\varphi(s) \in B^{\times}$ es invertible para todo $s \in S$, existe un único morfismo de anillos $\hat{\varphi} : A_S \to B$ tal que

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "\pi"'] & & B \\ & A_S \arrow[ur, "\exists ! \hat{\varphi}"'] & \end{tikzcd}$$

es conmutativo.

Teorema: Hay una equivalencia de categorías entre:

① La categoría $\underline{Aff}_{k,red}$ de variedades algebraicas (reducidas) afines sobre k.

② La categoría $\underline{Alg}_{k,red}$ de k-álgebras (conmutativas) finitamente generadas y sin elementos nilpotentes no-triviales (ie, reducidas).

Dem: Dada una variedad algebraica afín $X \subseteq \mathbb{A}^n$, el álgebra de funciones regulares $\mathcal{O}(X) \cong k[x_1, \ldots, x_n]/\mathcal{I}(X)$ es finitamente generada y reducida. Además, a cada morfismo $f : X \to Y$ entre variedades afines asociamos (de manera contravariante) un morfismo $f^* : \mathcal{O}(Y) \to \mathcal{O}(X)$ entre las k-álgebras correspondientes ✓

Para obtener la equivalencia de categorías, asociaremos (de manera functorial) a cada k-álgebra reducida y finitamente generada A una variedad algebraica afín $(X, \mathcal{O}_X)$, llamada el espectro maximal de A:

Sea $X := \mathrm{Specm}(A) = \{\mathfrak{m} \subseteq A \text{ ideal maximal}\}$ el conjunto de ideales maximales de A. Dotamos a X de la topología (de Zariski) obtenida al declarar que los cerrados de A son los conjuntos de la forma $V(I) = \{\mathfrak{m} \subseteq A \text{ maximal tal que } I \subseteq \mathfrak{m}\}$ para algún ideal $I \subseteq A$. Más aún, dado $f \in A$ no-nulo, los abiertos

$$\mathcal{U}_f := \{\mathfrak{m} \subseteq A \text{ maximal tal que } f \notin \mathfrak{m}\} = X \setminus V(f)$$

forman una base de la topología, por lo que pueden ser usados para definir $\mathcal{O}_X$:

Para cada $f \in A$ no-nulo, definimos $\mathcal{O}_X(\mathcal{U}_f) := A_f$ la localización de A respecto a f. Así, una sección $s \in \mathcal{O}_X(\mathcal{U}_f)$ es un elemento de la forma $s = \frac{u}{f^n}$ para $u \in A$ y $n \in \mathbb{N}$.

Notar que por definición $\mathcal{U}_f \cap \mathcal{U}_g = \mathcal{U}_{fg}$ (Ejercicio) y por ende basta considerar las inclusiones $\mathcal{U}_{fg} \subseteq \mathcal{U}_f$, en cuyo caso el morfismo de <u>restricción</u> está dado por

$$\mathcal{O}_X(\mathcal{U}_f) = A_f \longrightarrow \mathcal{O}_X(\mathcal{U}_{fg}) = A_{fg}$$
$$s = \frac{u}{f^n} \longmapsto \frac{u g^n}{(fg)^n}$$

Veamos que $\mathcal{O}_X$ es un haz:

Sea $\mathcal{U}_f \subseteq X$ abierto, y sea $\mathcal{U}_f = \bigcup_{i\in I} \mathcal{U}_{g_i}$ cubrimiento abierto, ie, $V(f) = \bigcap_{i\in I} V(g_i)$:

① <u>Pegado</u>: Sea $s_i \in \mathcal{O}(\mathcal{U}_{g_i}) = A_{g_i}$ de la forma $s_i = \frac{u_i}{g_i^{n_i}}$ para $u_i \in A$ y $n_i \in \mathbb{N}$.

Supongamos que $s_i|_{\mathcal{U}_{g_ig_j}} = s_j|_{\mathcal{U}_{g_ig_j}}$ para todos $i,j \in I$, ie, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $(g_ig_j)^N (u_i g_j^{n_j} - u_j g_i^{n_i}) = 0$ en A_f.

<u>Obs</u>: La condición $V(f) = \bigcap_{i\in I} V(g_i)$ es equivalente a decir: "Para todo ideal maximal $\mathfrak{m} \subseteq A$, se tiene que $f \in \mathfrak{m} \Leftrightarrow g_i \in \mathfrak{m}\ \forall i \in I$". Luego, dado que f es <u>invertible</u> en A_f (ie, $f \notin \mathfrak{m}$ para todo ideal maximal $\mathfrak{m} \subseteq A_f$) <u>no</u> existe $\mathfrak{m} \subseteq A_f$ ideal maximal tal que $\langle \{g_i\}_{i\in I} \rangle \subseteq \mathfrak{m}$, ie, el ideal generado por los $\{g_i\}_{i\in I}$ es todo A_f. En particular, dado que para todo $m_i \in \mathbb{N}^{\geq 1}$ se tiene que $V(g_i) = V(g_i^{m_i})$, deducimos:

(✱) Existen $v_i \in A_f$ tal que $\sum_{\text{finita}} v_i g_i^{m_i} = 1$ en A_f.

Considerando $m_i := n_i + N$ en (✱), obtenemos $\sum_{\text{finita}} v_i g_i^{n_i+N} = 1$ en A_f $\quad / \cdot g_j^N u_j$

$$\Rightarrow g_j^N u_j = \sum_{i\in F} v_i (g_ig_j)^N u_j g_i^{n_i} = \sum_{i\in F} v_i (g_ig_j)^N u_i g_j^{n_j} = g_j^{n_j+N} \underbrace{\sum_{i\in F} u_i v_i g_i^N}_{:= s \text{ en } A_f}$$

Notamos que la restricción de $s \in A_f = \mathcal{O}(\mathcal{U}_f)$ a $A_{g_j} \in \mathcal{O}(\mathcal{U}_{g_j})$ es s_j, pues:
$$s_j = \frac{u_j}{g_j^{n_j}} = \frac{g_j^N u_j}{g_j^{n_j+N}} = \frac{g_j^{n_j+N} s}{g_j^{n_j+N}} = s \ \checkmark$$

② <u>Unicidad</u>: Sea $s \in \mathcal{O}(\mathcal{U}_f) = A_f$ tal que para todo $i \in I$, $s|_{\mathcal{U}_{g_i}} = 0$ en $\mathcal{O}(\mathcal{U}_{g_i}) = A_{g_i}$.
Si $s = \frac{u}{f^n} \in A_f$, entonces $s = 0$ en A_{g_i} si existe $m_i \in \mathbb{N}$ tal que $g_i^{m_i} u = 0$ en A_f. Por (✱): $\exists v_i \in A_f$ tq $\sum_{i\in I} v_i g_i^{m_i} = 1 \Rightarrow u = \sum_{i\in I} v_i \underbrace{g_i^{m_i} u}_{=0} = 0$ en A_f
$\Rightarrow s = 0$ en A_f ✓

Luego, $(X, \mathcal{O}_X)$ es un espacio anillado. Veamos que es una variedad algebraica afín:
Sean $a_1, \dots, a_n \in A$ generadores de A, entonces $k[x_1, \dots, x_n] \twoheadrightarrow A$, $x_i \mapsto a_i$ es sobreyectiva de kernel $I \subseteq \mathcal{O}(\mathbb{A}^n)$ (ideal), y $A \cong \mathcal{O}(\mathbb{A}^n)/I$. Por definición, A es reducida $\Leftrightarrow I \subseteq \mathcal{O}(\mathbb{A}^n)$ ideal radical. Luego, $V(I) =: Y \subseteq \mathbb{A}^n$ subvar. afín y además $\mathcal{O}(Y) \cong A$. En particular, $\mathcal{O}(Y)$ tiene "los mismos" ideales maximales que A, ie, hay una biyección (Nullstellensatz débil):

$Y \xrightarrow{\sim} X = \mathrm{Specm}(A)$, $y \mapsto m_y = \{f \in \mathcal{O}(Y) \cong A$ tal que $f(y) = 0\}$. Más aún, para $f \in \mathcal{O}(Y)$ no-nula, se tienen homeomorfismos

$$Y_f := \{y \in Y \text{ tq } f(y) \neq 0\} \xrightarrow{\sim} \mathcal{U}_f \subseteq X ,$$

donde $\mathcal{O}(Y_f) \cong \mathcal{O}(\mathcal{U}_f) = A_f$. Finalmente, notamos que Y_f es una variedad algebraica afín, pues $Y_f \cong \{(y,t) \in \mathbb{A}^{n+1}$ tq $y \in Y$ y $f(y)t = 1\}$ ✓

De este modo, obtenemos el functor contravariante

$$\mathrm{Specm} : \underline{\mathrm{Alg}}_{k,\mathrm{red}} \longrightarrow \underline{\mathrm{Aff}}_{k,\mathrm{red}}$$

que permite obtener la equivalencia de categorías. ■

En palabras simples, la teoría de esquemas buscar reemplazar la categoría $\underline{\mathrm{Alg}}_{k,\mathrm{red}}$ por k-álgebras o anillos más generales, y obtener usando "espectros" objetos geométricos más generales: los esquemas.

<u>Caso particular importante</u>: Sea A una k-álgebra finitamente generada que <u>no</u> necesariamente es reducida (eg. $A = k[X,Y]/\langle Y^2 \rangle$). La construcción del espacio anillado $\mathrm{Specm}(A)$ se extiende a este contexto, y diremos que es un <u>esquema afín</u> (de tipo finito o finitamente generado) <u>sobre k</u>.

Concretamente, si $A \cong \mathcal{O}(\mathbb{A}^n)/I$ donde I es un ideal (<u>no</u> necesariamente radical), entonces el espacio anillado $(X, \mathcal{O}_X)$ está dado por el espacio topológico

$$X := \mathrm{Specm}(A) = \{\mathfrak{m} \subseteq A \text{ ideal maximal}\}$$

que es homeomorfo a $Y = V(I) := X_{\mathrm{red}} \subseteq \mathbb{A}^n$ sub-variedad afín. Sin embargo, el haz estructural está dado por $\mathcal{O}_X(\mathcal{U}_f) := A_f$ para cada $f \in A$ no-nilpotente.

<u>Obs</u>: Si $x \in X$ corresponde al ideal maximal $\mathfrak{m} \subseteq A$, entonces $\mathcal{O}_{X,x} = A_{\mathfrak{m}}$ es la localización en $\mathfrak{m}$, el cual es un anillo local con único ideal maximal $\mathfrak{m} A_{\mathfrak{m}}$ que cumple $A_{\mathfrak{m}}/\mathfrak{m} A_{\mathfrak{m}} \cong A/\mathfrak{m} \cong k$.
En particular, si bien $f \in \mathcal{O}_X(\mathcal{U})$ <u>no</u> es realmente una función, de todas formas podemos definir su valor en $x \in X$ como $f(x) \in \mathcal{O}_{X,x}/\mathfrak{m}_x \cong k$. Por ejemplo, si $f \in \mathcal{O}_X(\mathcal{U})$ es <u>nilpotente</u>, entonces $f(x) \in k$ también es nilpotente y luego $f(x) = 0$.

Si denotamos por $\mathrm{Nil}(A) = \{a \in A \text{ tq } \exists m \in \mathbb{N}^{\geq 1} \text{ tq } a^m = 0\}$ el <u>nilradical</u> de A, y definimos $A_{\mathrm{red}} := A/\mathrm{Nil}(A)$ es anillo reducido asociado a A. Por ejemplo, si $A = \mathcal{O}(\mathbb{A}^n)/I$ entonces $A_{\mathrm{red}} = \mathcal{O}(\mathbb{A}^n)/\sqrt{I}$.

Más aún, el morfismo sobreyectivo $A \twoheadrightarrow A_{\mathrm{red}}$ induce una inclusión de espacios anillados $X_{\mathrm{red}} = \mathrm{Specm}(A_{\mathrm{red}}) \hookrightarrow X = \mathrm{Specm}(A)$, que es la identidad a nivel de espacios topológicos.

<u>Hecho</u> (sin demostración): Hay una equivalencia de categorías entre:

① La categoría $\underline{\mathrm{Aff}}_k$ de esquemas afines (de tipo finito) sobre k. $\quad X \mapsto \mathcal{O}(X) \qquad \mathrm{Specm}(A) \leftarrow A$

② La categoría $\underline{\mathrm{Alg}}_k$ de k-álgebras finitamente generadas

<u>Ejemplos</u>: ① En $\mathbb{A}^1 = \mathrm{Specm}(k[X])$ consideramos el sub-esquema afín dado por $0_m := \mathrm{Specm}(k[X]/\langle X^m\rangle)$ que no es reducido si $m \geq 2$:

$$\overset{\bullet}{\underset{0_m}{}}\longrightarrow \mathbb{A}^1 \quad \text{"origen de multiplicidad } m\text{"}$$

Notar que si pensamos un punto $x \in X \subseteq \mathbb{A}^n$ en una var. alg. afín como un morfismo $\varphi_x : \mathrm{Specm}(k) \hookrightarrow \mathrm{Specm}(X)$, $\{*\} \longmapsto x$, que corresponde a $\mathcal{O}(X) \twoheadrightarrow \mathcal{O}(X)/\mathfrak{m}_x \cong k$, entonces podemos pensar puntos de mayor multiplicidad como morfismos

$$\mathrm{Specm}(k[X]/\langle X^m\rangle) \longrightarrow \mathrm{Specm}(X)$$
$$\{*\} \longmapsto x$$

singleton (como conjunto!)

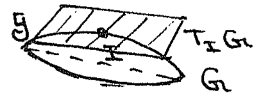
Por ejemplo, sea $D = k[\varepsilon]/\langle \varepsilon^2\rangle$ el anillo de "<u>números duales</u>" (Clifford, 1873), ie, $a+\varepsilon b \in D$ con $a,b \in k$ y $\varepsilon^2 = 0$ ⇝ "aproximación lineal", entonces veremos que se puede pensar el "espacio tangente" $T_{X,x}$ de X en $x \in X$ como el conjunto de morfismos $\mathrm{Specm}(k[\varepsilon]/\langle\varepsilon^2\rangle) \longrightarrow \mathrm{Specm}(X)$.

Informalmente: sea $X = O_n(\mathbb{R}) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) \cong \mathbb{A}^{n^2}(\mathbb{R}) \text{ tq } {}^tAA = I_n\} \subseteq \mathbb{A}^{n^2}$ subvariedad afín (grupo algebraico y grupo de Lie) y sea $A \in X$, entonces:

$A + \varepsilon B \in O_n(\mathbb{R}[\varepsilon]/\langle\varepsilon^2\rangle)$ si ${}^t(A+\varepsilon B)(A+\varepsilon B) = I_n$

$\Rightarrow {}^tAA + \varepsilon({}^tBA + {}^tAB) + \cancel{\underset{0}{\varepsilon^2}\,{}^tBB} = \cancel{I_n}$, ie, $T_AX \cong \{B \in M_n(\mathbb{R}) \text{ tq } {}^tBA = -{}^tAB\}$.

En part, $T_I O_n(\mathbb{R}) \cong \{B \in M_n(\mathbb{R}) \text{ tq } {}^tB = -B\}$ "álgebra de Lie".

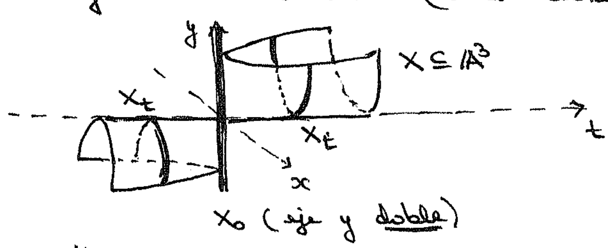


② Sea $X = \{(x,y,t) \in \mathbb{A}^3 \text{ tal que } yt = x^2\}$ y sea $\varphi : X \longrightarrow \mathbb{A}^1_t$, $(x,y,t) \longmapsto t$ regular.

Si para cada $t \in \mathbb{A}^1$ definimos:

$$X_t := \mathrm{Specm}(k[X,Y]/\langle Yt - X^2\rangle)$$

sub-esquema afín de X, la <u>fibra</u> de φ en $t \in \mathbb{A}^1$, entonces para $t \neq 0$ se tiene que X_t es una sub-variedad afín (reducida). Sin embargo, para $t = 0$ obtenemos un esquema afín no-reducido ("recta doble"):



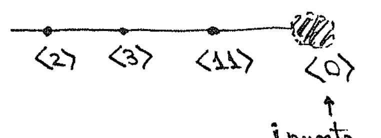
X_0 (eje y <u>doble</u>)

<u>Grothendieck</u>: Sea A anillo conmutativo. Definimos el <u>espectro</u> de A por

$$\mathrm{Spec}(A) := \{\mathfrak{p} \subseteq A \text{ ideal primo}\}.$$

Los cerrados de $X = \mathrm{Spec}(A)$ son los $V(I) = \{\mathfrak{p} \subseteq A \text{ primo tal que } I \subseteq \mathfrak{p}\}$ y se define $\mathcal{O}_X$ igual que antes: $\mathcal{O}_X(\mathcal{U}_f) := A_f$. <u>Aquí</u>: si $x \in X$ corresponde al ideal primo $\mathfrak{p} \subseteq A$, entonces $\mathcal{O}_{X,x} = A_{\mathfrak{p}}$ localización en $\mathfrak{p}$.

<u>Ejemplo</u>: $A = \mathbb{Z}$ ⇝ $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}) = \{0\} \cup \{\langle p\rangle,\ p \text{ número primo}\}$



$\overline{\langle p\rangle}^{Zar} = \langle p\rangle$ <u>punto cerrado</u>, $\overline{\langle 0\rangle}^{Zar} = \mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$ <u>punto genérico</u>

$\mathcal{O}_{X,\langle p\rangle} = \mathbb{Z}_{\langle p\rangle}$ ⇝ $\mathcal{O}_{X,\langle p\rangle}/\mathfrak{m}_{\langle p\rangle} = \mathbb{Z}_{\langle p\rangle}/p\mathbb{Z}_{\langle p\rangle} \cong \mathbb{F}_p$ y $\mathcal{O}_{X,\langle 0\rangle} = \mathbb{Z}_{\langle 0\rangle} \cong \mathbb{Q}$.