§7. Variedades algebraicas

Recordemos que k siempre será un cuerpo algebraicamente cerrado.

Def: Una variedad algebraica afín sobre k es un espacio anillado $(X, \mathcal{O}_X)$ que es isomorfo (como espacio anillado en k-álgebras) un cerrado de Zariski en un espacio afín, junto con su haz de funciones regulares.

Obs: Típicamente el haz estructural $\mathcal{O}_X$ se omite si es claro en el contexto, y escribimos "la variedad algebraica afín X" simplemente. Notar que el tallo $\mathcal{O}_{X,x}$ formado por gérmenes de funciones regulares en $x \in X$ es una k-álgebra local, ie, posee un único ideal maximal $\mathfrak{m}_x = \{f \in \mathcal{O}_{X,x}$ tal que $f(x) = 0\}$, pues todo germen fuera de $\mathfrak{m}_x$ es invertible. Más aún, $\mathcal{O}_{X,x}/\mathfrak{m}_x \cong k$ para todo $x \in X$.

Def: Una variedad algebraica (reducida) sobre k es un espacio anillado $(X, \mathcal{O}_X)$ tal que:
① X es un espacio topológico noetheriano.
② Cada punto de X admite una vecindad abierta $\mathcal{U} \subseteq X$ tal que $(\mathcal{U}, \mathcal{O}_X|_{\mathcal{U}})$ es una variedad algebraica afín; diremos que $\mathcal{U}$ es un abierto afín de X.

Obs: En la práctica, agregaremos una condición de "separación" que será descrita después.

Def: Un morfismo de variedades algebraicas $(X, \mathcal{O}_X) \longrightarrow (Y, \mathcal{O}_Y)$ es un morfismo entre los espacios anillados subyacentes.

Ejemplo principal: Sean X e Y dos variedades algebraicas. Diremos que una función continua $f: X \to Y$ es un morfismo regular si para toda función regular $u: V \to k$ sobre un abierto (afín) $V \subseteq Y$ (ie, $u \in \mathcal{O}_Y(V)$) la función definida por el pullback $f^*(u) := u \circ f : f^{-1}(V) \to k$ es una función regular en $f^{-1}(V) \subseteq X$. Luego, un morfismo regular define un morfismo de haces en k-álgebras (pullback) $f^*: \mathcal{O}_Y \longrightarrow f_* \mathcal{O}_X$ y por ende un morfismo de espacios anillados:

$$(f, f^*) : (X, \mathcal{O}_X) \longrightarrow (Y, \mathcal{O}_Y).$$

Veremos que todo morfismo entre variedades algebraicas es regular, ie, para todo morfismo $(f, \varphi): (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ de espacios anillados entre variedades algebraicas se tiene que $f: X \to Y$ es regular (en el sentido anterior) y $\varphi = f^*$.

Terminología: Un morfismo regular $f: X \to Y$ entre variedades algebraicas es un isomorfismo si f es biyectivo y $f^{-1}: Y \to X$ es un morfismo regular, ie, el morfismo (f, f^*) de espacios anillados es un isomorfismo (de espacios anillados). En ocasiones, también se dice que $f: X \to Y$ es un morfismo birregular.

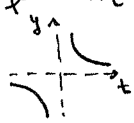
Prop: Sea X una variedad algebraica. Entonces, todo abierto y todo cerrado de X posee una estructura inducida de variedad algebraica.

Dem: Sea $\mathcal{U} \subseteq X$ abierto no-vacío. Entonces, sabemos que $(\mathcal{U}, \mathcal{O}_{\mathcal{U}})$ es un espacio anillado, donde $\mathcal{O}_{\mathcal{U}} = \mathcal{O}_X|_{\mathcal{U}}$. Además, $\mathcal{U}$ es un espacio noetheriano. Luego, basta probar que $\mathcal{U}$ está cubierto por abiertos afines:

sabemos que $X = \bigcup_{i\in I} \mathcal{U}_i$, donde $\mathcal{U}_i$ abierto afín de $X \Rightarrow \mathcal{U} = \bigcup_{i \in I} (\mathcal{U} \cap \mathcal{U}_i)$, donde $V_i = \mathcal{U} \cap \mathcal{U}_i$ es un abierto de la variedad algebraica afín $\mathcal{U}_i$.

Luego, tenemos que probar que todo abierto V de una subvariedad afín $Y \subseteq \mathbb{A}^n$ (ie, un cerrado de Zariski) puede ser cubierto por abiertos afines:

Dado que V es un abierto (de Zariski), existen polinomios $p_1, \dots, p_m \in \mathcal{O}(\mathbb{A}^n)$ tales que $Y \setminus V = \{y \in Y$ tal que $p_1(y) = \dots = p_m(y) = 0\}$. En part, si denotamos por $V_i := \{y \in Y$ tal que $p_i(y) \neq 0\}$ entonces $V = \bigcup_{i=1}^{m} V_i$. Veamos que cada V_i es un abierto afín (ie, isomorfo a una subvariedad afín): En $\mathbb{A}^{n+1}$ consideremos $W_i := \{(y,t) \in \mathbb{A}^n \times \mathbb{A}^1 = \mathbb{A}^{n+1}$ tal que $y \in Y$ y $p_i(y)t = 1\} \underset{\text{cerrado Zariski}}{\subseteq} \mathbb{A}^{n+1}$ y notamos que $W_i \to V_i$, $(y,t) \mapsto y$ es un isomorfismo (de inversa $y \mapsto \left(y, \frac{1}{p_i(y)}\right)$ regular)



$\{yt = 1\} \cong \{y \neq 0\}$ Así, $(\mathcal{U}, \mathcal{O}_{\mathcal{U}})$ es una variedad algebraica ✓

Sea $Y \subseteq X$ cerrado no-vacío. Entonces, sabemos que Y es un espacio topológico noetheriano. Es importante destacar que la definición del haz estructural $\mathcal{O}_Y$ es más sutil (la idea es análoga al hecho que si $Y \subseteq X \subseteq \mathbb{A}^n$ subvar afines entonces Y está determinada por el ideal $\mathcal{I}_X(Y) := \mathcal{I}(Y)/\mathcal{I}(X)$ en $\mathcal{O}(X) = \mathcal{O}(\mathbb{A}^n)/\mathcal{I}(X)$): Sea $\mathcal{I}_Y \subseteq \mathcal{O}_X$ el haz de ideales (ie, un sub-$\mathcal{O}_X$-módulo) de funciones regulares que se anulan en Y. Luego, definimos $\mathcal{O}_Y$ como $(\mathcal{O}_X/\mathcal{I}_Y)|_Y$.

(<u>Obs</u>: A diferencia de $\mathcal{O}_X|_Y$, el haz $(\mathcal{O}_X/\mathcal{I}_Y)|_Y$ tiene la ventaja de que sus secciones son funciones regulares en Y, y no en una vecindad abierta de Y.)

Así, $(Y, \mathcal{O}_Y)$ es un espacio anillado. Veamos que Y puede ser cubierto por abiertos afines: Sea $X = \bigcup_{i\in I} \mathcal{U}_i$ cubrimiento afín $\Rightarrow Y = \bigcup_{i \in I} (Y \cap \mathcal{U}_i)$, donde $W_i = Y \cap \mathcal{U}_i$ es un <u>cerrado</u> de la variedad algebraica afín $\mathcal{U}_i$, y luego W_i es una subvariedad afín. Más aún, dado que si $Y \subseteq X \subseteq \mathbb{A}^n$ son subvar afines entonces $\mathcal{O}_X|_Y \cong \mathcal{O}_Y$ (restricción de polinomios!), tenemos $\mathcal{O}_Y|_{W_i} \cong \mathcal{O}_{W_i}$ ✓ ■

$\boxed{\text{¡Atención!}}$ En general, un <u>abierto</u> de una variedad algebraica afín <u>no</u> es afín: Sea $X = \mathbb{A}^2 \setminus \{(0,0)\}$ variedad algebraica (con $\mathcal{U} \cup V = \{x \neq 0\} \cup \{y \neq 0\}$ cubrimiento afín). Entonces, $\mathcal{O}_X(X) = \mathcal{O}(\mathbb{A}^2)$. En efecto, una sección global $f \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ puede escribirse como $f = \frac{P}{x^n} = \frac{Q}{y^m}$ para $P, Q \in \mathcal{O}(\mathbb{A}^2) \Rightarrow P y^m = Q x^n$ y luego y^m divide a Q y x^n divide a P, ie, $f \in \mathcal{O}(\mathbb{A}^2)$.

Por otra parte, si X fuera afín habría una biyección entre los puntos de X y los ideales maximales de $\mathcal{O}(X) \cong \mathcal{O}(\mathbb{A}^2)$. Sin embargo, $\mathfrak{m}_{(0,0)} \subseteq \mathcal{O}(\mathbb{A}^2) \cong \mathcal{O}(X)$ pero $(0,0) \notin X \Rightarrow X$ <u>no</u> es una variedad algebraica afín.

<u>Terminología</u>: Decimos que un abierto de una variedad algebraica afín es una variedad <u>quasi-afín</u>.

El siguiente es un ejemplo central en geometría algebraica.

<u>Ejemplo muy importante</u>: Consideremos la relación de equivalencia siguiente en $k^{n+1}\setminus\{0\}$: dos vectores x e y no-nulos son equivalentes si son colineales, ie, si existe $\lambda\in k^*$ tal que $y=\lambda x$.

El conjunto de clases de equivalencia por esta relación se llama el <u>espacio proyectivo de dimensión n</u> sobre k, y será denotado $\mathbb{P}^n$ (o también $\mathbb{P}^n(k)$).

<u>Terminología</u>: Tradicionalmente se denota la clase de $x=(x_0,\dots,x_n)\in k^{n+1}\setminus\{0\}$ en $\mathbb{P}^n$ por $[x_0,\dots,x_n]$ (o también $[x_0:\dots:x_n]$) y se dice que $x_0,\dots,x_n$ son las <u>coordenadas homogéneas</u> de $[x]\in\mathbb{P}^n$ (aunque sólo están definidas módulo mult. por una constante no-nula).

De manera más general, si V es un k-espacio vectorial no-nulo, se define el espacio proyectivo asociado a V (o la <u>proyectivización de V</u>) como el conjunto

$$\mathbb{P}(V)=\{L\subseteq V \text{ tal que } \dim_k(L)=1\}.$$

Notar que si $W\subseteq V$ sub-ev no-nulo, entonces $\mathbb{P}(W)\subseteq\mathbb{P}(V)$.

Veamos que $\mathbb{P}^n$ es una variedad algebraica: Para esto, consideremos el <u>grupo multiplicativo</u> $\mathbb{G}_m=(k^*,\cdot)$ y la acción en $\mathbb{A}^{n+1}\setminus\{0\}$ dada por

$$\lambda\cdot(x_0,\dots,x_n)=(\lambda x_0,\dots,\lambda x_n) \quad \text{para todo } \lambda\in\mathbb{G}_m.$$

Luego, $\mathbb{P}^n=(\mathbb{A}^{n+1}\setminus\{0\})/\mathbb{G}_m$ conjunto cociente. Sea $\pi:\mathbb{A}^{n+1}\setminus\{0\}\longrightarrow\mathbb{P}^n$ la proyección canónica dada por $(x_0,\dots,x_n)\longmapsto[x_0,\dots,x_n]$.

<u>Recuerdo</u> (topología): Sea X espacio topológico y $\sim$ rel. de equiv. en X, y sean $Y=X/\sim$ el conjunto cociente y $\pi:X\to Y$, $x\mapsto[x]$ la proyección canónica. Entonces, la <u>topología cociente</u> en Y es la topología obtenida al declarar que los abiertos $V\subseteq Y$ son aquellos conjuntos tales que $\pi^{-1}(V)=\{x\in X \text{ tal que } [x]\in V\}$ es abierto en X.

Luego, dotamos a $\mathbb{P}^n$ de la topología de Zariski (cociente). Más aún, el haz estructural de $\mathbb{P}^n$ está dado por

$$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}:=\pi_*\left((\mathcal{O}_{\mathbb{A}^{n+1}\setminus\{0\}})^{\mathbb{G}_m}\right)$$

ie, la imagen directa por π del sub-haz $(\mathcal{O}_{\mathbb{A}^{n+1}\setminus\{0\}})^{\mathbb{G}_m}$ de $\mathcal{O}_{\mathbb{A}^{n+1}\setminus\{0\}}$ de funciones regulares que son $\mathbb{G}_m$-<u>invariantes</u>.

<u>Concretamente</u>: Una sección (local) de $\mathcal{O}_{\mathbb{A}^{n+1}\setminus\{0\}}$ es una función racional de la forma $u(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ con $P,Q\in\mathcal{O}(\mathbb{A}^n)$. Por otra parte, las secciones $\mathbb{G}_m$-invariantes deben cumplir para todo $\lambda\in\mathbb{G}_m$ que: $u(\lambda x)=\dfrac{P(\lambda x)}{Q(\lambda x)}=u(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$,

ie, $P(\lambda x)=\lambda^d P(x)$ y $Q(\lambda x)=\lambda^d Q(x)$ para cierto $d\in\mathbb{N}$.

En otras palabras, una sección local de $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}$ es una función racional dada por el cociente de dos <u>polinomios homogéneos</u> del <u>mismo grado</u>.

Finalmente, veamos que el espacio anillado $(\mathbb{P}^n,\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n})$ es una variedad algebraica:

Sea $A_i \cong \mathbb{A}^n$ el sub-espacio afín $A_i = \{(x_0,\dots,x_n)\in\mathbb{A}^{n+1}$ tal que $x_i = 1\} \subseteq \mathbb{A}^{n+1}\setminus\{0\}$.
Consideramos el abierto $\mathcal{U}_i \subseteq \mathbb{P}^n$ dado por $\mathcal{U}_i = \{[x_0,\dots,x_n]\in\mathbb{P}^n$ tal que $x_i\neq 0\}$.
Notar que $\pi(A_i) = \mathcal{U}_i$. Más aún, $\varphi_i : \mathcal{U}_i \xrightarrow{\sim} A_i$ dada por $\varphi_i([x]) = \frac{x}{x_i}$ está bien definida y es un homeomorfismo (de inversa $\pi|_{A_i}: A_i \to \mathcal{U}_i$).

Por otro lado, si $V\subseteq A_i\cong\mathbb{A}^n$ abierto y $f\in\mathcal{O}(V)$ función regular, entonces la función $\varphi_i^*(f) \underset{def}{=} f\circ\varphi_i : \varphi_i^{-1}(V)\to k$ es regular en el abierto $\varphi_i^{-1}(V)$.
Así, obtenemos un isomorfismo de haces en k-álgebras $\varphi_i^*: \mathcal{O}_{A_i} \xrightarrow{\sim} (\varphi_i)_*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}|_{\mathcal{U}_i})$ dado explícitamente por:

$$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}|_{\mathcal{U}_i}(\varphi_i^{-1}(V)) \cong \mathcal{O}_{A_i}(V)$$

homogeneos del mismo grado $\rightarrow$
$$\frac{P(x_0,\dots,x_n)}{Q(x_0,\dots,x_n)} \xmapsto{(\varphi_i^*)^{-1}} \frac{P(x_0,\dots,x_{i-1},1,x_{i+1},\dots,x_n)}{Q(x_0,\dots,x_{i-1},1,x_{i+1},\dots,x_n)}$$

$$\varphi_i^*(f) = \frac{A\left(\frac{x_0}{x_i},\dots,\frac{x_n}{x_i}\right)}{B\left(\frac{x_0}{x_i},\dots,\frac{x_n}{x_i}\right)} \xleftarrow{\ \varphi_i^*\ } \frac{A(x_0,\dots,x_{i-1},x_{i+1},\dots,x_n)}{B(x_0,\dots,x_{i-1},x_{i+1},\dots,x_n)} = f$$

Luego, obtenemos un isomorfismo de espacios anillados $(\varphi_i,\varphi_i^*):(\mathcal{U}_i,\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}|_{\mathcal{U}_i}) \xrightarrow{\sim}(A_i,\mathcal{O}_{A_i})$ para cada $i=0,1,\dots,n$, de donde concluimos que $(\mathbb{P}^n,\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n})$ es una variedad algebraica ✓

$\boxed{\text{Ejercicio importante}}$ Probar que $\Gamma(\mathbb{P}^n,\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n})\cong k$, y deducir que $\mathbb{P}^n$ <u>no</u> es una variedad afín.

Recordemos que una función continua $f: X\to Y$ entre dos variedades algebraicas es un <u>morfismo regular</u> si para todo abierto $V\subseteq Y$ y toda función regular $u: V\to k$, la función continua $u\circ f: f^{-1}(V)\to k$ es regular, ie, $f^*:\mathcal{O}_Y\to f_*\mathcal{O}_X\subseteq f_*\mathcal{C}_X$.

<u>Teorema</u>: Sean X e Y variedades algebraicas, y sea $(f,\varphi):(X,\mathcal{O}_X)\to(Y,\mathcal{O}_Y)$ un morfismo de espacios anillados (ie, $f:X\to Y$ y $\varphi:\mathcal{O}_Y\to f_*\mathcal{O}_X$). Entonces, $f: X\to Y$ es un morfismo regular y $\varphi = f^*$.

<u>Dem</u>: La afirmación es <u>local</u> en Y, por lo que podemos suponer que Y es una variedad afín, ie, $Y\subseteq\mathbb{A}^m$. Además, cubriendo X por abiertos afines $X=\bigcup_{i\in I}X_i$ obtenemos $f_*\mathcal{O}_X \hookrightarrow \bigoplus_{i\in I}(f_i)_*\mathcal{O}_{X_i}$ donde $f_i = f|_{X_i}$, por lo que podemos suponer que $X=X_i$ es una variedad afín, ie, $X\subseteq\mathbb{A}^n$.
Sea $A=\mathcal{O}(X)$ y $B=\mathcal{O}(Y)$, y sea $\varphi:B\to A$ morfismo de k-álgebras. Dado $x\in X$, sea $\mathfrak{m}_x\subseteq A$ el ideal maximal correspondiente $\Rightarrow \eta := \varphi^{-1}(\mathfrak{m}_x)$ ideal primo en B.
Entonces, φ induce un morfismo $B/\eta \hookrightarrow A/\mathfrak{m}_x\cong k$ que es un isomorfismo !
Luego, $\eta=\eta_y$ es un ideal maximal, donde $y=f(x)\in Y$. Luego, para toda función regular $u\in B$ se tiene que:

$$\begin{array}{ccccc}
u\in B & & \xrightarrow{\quad\varphi\quad} & & A \ni \varphi(u) \\
\downarrow & & & & \downarrow \\
u_y\in\mathcal{O}_{Y,y} & & & & \mathcal{O}_{X,x}\ni\varphi(u)_x \\
\downarrow {\scriptstyle ev_y} & & & & {\scriptstyle ev_x}\downarrow \\
u(y)\in\mathcal{O}_{Y,y}/\mathfrak{m}_y\cong k & & \xrightarrow[Id]{\sim} & & k\cong\mathcal{O}_{X,x}/\mathfrak{m}_x\ni\varphi(u)(x)
\end{array}$$

$$\Rightarrow u(y) = \underbrace{u(f(x))}_{=f^*(u)(x)} = \varphi(u)(x)$$

Luego, $\varphi = f^*$ en B ✓ ■