§6. Funciones regulares y morfismos

Sea k un cuerpo y $\mathcal{O}(\mathbb{A}^n) = k[X_1, \dots, X_n]$. Comencemos por dar una construcción "dual" a $S \mapsto V(S)$ definida en la sección anterior.

Def: Sea $V \subseteq \mathbb{A}^n$ un subconjunto. Definimos el ideal de V como
$$\mathcal{I}(V) := \{ f \in \mathcal{O}(\mathbb{A}^n) \text{ tq } f(x) = 0 \quad \forall x \in V \}$$

Ejemplos: ① $\mathcal{I}(\emptyset) = \mathcal{O}(\mathbb{A}^n)$.

② Sea $X \subseteq \mathbb{A}^n$ subconj. Entonces, $X \subseteq V(\mathcal{I}(X))$ con igualdad si y sólo si X es una subvariedad afín. Así, $V(\mathcal{I}(X)) = \overline{X}^{Zar}$ es la adherencia de Zariski.

③ Sea $S \subseteq \mathcal{O}(\mathbb{A}^n)$ subconj. Entonces, $S \subseteq \mathcal{I}(V(S))$ pero en general no es una igualdad, incluso si S es un ideal: $\mathcal{I}(V(Y^2)) = \langle Y \rangle$ en $k[X,Y]$.

Notar que la subvariedad afín $V(XY) \subseteq \mathbb{A}^2$ se descompone en la unión $V(X) \cup V(Y)$ de los ejes coordenados. Sin embargo, si k es infinito, $V(X)$ y $V(Y)$ no pueden descomponerse.

Def: Sea X un espacio topológico (no vacío). Decimos que X es irreducible si no es la unión de dos subconjuntos cerrados estrictos, i.e., si $X = X_1 \cup X_2$ con X_1, X_2 cerrados entonces $X_1 = X$ o bien $X_2 = X$.

$\boxed{\text{Ejercicio}}$ Sea X espacio no-vacío. Probar que X es irreducible si y sólo si:
① Todo par de abiertos no-vacíos de X se intersectan.
$\Updownarrow$
② Todo abierto no-vacío de X es denso.

Teorema: Sea $X \subseteq \mathbb{A}^n$ subvariedad afín. Entonces, X es irreducible si y sólo si $\mathcal{I}(X) \subseteq \mathcal{O}(\mathbb{A}^n)$ es un ideal primo.

Dem: ($\Rightarrow$) Sea $X \subseteq \mathbb{A}^n$ subvar. afín irreducible, y sean $f, g \in \mathcal{O}(\mathbb{A}^n)$ polinomios tq fg se anula en X, i.e., $fg \in \mathcal{I}(X)$. $\Rightarrow X \subseteq V(fg) = V(f) \cup V(g)$. En part, $X = X_1 \cup X_2$ con $X_1 = V(f) \cap X$ y $X_2 = V(g) \cap X$ cerrados. Dado que X es irreducible $X_1 = X$ o $X_2 = X$, i.e., $X \subseteq V(f)$ o $X \subseteq V(g)$, i.e., $f \in \mathcal{I}(X)$ o $g \in \mathcal{I}(X)$ ✓
($\Leftarrow$) Sup. que $\mathcal{I}(X)$ es un ideal primo de $\mathcal{O}(\mathbb{A}^n)$ y sup. que $X = X_1 \cup X_2$, con $X_i \subsetneq X$ $(i=1,2)$. Como $X_i \subsetneq X$, $\exists f_i \in \mathcal{O}(\mathbb{A}^n)$ que se anula en X_i pero no en X. $\Rightarrow f_i \notin \mathcal{I}(X)$ pero $f_1 f_2 \in \mathcal{I}(X)$, una contradicción! ■

Corolario: Sea k un cuerpo infinito (eg. alg. cerrado). Entonces, $\mathbb{A}^n$ es irreducible.

Dem: Dado que k es infinito, todo polinomio nulo sobre $\mathbb{A}^n$ es nulo (fijar $n-1$ variables) y luego $\mathcal{I}(\mathbb{A}^n) = \langle 0 \rangle$ es un ideal primo ✓ ■

Recuerdo: Sea A un anillo conmutativo y sea $I \subseteq A$ un ideal. El ideal
$$\sqrt{I} := \{ f \in A \text{ tq } \exists m \in \mathbb{N}^{\geq 1} \text{ tal que } f^m \in I \}$$
es el radical de I. Decimos que I es un ideal radical si $I = \sqrt{I}$. Más aún, $I \subseteq A$ es un ideal radical $\Leftrightarrow$ El único elemento nilpotente de A/I es el 0.
En part, $\{\text{ideales maximales}\} \subseteq \{\text{ideales primos}\} \subseteq \{\text{ideales radicales}\}$.

Hechos (Hilbert, 1893): Sea $k = \overline{k}$ cuerpo algebraicamente cerrado (eg. $k = \mathbb{C}, \overline{\mathbb{F}_p}, \overline{\mathbb{Q}}$, etc). y sea $I \subseteq \mathcal{O}(\mathbb{A}^n) = k[X_1, \dots, X_n]$ un ideal. Entonces:

① ["Nullstellensatz débil"] Si $I = \mathfrak{m}$ es maximal $\Rightarrow \mathfrak{m} = \langle X_1 - a_1, \dots, X_n - a_n \rangle$ para ciertos $a_i \in k$

② ["Nullstellensatz"] Para todo I se cumple que $\mathcal{I}(V(I)) = \sqrt{I}$.

En particular, $V(I) = \phi \iff I = \mathcal{O}(\mathbb{A}^n)$.

⚠ En todo lo que sigue del curso, supondremos k algebraicamente cerrado!

Consecuencia: La aplicación $X \mapsto \mathcal{I}(X)$ establece una biyección decreciente (de inversa $I \mapsto V(I)$) entre:

a) Las subvariedades afines de $\mathbb{A}^n$ y los ideales radicales de $\mathcal{O}(\mathbb{A}^n)$.

b) Las subvariedades afines irreducibles de $\mathbb{A}^n$ y los ideales primos de $\mathcal{O}(\mathbb{A}^n)$.

c) Los puntos de $\mathbb{A}^n$ y los ideales maximales de $\mathcal{O}(\mathbb{A}^n)$.

Terminología: Un subconjunto $X \subseteq \mathbb{A}^n$ es localmente cerrado si es la intersección de un abierto y un cerrado de $\mathbb{A}^n$.

Def: Sea $X \subseteq \mathbb{A}^n$ localmente cerrado. Una función regular en X es una función $f : X \to k$ tal que para todo punto $x \in X$ existe $\mathcal{U}_x \subseteq X$ vecindad abierta de x en X y existen polinomios $P_x, Q_x \in \mathcal{O}(\mathbb{A}^n)$ tales que $Q_x(x) \neq 0$ y

$$f|_{\mathcal{U}_x} = \frac{P_x}{Q_x}\Big|_{\mathcal{U}_x}.$$

Denotamos por $\mathcal{O}(X) = \{f : X \to k \text{ regular}\}$ al k-álgebra de funciones regulares en X.

Prop: Sea $X \subseteq \mathbb{A}^n$ un cerrado de Zariski (ie, una subvar. afín). Entonces, toda función regular $f : X \to k$ es la restricción de un polinomio $P \in \mathcal{O}(\mathbb{A}^n)$ a X, ie, $f = P|_X$. En particular, $\mathcal{O}(X) \cong \mathcal{O}(\mathbb{A}^n)/\mathcal{I}(X)$. Más precisamente, la sucesión

$$0 \to \mathcal{I}(X) \xhookrightarrow{i} \mathcal{O}(\mathbb{A}^n) \xrightarrow{res_X} \mathcal{O}(X) \to 0$$

es exacta.

Dem: Sea $X = V(I)$, con $I \subseteq \mathcal{O}(\mathbb{A}^n)$ ideal (radical). Sea $f : X \to k$ regular. Dado $x \in X$, sea $\mathcal{U}_x \subseteq X$ vecindad abierta de $x \in X$, y P_x, Q_x tq $f Q_x = P_x$ en $\mathcal{U}_x$. Como $\mathcal{U}_x$ abierto de Zariski, $X \setminus \mathcal{U}_x = \{y \in X \text{ tq } A_1(y) = \dots = A_m(y) = 0\}$ para ciertos $A_i \in \mathcal{O}(\mathbb{A}^n)$. polinomios $\Rightarrow (A_1 f Q_x)(y) = (A_1 P_x)(y)$ para todo $y \in X$.

Luego, redefiniendo $Q_x := A_1 Q_x$ y $P_x := A_1 P_x$, tenemos que para cada $x \in X$ la igualdad $f Q_x = P_x$ es válida en todo X, y además $Q_x(x) \neq 0$ por definición.

Sea $J := \langle \{Q_x\}_{x \in X} \rangle \subseteq \mathcal{O}(\mathbb{A}^n)$ ideal. Por construcción, los Q_x no tienen ceros comunes en X, ie, $\phi = V(J) \cap X = V(J) \cap V(I) = V(I+J)$.

Nullstellensatz: $V(I+J) = \phi \iff I + J = \mathcal{O}(\mathbb{A}^n)$. En part, existen $B \in I$ y $\sum_{j=1}^{r} G_{x_j} Q_{x_j} \in J$ tal que $B + \sum_{j=1}^{r} G_{x_j} Q_{x_j} = 1$. Luego, en $X = V(I)$ se tiene $B = 0$ y así $f = f \cdot 1 = \sum_{j=1}^{r} G_{x_j} (f Q_{x_j}) = \sum_{j=1}^{r} G_{x_j} P_{x_j} =: P$ ✓

La última parte se deduce al considerar $res_X : \mathcal{O}(\mathbb{A}^n) \twoheadrightarrow \mathcal{O}(X)$, $P \mapsto P|_X$ y notar que por definición $\ker(res_X) = \mathcal{I}(X)$. ∎

<u>Importante</u>: Dado $X \subseteq \mathbb{A}^n$ localmente cerrado, definimos el <u>haz de funciones regulares</u> en X como el haz en k-álgebras $\mathcal{O}_X$ que a cada abierto $\mathcal{U} \subseteq X$ asocia el k-álgebra $\mathcal{O}_X(\mathcal{U}) := \mathcal{O}(\mathcal{U}) = \{f : \mathcal{U} \to k \text{ regular}\}$. Más aún, si dotamos a k de la topología de Zariski (ie, lo pensamos como la <u>recta afín</u> $\mathbb{A}^1$) entonces toda función regular es continua, ie, $\mathcal{O}_X(\mathcal{U}) \subseteq \mathcal{C}_X(\mathcal{U}) \to$ sub haz del ~~haz de~~ funciones continuas en X.

<u>Def</u>: Sean $X \subseteq \mathbb{A}^n$ e $Y \subseteq \mathbb{A}^m$ subvariedades afines. Una función $f : X \to Y$ es un <u>morfismo regular</u> si es la restricción de una función polinomial $F : \mathbb{A}^n \to \mathbb{A}^m$ que cumple $F(X) \subseteq Y$.

<u>Obs</u>: Gracias a la proposición anterior, $\mathcal{O}(X) = \{f : X \to \mathbb{A}^1 \text{ morfismo regular}\}$
Notar que si $f : X \to Y$ morfismo regular, entonces el <u>pullback</u> de f define un morfismo de k-álgebras $f^* : \mathcal{O}(Y) \to \mathcal{O}(X)$, $g \mapsto g \circ f$

<u>Ejemplos</u>: (1) Toda función polinomial $f : \mathbb{A}^n \to \mathbb{A}^m$, $x \mapsto (f_1(x), \dots, f_m(x))$ es regular.
(2) Todo morfismo regular es continuo para la topología de Zariski.
(3) $\boxed{\text{Ejercicio}}$ Sea $C = \{(x,y) \in \mathbb{A}^2 \text{ tq } y = x^2\}$ (parábola). Probar que $\mathcal{I}(C) = \langle X^2 - Y \rangle$ en $\mathcal{O}(\mathbb{A}^2) = k[X,Y]$ y deducir que C es irreducible. Demostrar que las funciones $f : C \to \mathbb{A}^1$, $(x,y) \mapsto x$ y $g : \mathbb{A}^1 \to C$, $t \mapsto (t, t^2)$ son morfismos regulares e inversas una de la otra: diremos que f es un <u>isomorfismo</u>. Describir $f^* : \mathcal{O}(\mathbb{A}^1) \to \mathcal{O}(C)$.
(4) Sup. que $\mathrm{car}(k) = p > 0$ (eg. $k = \overline{\mathbb{F}}_p$). La función $Fr : \mathbb{A}^1 \to \mathbb{A}^1$, $x \mapsto x^p$ es llamada el <u>morfismo de Frobenius</u> y es un morfismo regular y biyectivo. Sin embargo, veremos más adelante que <u>no</u> es un isomorfismo. El morfismo de k-álgebras asociado es $Fr^* : k[X] \to k[X]$, $X \mapsto X^p$.

<u>Prop</u>: Sean $X \subseteq \mathbb{A}^n$ e $Y \subseteq \mathbb{A}^m$ subvariedades afines. Entonces, la función $f \mapsto f^*$ establece una biyección entre los conjuntos de morfismos regulares $X \to Y$ y de morfismos de k-álgebras $\mathcal{O}(Y) \to \mathcal{O}(X)$. En part, X e Y son isomorfas si y sólo si las k-álgebras $\mathcal{O}(X) \cong \mathcal{O}(Y)$ son isomorfas.

<u>Dem</u>: Podemos reconstruir f a partir de f^* de la manera siguiente: si $y_1, \dots, y_m$ son las funciones coordenadas de $\mathbb{A}^m$, entonces $f = (f^*(y_1), \dots, f^*(y_m)) = (f_1, \dots, f_m)$ ✓
Luego, $f \mapsto f^*$ es inyectiva.
Por otro lado, dado un morfismo de k-álgebras $\varphi : \mathcal{O}(Y) \to \mathcal{O}(X)$ consideramos las imágenes $f_1 = \varphi(\overline{Y}_1), \dots, f_m = \varphi(\overline{Y}_m)$, donde $k[Y_1, \dots, Y_m] \to \mathcal{O}(Y) = \mathcal{O}(\mathbb{A}^m)/\mathcal{I}(Y)$ envía Y_i en $\overline{Y_i} = y_i$, y definimos así $f : X \to \mathbb{A}^m$. Basta verificar que $f(X) \subseteq Y$: Sea $g \in \mathcal{O}(\mathbb{A}^m)$ tal que g se anula en Y (ie, $g \in \mathcal{I}(Y)$), entonces

$$g(f(x)) = g(f_1(x), \dots, f_m(x)) = g(\varphi(y_1)(x), \dots, \varphi(y_m)(x)) = \varphi(g(y_1, \dots, y_m)) = 0$$

pues $g = 0$ en $\mathcal{O}(Y) = \mathcal{O}(\mathbb{A}^m)/\mathcal{I}(Y)$. Luego $f(x) \in Y$ y así $f \mapsto f^*$ sobreyectiva ✓ ■

$\boxed{\text{Ejercicio}}$ Sea $C = \{(x,y) \in \mathbb{A}^2 \text{ tq } y^2 = x^3\}$ (cúbica cuspidal). Probar que C es irreducible y calcular $\mathcal{I}(C)$. Deducir que C <u>no</u> es isomorfa a $\mathbb{A}^1$.
<u>Indicación</u>: Basta probar que $\mathcal{O}(C)$ <u>no</u> es isomorfo a $k[X]$, por ejemplo notando que no todo ideal de $\mathcal{O}(C)$ es <u>principal</u> (ie, generado por un elemento).