§5. Variedades algebraicas afines y topología de Zariski

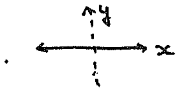
Sea k un cuerpo. Dotaremos al conjunto k^n de una topología, llamada la topología de Zariski, y de un haz de k-álgebras, llamado el haz de funciones regulares. El correspondiente espacio anillado se llamará el <u>espacio afín</u> y será denotado $\mathbb{A}^n$ (o también $\mathbb{A}^n(k)$).

<u>Notación</u>: Durante esta sección, denotamos por $\mathcal{O}(\mathbb{A}^n)$ al anillo de polinomios $k[X_1,\dots,X_n]$ en n variables con coeficientes en k.

<u>Def</u>: Sea $S \subseteq \mathcal{O}(\mathbb{A}^n)$ sub-conjunto de polinomios. El conjunto
$$V(S) := \{(x_1,\dots,x_n)\in k^n \text{ tal que } f(x_1,\dots,x_n)=0 \ \forall f\in S\}$$
es llamado una <u>sub-variedad afín</u> de k^n.

<u>Ejemplos</u>: ① $V(1)=\emptyset$ y $V(\emptyset)=V(0)=k^n$ son sub-variedades afines.

② $V(X_1-x_1,\dots,X_n-x_n)=\{(x_1,\dots,x_n)\}$, ie, todo punto es una sub-var. afín.

③ En k^2, con $\mathcal{O}(\mathbb{A}^2)=k[X,Y]$, $V(Y)=V(Y^2)$ es el eje x. 

④ Todo sub-espacio afín de k^n es una sub-variedad afín.

<u>Observación</u>: ① Notar que si $T\subseteq S\subseteq \mathcal{O}(\mathbb{A}^n)$ entonces $V(S)\subseteq V(T)$.

② Sea $S\subseteq\mathcal{O}(\mathbb{A}^n)$ sub-conjunto y sea $\langle S\rangle$ el <u>ideal</u> generado por S (ie, sumas finitas de la forma $\sum f_i g_i$ con $f_i\in S$ y $g_i\in\mathcal{O}(\mathbb{A}^n)$ arbitrarios), entonces $V(S)=V(\langle S\rangle)$. En part, siempre podemos suponer que $S=I\subseteq\mathcal{O}(\mathbb{A}^n)$ es un ideal.

<u>Recuerdo</u> (Teorema de la base de Hilbert): El anillo $k[X_1,\dots,X_n]$ es <u>noetheriano</u>. Es decir:

① Todo ideal I está generado por un número <u>finito</u> de polinomios.

$\Updownarrow$

② Toda sucesión creciente de ideales es eventualmente constante, ie,
$I_1\subseteq I_2\subseteq\dots\subseteq I_m\subseteq\dots \Rightarrow \exists N$ tal que $I_m=I_{m+1}$ para todo $m\geq N$.

En otras palabras, $V(S)=V(\langle S\rangle)=V(f_1,\dots,f_r)$ y luego <u>toda</u> sub-variedad afín de k^n puede definirse por un número <u>finito</u> de ecuaciones.

<u>Prop</u>: ① Intersección arbitraria de sub-variedades afines de k^n es una sub-var. afín de k^n.

② Unión finita de sub-variedades afines de k^n es una sub-var. afín de k^n.

<u>Dem</u>: Para ① basta notar que $\bigcap_{i\in I} V(S_i)=V\left(\bigcup_{i\in I} S_i\right)$. Para ② probaremos que $V(S_1)\cup V(S_2)=V(S_1S_2)$, donde S_1S_2 es el conjunto de productos s_1s_2, $s_i\in S_i$. Notar que $V(S_1)\cup V(S_2)\subseteq V(S_1S_2)$ por definición. Por otro lado, si $x\notin V(S_1)\cup V(S_2)$ entonces existen $f_1\in S_1$ y $f_2\in S_2$ tq $f_1(x)\neq 0$ y $f_2(x)\neq 0 \Rightarrow (f_1f_2)(x)\neq 0$, ie, $x\notin V(S_1S_2)$. ∎

<u>Consecuencia</u>: Las sub-variedades afines $V(S) \subseteq k^n$ verifican los axiomas de los conjuntos <u>cerrados</u> de una topología: Definimos la <u>topología de Zariski</u> de k^n declarando como <u>abiertos Zariski</u> a los conjuntos de la forma $\mathcal{U} = k^n \setminus V(S)$ para algún sub-conj. $S \subseteq \mathcal{O}(\mathbb{A}^n)$.

<u>Notación</u>: Denotamos por $\mathbb{A}^n$ al <u>espacio afín</u> k^n dotado de la topología de Zariski, ie, los cerrados son ceros de polinomios y los abiertos sus complementos.

Veamos algunas propiedades de la topología de Zariski:

<u>Def</u>: Un espacio topológico es <u>noetheriano</u> si toda sucesión decreciente de conjuntos cerrados es eventualmente constante, ie, $F_1 \supseteq F_2 \supseteq \dots \supseteq F_n \supseteq \dots \Rightarrow \exists N$ tal que $F_m = F_{m+1}$ para todo $m \geq N$.

<u>Ejemplo</u>: $\mathbb{A}^n$ es noetheriano, pues $I \mapsto V(I)$ es decreciente y $\mathcal{O}(\mathbb{A}^n)$ noetheriano.

<u>Def</u>: Un espacio topológico X es <u>quasi-compacto</u> si todo cubrimiento abierto de X admite un sub-cubrimiento finito.

<u>Prop</u>: Todo espacio topológico noetheriano es quasi-compacto.

<u>Dem</u>: Sea X esp. top. noetheriano y $X = \bigcup_{i\in I} \mathcal{U}_i$ cubrimiento abierto. Queremos probar que existe $J \subseteq I$ sub-conj <u>finito</u> tal que $X = \bigcup_{j\in J} \mathcal{U}_j$.
Para cada $i \in I$, sea $F_i := X \setminus \mathcal{U}_i$ cerrado. Notar que si $J \subseteq I$ entonces los $\{\mathcal{U}_j\}_{j\in J}$ cubren X si y sólo si $\bigcap_{j\in J} F_j = \emptyset$. Por contradicción, supongamos que toda intersección finita de los cerrados F_i es <u>no-vacía</u>:
Agregando todas las intersecciones finitas si fuese necesario, podemos suponer que la familia $\{F_i\}_{i\in I}$ es estables por intersecciones finitas. Como X es un espacio noetheriano, existe un elemento minimal F_m en esta familia.
$\Rightarrow F_m \cap F_i \subseteq F_m$ es una igualdad (por minimalidad), ie, $F_m \subseteq F_i \ \forall i \in I$.
Esto último es imposible, pues por hipótesis $\bigcap_{i\in I} F_i = \emptyset$. ■

<u>Consecuencia</u>: El espacio afín $\mathbb{A}^n$ es quasi-compacto.

<u>Recuerdo</u> (topología inducida): Sea X un espacio topológico y sea $Y \subseteq X$ un sub-conjunto. Entonces, la <u>topología inducida</u> (o <u>topología traza</u>) en Y es la topología obtenida al declarar que los cerrados (resp. abiertos) de Y son la intersección de cerrados (resp. abiertos) de X con Y.
En part, un subconj. de un espacio noetheriano es también noetheriano.

<u>Corolario</u>: Todo subconjunto del espacio afín $\mathbb{A}^n$ es un espacio topológico noetheriano respecto a la topología de Zariski (inducida). En part, toda subvariedad afín $X \subseteq \mathbb{A}^n$ es un espacio topológico noetheriano, y luego es quasi-compacto.