§4. Espacios anillados y $\mathcal{O}_X$-módulos

Comenzamos por usar funciones continuas para conectar (pre)haces entre dos espacios topológicos X e Y.

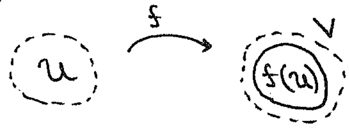
Motivación: Si $f: X \to Y$ es una función continua y $V \subseteq Y$ abierto, entonces $f^{-1}(V)$ es un abierto de X. Luego, a partir de un prehaz $\mathcal{F}$ en X podemos definir un prehaz $f_*\mathcal{F}$ en Y mediante:

$$(f_*\mathcal{F})(V) := \mathcal{F}(f^{-1}(V)) \quad \text{para todo } V \subseteq Y \text{ abierto}.$$

Sin embargo, la imagen $f(\mathcal{U}) \subseteq Y$ de un abierto $\mathcal{U} \subseteq X$ no es necesariamente un abierto de Y. Luego, dado un prehaz $\mathcal{G}$ en Y no podemos usar $\mathcal{G}(f(\mathcal{U}))$, con $\mathcal{U} \subseteq X$ abierto, para definir un prehaz en X.

Lo "mejor" que podemos hacer es "aproximar" $f(\mathcal{U}) \subseteq Y$ por abiertos, i.e., considerar vecindades abiertas de $f(\mathcal{U})$ y gérmenes de secciones:

$$(f^{-1}\mathcal{G})_{pre}(\mathcal{U}) := \varinjlim_{\substack{V \subseteq Y \text{ abierto} \\ \text{tq } f(\mathcal{U}) \subseteq V}} \mathcal{G}(V)$$



Concretamente, los elementos de $(f^{-1}\mathcal{G})_{pre}(\mathcal{U})$ son (clases de equivalencia) de gérmenes (s, V), con $s \in \mathcal{G}(V)$ y $f(\mathcal{U}) \subseteq V$ abierto, y donde $(s_1, V_1) \sim (s_2, V_2)$ si existe $W \subseteq Y$ abierto tal que $f(\mathcal{U}) \subseteq W \subseteq V_1 \cap V_2$ y $s_1|_W = s_2|_W$.

Def: Sea $f: X \to Y$ una función continua entre espacios topológicos. Sea $\mathcal{F}$ (resp. $\mathcal{G}$) un prehaz en X (resp. en Y) entonces definimos

① El prehaz imagen directa $f_*\mathcal{F}$ en Y mediante

$$(f_*\mathcal{F})(V) = \mathcal{F}(f^{-1}(V)) \quad \text{para todo } V \subseteq Y \text{ abierto}.$$

② El prehaz imagen inversa $(f^{-1}\mathcal{G})_{pre}$ en X mediante

$$(f^{-1}\mathcal{G})_{pre}(\mathcal{U}) = \varinjlim_{\substack{V \subseteq Y \text{ abierto} \\ \text{tq } f(\mathcal{U}) \subseteq V}} \mathcal{G}(V) \quad \text{para todo } \mathcal{U} \subseteq X \text{ abierto}.$$

Ejercicio Con la misma notación de la definición anterior:

① Probar que si $\mathcal{F}$ es un haz en X, entonces $f_*\mathcal{F}$ es un haz en Y.

② Dar un ejemplo que muestre que incluso si $\mathcal{G}$ es un haz, no necesariamente $(f^{-1}\mathcal{G})_{pre}$ es un haz en X. [Indicación: Considerar $Y = \{pt\}$ un punto]

Obs: Por lo anterior, si $\mathcal{G}$ es un haz definimos el haz imagen inversa $f^{-1}\mathcal{G}$ como el haz asociado al prehaz $(f^{-1}\mathcal{G})_{pre}$, i.e., $f^{-1}\mathcal{G} := (f^{-1}\mathcal{G})^+_{pre}$.

③ Sea $x \in X$ y sea $y = f(x) \in Y$. Probar que hay morfismos de grupos $f_*(\mathcal{F})_y \to \mathcal{F}_x$ y $(f^{-1}(\mathcal{G}))_x \xrightarrow{\sim} \mathcal{G}_y$, donde este último es un isomorfismo.

④ (Adjunción) Sup. que $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ son haces en X e Y, resp. Probar que hay un isomorfismo de grupos abelianos

$$\mathrm{Hom}(f^{-1}\mathcal{G}, \mathcal{F}) \cong \mathrm{Hom}(\mathcal{G}, f_*\mathcal{F}).$$

Caso particular importante: En el caso de una inclusión $X \subseteq Y$ de un sub-espacio topológico, consideramos la inclusión (continua) $i : X \hookrightarrow Y$:
Dado un haz $\mathcal{G}$ en Y, denotamos el haz imagen inversa $i^{-1}\mathcal{G}$ en X por $\mathcal{G}|_X$ y se llama la restricción de $\mathcal{G}$ en X.
En el caso en que $X = V$ es un abierto de Y, entonces $\mathcal{G}|_V$ es el haz en V que asocia a todo abierto $\mathcal{U} \subseteq V$ el grupo abeliano $\mathcal{G}(\mathcal{U})$.

$\boxed{\text{Ejercicio}}$ Probar que si $X = \{y\}$ es un punto de Y, entonces $\mathcal{G}|_y$ es el haz (constante) $\mathcal{G}_y$ en $\{y\}$.

Def: Sea k un cuerpo. Un espacio anillado en k-álgebras es un par $(X, \mathcal{O}_X)$ donde X es un espacio topológico y un haz $\mathcal{O}_X$ de k-álgebras (conmutativas con unidad) llamado el haz estructural.
Más aún, un morfismo de espacios anillados en k-álgebras $(X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ es un par (f, φ) formado por una función continua $f : X \to Y$ y un morfismo de haces de k-álgebras

$$\varphi : \mathcal{O}_Y \longrightarrow f_* \mathcal{O}_X$$

("pullback de funciones regulares de Y a X"). Además, la composición de morfismos está bien definida y por ende obtenemos una categoría. En particular, la noción de isomorfismo de espacios anillados en k-álgebras tiene sentido.

Obs: Sea $(X, \mathcal{O}_X)$ un espacio anillado. Si $\mathcal{U} \subseteq X$ es un abierto, entonces podemos considerar el haz de k-álgebras $\mathcal{O}_{\mathcal{U}} = \mathcal{O}_X|_{\mathcal{U}}$, lo que permite considerar a $\mathcal{U}$ como un espacio anillado.

Ejemplo: Sea M una variedad diferenciable y $\mathcal{O}_M = \mathcal{C}^\infty_M$ el haz de funciones diferenciables. Entonces, $(M, \mathcal{O}_M)$ es un espacio anillado en $\mathbb{R}$-álgebras.

Def: Sea $(X, \mathcal{O}_X)$ un espacio anillado. Un $\mathcal{O}_X$-módulo es un haz de k-espacios vectoriales $\mathcal{F}$ tal que para todo abierto $\mathcal{U}$ de X, el k-e.v. $\mathcal{F}(\mathcal{U})$ es un $\mathcal{O}_X(\mathcal{U})$-módulo tal que para cada inclusión $V \hookrightarrow \mathcal{U}$ de abiertos, las aplicaciones lineales de restricción $\mathcal{F}(\mathcal{U}) \to \mathcal{F}(V)$ son compatibles con las estructuras de módulos.
Más aún, un morfismo de $\mathcal{O}_X$-módulos es un morfismo $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ entre haces de k-espacios vectoriales tal que para todo abierto $\mathcal{U} \subseteq X$ la aplicación $\varphi_{\mathcal{U}} : \mathcal{F}(\mathcal{U}) \to \mathcal{G}(\mathcal{U})$ es $\mathcal{O}_X(\mathcal{U})$-lineal. Además, la composición de morfismos de $\mathcal{O}_X$-módulos está bien definida y por ende obtenemos una categoría, donde los conjuntos de morfismos se denotan por

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \quad \text{o bien} \quad \mathrm{Hom}_X(\mathcal{F}, \mathcal{G}),$$

y los cuales son grupos abelianos que además pueden ser dotados de una estructura de $\mathcal{O}_X(X)$-módulo. (ie, $\Gamma(X, \mathcal{O}_X)$-módulo).

⚠ Importante: Todas las construcciones válidas para módulos sobre un anillo poseen análogos en el contexto de $\mathcal{O}_X$-módulos. Sin embargo, en ocasiones hay que considerar el haz asociado al prehaz en cuestión. Los principales ejemplos son:

(1) $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{F}$ sub-$\mathcal{O}_X$-módulo y el $\mathcal{O}_X$-módulo cociente $\mathcal{F}/\mathcal{E}$ (haz asociado).

(2) Dados un morfismo $\varphi: \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ de $\mathcal{O}_X$-módulos, los haces $\ker(\varphi)$, $\mathrm{Im}(\varphi)$ y $\mathrm{Coker}(\varphi)$ son $\mathcal{O}_X$-módulos (para los dos últimos se considera el haz asociado).

(3) Dados dos $\mathcal{O}_X$-módulos, la suma directa $\mathcal{F} \oplus \mathcal{G}$ es un $\mathcal{O}_X$-módulo. Más generalmente, $\bigoplus_{i \in I} \mathcal{F}_i$ es un $\mathcal{O}_X$-módulo.

(4) Sean $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ dos $\mathcal{O}_X$-módulos, el <u>producto tensorial</u> $\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{G}$ (o también $\mathcal{F} \otimes \mathcal{G}$) es el haz asociado al prehaz

$$\mathcal{U} \longmapsto \mathcal{F}(\mathcal{U}) \otimes_{\mathcal{O}_X(\mathcal{U})} \mathcal{G}(\mathcal{U})$$

para todo $\mathcal{U} \subseteq X$ abierto.

(5) Sean $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ dos $\mathcal{O}_X$-módulos y sea $\mathcal{U} \subseteq X$ abierto. Entonces, $\mathcal{F}|_{\mathcal{U}}$ y $\mathcal{G}|_{\mathcal{U}}$ son $\mathcal{O}_{\mathcal{U}}$-módulos. El $\mathcal{O}_X$-módulo obtenido como el haz asociado al prehaz

$$\mathcal{U} \longmapsto \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{\mathcal{U}}}(\mathcal{F}|_{\mathcal{U}}, \mathcal{G}|_{\mathcal{U}})$$

es denotado $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ o $\mathcal{H}om(\mathcal{F}, \mathcal{G})$.

(6) Sea $\mathcal{F}$ un $\mathcal{O}_X$-módulo. El $\mathcal{O}_X$-módulo <u>dual</u> de $\mathcal{F}$ es $\mathcal{F}^\vee := \mathcal{H}om(\mathcal{F}, \mathcal{O}_X)$

(7) Podemos hablar de sucesiones exactas de $\mathcal{O}_X$-módulos, de álgebra tensorial, álgebra exterior y álgebra simétrica. Por ejemplo, la potencia exterior $\Lambda^d \mathcal{F}$ de un $\mathcal{O}_X$-módulo $\mathcal{F}$ es el haz asociado al prehaz $\mathcal{U} \mapsto \Lambda^d \mathcal{F}(\mathcal{U})$.

(8) Un $\mathcal{O}_X$-módulo $\mathcal{F}$ es <u>libre</u> si $\mathcal{F} \cong \mathcal{O}_X^{\oplus |I|} = \bigoplus_{i \in I} \mathcal{O}_X$ para cierto conjunto de índices I. El cardinal de I es el <u>rango</u> de $\mathcal{F}$.

(9)* Un $\mathcal{O}_X$-módulo $\mathcal{F}$ es <u>localmente libre</u> si existe un cubrimiento abierto $X = \bigcup_{i \in I} \mathcal{U}_i$ tal que $\mathcal{F}|_{\mathcal{U}_i}$ es un $\mathcal{O}_{\mathcal{U}_i}$-módulo libre, i.e., $\mathcal{F}|_{\mathcal{U}_i} \cong \mathcal{O}_{\mathcal{U}_i}^{\oplus r_i}$

Si el espacio topológico X es <u>conexo</u>, entonces todos los rangos r_i son iguales y será llamado el <u>rango</u> del $\mathcal{O}_X$-módulo localmente libre.

(10) Un <u>haz invertible</u> en X es un $\mathcal{O}_X$-módulo localmente libre $\mathcal{L}$ de rango 1, i.e., X puede cubrirse por abiertos $\mathcal{U}$ tal que $\mathcal{L}|_{\mathcal{U}} \cong \mathcal{O}_{\mathcal{U}}$. En part, si $\mathcal{F}$ es un $\mathcal{O}_X$-módulo, entonces $\mathcal{F}|_{\mathcal{U}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{U}}} \mathcal{L}|_{\mathcal{U}} \cong \mathcal{F}|_{\mathcal{U}}$.

(11) Un <u>haz de ideales</u> $\mathcal{I}$ es un sub-$\mathcal{O}_X$-módulo de $\mathcal{O}_X$. En otras palabras, para todo abierto $\mathcal{U} \subseteq X$, $\mathcal{I}(\mathcal{U})$ es un ideal de $\mathcal{O}_X(\mathcal{U})$.

Ejercicio Sea $\mathcal{L}$ un haz invertible en X. Probar que $\mathcal{L}^\vee \otimes \mathcal{L} \cong \mathcal{O}_X$ y que $\mathcal{L}^{\vee\vee} \cong \mathcal{L}$. ("haz reflexivo").

Finalmente, si consideramos $(X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ un morfismo de espacios anillados dado por el par (f, φ), donde $f: X \to Y$ función continua y $\varphi: \mathcal{O}_Y \to f_* \mathcal{O}_X$ morfismo de haces de $\mathbb{k}$-álgebras (i.e., para todo abierto $V \subseteq Y$ un morfismo $\varphi_V: \mathcal{O}_Y(V) \to f_*\mathcal{O}_X(V) \underset{\text{def}}{=} \mathcal{O}_X(f^{-1}(V))$.), y consideramos $\mathcal{F}$ un $\mathcal{O}_X$-módulo (en X) y $\mathcal{G}$ un $\mathcal{O}_Y$-módulo (en Y) entonces:

① El haz imagen directa $f_*\mathcal{F}$ es un $f_*\mathcal{O}_X$-módulo. Dado que poseemos un morfismo de haces $\varphi: \mathcal{O}_Y \to f_*\mathcal{O}_X$, este permite definir una estructura de $\mathcal{O}_Y$-módulo en $f_*\mathcal{F}$. Así, $f_*\mathcal{F}$ es el <u>$\mathcal{O}_Y$-módulo imagen directa</u>.

② El haz imagen inversa $f^{-1}\mathcal{G}$ es un $f^{-1}\mathcal{O}_Y$-módulo. Por la adjunción entre f^{-1} y f_* (ver pág. 14), se tiene que:

$$\mathrm{Hom}(f^{-1}\mathcal{O}_Y, \mathcal{O}_X) \cong \mathrm{Hom}(\mathcal{O}_Y, f_*\mathcal{O}_X).$$

Luego, $\varphi: \mathcal{O}_Y \to f_*\mathcal{O}_X$ corresponde a un único morfismo $\psi: f^{-1}\mathcal{O}_Y \to \mathcal{O}_X$ y por ende $\mathcal{O}_X$ es un $f^{-1}\mathcal{O}_Y$-módulo. Así, para obtener un $\mathcal{O}_X$-módulo a partir de $f^{-1}\mathcal{G}$ basta considerar la extensión de escalares (ver pág 3, Ejemplo 2):

$$f^*\mathcal{G} := f^{-1}\mathcal{G} \otimes_{f^{-1}\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_X.$$

Así, $f^*\mathcal{G}$ es el <u>$\mathcal{O}_X$-módulo imagen inversa</u> (o <u>pullback</u>).

<u>Obs</u>: Tal como antes, hay un isomorfismo (functorial)

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(f^*\mathcal{G}, \mathcal{F}) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_Y}(\mathcal{G}, f_*\mathcal{F})$$

de donde obtenemos que f^* y f_* son functores adjuntos.

<u>Ejemplo</u>: Sea $X = \mathbb{R}^n$ (o una variedad diferenciable) y $\mathcal{O}_X = \mathcal{C}^\infty$ el haz de funciones diferenciables. Si elegimos coordenadas (locales) $x_1, \ldots, x_n$ de X y denotamos por $dx_1, \ldots, dx_n$ sus diferenciales, entonces el <u>haz cotangente</u> Ω_X (o Ω_X^1) esta dado por: para cada abierto $\mathcal{U} \subseteq X$, los elementos de $\Omega_X(\mathcal{U})$ son 1-formas diferenciales de la forma

$$\omega(x) = \sum_{j=1}^n f_j(x)\, dx_j \quad , \text{ donde } f_j \in \mathcal{O}_X(\mathcal{U}).$$

En part, $\Omega_X|_{\mathcal{U}} \cong \mathcal{O}_{\mathcal{U}}^{\oplus n}$ es localmente libre de rango $n = \dim_{\mathbb{R}}(X)$.

Más generalmente, podemos considerar el haz $\Omega_X^d := \Lambda^d \Omega_X$ de d-formas diferenciales, cuyas secciones sobre el abierto $\mathcal{U} \subseteq X$ son de la forma

$$\omega(x) = \sum_{1 \le j_1 < \ldots < j_d \le n} f_{j_1, \ldots, j_d}(x)\, dx_{j_1} \wedge \ldots \wedge dx_{j_d}$$

con $f_{j_1,\ldots,j_d} \in \mathcal{O}_X(\mathcal{U})$. Así, Ω_X^d es localmente libre de rango $\binom{n}{d}$.

En particular, $\omega_X := \Omega_X^n = \Lambda^n \Omega_X$ es un haz invertible, llamado el <u>haz canónico</u> de X. Además, $\mathcal{T}_X := \mathcal{H}om(\Omega_X, \mathcal{O}_X)$ es el <u>haz tangente</u>.

$\boxed{\text{Ejercicio}}$ Probar que $\omega_X \otimes (\Omega_X^d)^\vee \cong \Omega_X^{n-d}$ y en particular $\omega_X \otimes \mathcal{T}_X \cong \Omega_X^{n-1}$.

(<u>Obs</u>: También diremos que ω_X es el <u>haz dualizante</u> de X).